Условие:

В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами. При этом из каждого города выходит хотя бы 3 дороги. Докажите, что существует циклический маршрут, длига которого не делится на три.

Решение:

Построим граф G: каждому городу сопоставим вершину в графе G; две вершины соединим ребром, если соответствующие города соединены дорогами.

Докажем, что в построенном графе найдётся цикл, длина которого не делится на три.

Рассмотрим наибольший простой путь в графе G: v1, v2, …, vk.

По условию степень вершины v1 хотя бы три, следовательно есть хотя бы две вершины u и s, отличные от v2, соединённые с v1 ребром.

Докажем, что u и s принадлежат пути v1, v2, …, vk.

Предположим, что u не лежит в этом пути. Тогда рассмотрим путь u, v1, v2, … , vk. Очевидно, он тоже простой, причём его длина больше длины пути v1, v2, … , vk на 1. Получаем противоречие с выбором v1, v2, …, vk.

Доказательство для s аналогично.

Итак, мы показали, что u и s лежат в пути v1, v2, …, vk. Значит u=vi, s=vj для некоторых различных i и j. Без ограничения общности будем считать, что i<j.

Теперь рассмотрим три цикла:

1) v1, v2, … , vi, v1

2) v1,vi, vi+1, … , vj, v1

3) v1, v2, … , vj, v1

Обозначим длины 1-го, 2-го и 3-го циклов за A, B, C соответственно.

Тогда выполняется следующее соотношение:

A + B = C + 2

Следовательно среди чисел A, B и C есть число, которое не делится на три, тогда соответствующий цикл — искомый.