Отзыв о работе Дмитрия Захарова “Хроматические числа одной серии графов”.

Работа относится к важной и популярной теме — комбинаторным характеристикам графов пересечений подмножеств (типа графа Кнезера).

Изучается естественный и важный вопрос о хроматическом числе такого графа $G(n,r,s)$ (вершины — r-подмножества данного n-множества, ребру соответствует размер пересечения s — таким образом, это дистанционный граф сечения единичного куба $\{0,1\}^n$ плоскостью $\sum x_i = r$ для расстояния $\sqrt{2r-2s}$.)

Прежде всего, автор приводит асимптотические (при данных r,s и большом n) оценки значения хроматического числа, которые могут быть выведены из недавнего фундаментального и сложного результата Киваша о существовании дизайнов. Затем автор сосредотачивается на графе $G(n,4,2)$, для которого упомянутая оценка дает $\chi(G(n,4,2)) \leqslant (\frac{1}{6}+o(1))n^2$. Во-первых, он изучая связь графов $G(n,4,2)$ и хорошо изученного графа $G(n,3,1)$ устанавливает точность этой оценки, показывая что $\chi(G(n,4,2)) \geqslant (n-2)(n-3)/6$. Затем он приводит элементарное доказательство упомянутой верхней оценки.

Представляет интерес как сам метод, не использующий напрямую теорему Киваша (но было бы интересно сравнить идеи алгебраических конструкций), так и гипотетическая возможность получить конкретную оценку остаточного члена, на что при использовании теоремы Киваша как чёрного ящика надеяться сложно.

Автор творчески развивает метод покраски, предложенный Балогом, Косточкой и Райгородским. Именно, он рассматривает элементы универсума как ненулевые точки двумерной плоскости над конечным полем остатков по простому модулю (то есть $n=p^2-1$, у упомянутых авторов было пространство большой размерности над малым полем), в нём пятёрки векторов, дающие в сумме 0. Все пятёрки разбиваются на “хорошие” и “плохие”. Для плохих пятёрок хроматическое число графа, индуцированного на содержащихся в них четвёрках, оказывается просто мало (доказательство этого содержит интересную саму по себе лемму о списочном хроматическом числе изучаемого графа — кстати, почему бы не внести её в число результатов?). Хорошие пятёрки красятся так. Во-первых, все четвёрки в одной пятёрке красятся одинаково. Во-вторых, каждая орбита одной пятёрки под действием полной линейной группы красится независимо от прочих орбит — и для неё хватает 20 цветов. Причина, как я её понимаю, в том, что “локально” полная линейная группа в алфавите из преобразований, переводящих одну пару векторов пятёрки в любую из 20 других возможных пар, устроена как свободная группа, а нелокальность убрана в плохие пятёрки. Для свободной же группы можно красить по аддитивной mod 20 функции от используемых букв.

Работа вызвала у меня живой интерес. Считаю, что она заслуживает публикации в хорошем комбинаторном журнале и должна вызвать интерес многих специалистов. Автор свободно применяет и вероятностный и полиномиальный метод, что говорит о его высокой технической оснащённости, исключительной для школьника. Но помимо оснащённости он демонстрирует и оригинальные идеи, которые, как я считаю, имеют большую перспективу.

Стиль изложения не лишён определённых шероховатостей, что неизбежно для столь юного автора, но в целом мне импонирует. Автор старается быть понятным и раскрывать, а не затуманивать суть.

Все представленные доказательства мной изучены и содержательных ошибок в них я не вижу. (Какие-то мелочи, не влияющие на суть, имеются — см. ниже.)

Несколько замечаний редакционного характера, не влияющих на общее близкое к восторженному впечатление от работы:

1) Список литературы требуется полностью переписать. Можно использовать в качестве образца список литературы любой статьи в любом журнале.

2) Комбинаторная теорема о нулях Алона это не то, что автор называет теоремой 6, а совсем другое утверждение. Кроме того, там, где она используется, кажется, проще обойтись теоремой 5 (Лемма Липтона — де Милло — Шварца — Зиппеля.) В самом деле, большинство четвёрок векторов таковы, что никакие два из них не коллинеарны и никакой не коллинеарен их сумме, так что ненулевой многочлен малой степени не может на них обнуляться.

3) Венгерская фамилия Nagy читается и пишется по-русски как Надь.

4) В конце предложения ставится точка. Даже если оно заканчивается выключной формулой.

5) В работе имеется ряд опечаток ((n, r, q)-динайны, много пропущенных запятых, иногда путаются само множество и количество элементов в нём и т. д.)

6) В последней выключной формуле на странице 9 вместо P^Q должно быть, наверно, $P^{Q/20}$ (но это не принципиально).