

Исследование внешнего бильярда вне правильного пятиугольника

Дмитренко Андрей¹
Скачкова Маргарита²
Синицына Владислава³

Данная работа — исследование на тему динамики отображения внешнего бильярда вне правильного пятиугольника. В ней даётся полная характеристика множества периодических точек, их маршрутов и периодов относительно исследуемого отображения.

¹dmitrenko.ett@gmail.com

²margomolko14@gmail.com

³vladislava.sinitsyna@yandex.ru

Обзор результатов

Мы описываем всё множество периодических точек и периодических компонент внешнего бильярда вне правильного пятиугольника — теорема 1. Мы вводим правило для генерации слов, описывающих движение периодических компонент при действии *индуцированного внешнего бильярда* (определение 6) — теорема 2 — и перечисляем все такие слова — теорема 3. Мы описываем периоды для всех периодических компонент отображения внешнего бильярда вне правильного пятиугольника — теорема 4.

Описание символической динамики индуцированного внешнего бильярда вне правильного пятиугольника дано в [1], но в несколько иных терминах, чем в данной работе. Периоды для периодических компонент внутри поля Y_0 описаны в [2]. Описание периодов всех периодических компонент вне поля Y_0 предлагается, по-видимому, впервые.

Введение, основные определения

Рассмотрим выпуклую фигуру M на плоскости и точку P вне ее. Проведем из P к M две касательных, выделим из них правую (будем считать, что ориентация на плоскости зафиксирована).

Определение 1. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Точка $f(p)$ симметрична точке P относительно точки касания фигуры M правой касательной из P . Отображение f называется *внешним бильярдом* вне M ; фигура M называется *столом*.

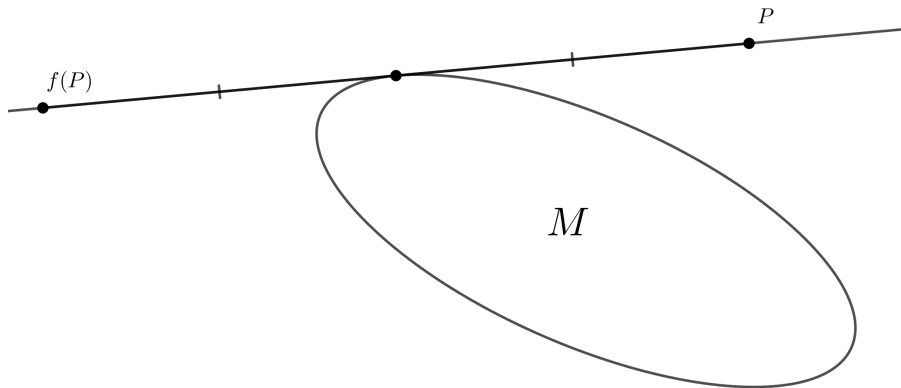


Рис. 1: Определение внешнего бильярда

В нашем случае столом будет правильный пятиугольник со стороной 1 и центром в начале координат. Отметим, что для многоугольника отображение внешнего бильярда не везде корректно определено: некоторые касательные к многоугольнику содержат его стороны, и невозможно определить, относительно какой точки отражать данную. Поэтому на лучах вида $[a_i a_{i+1})$, где a_i - вершины пятиугольника в порядке обхода по часовой стрелке (см. рис. 2) отображение f в нашем случае не определено.

Определение 2. Точки, для которых найдётся $k \in \mathbb{N}$ такое, что $f^k(x)$ не определено, назовём *границными* для k -ой итерации отображения f .

Пусть B — объединение стола и лучей вида $[a_i a_{i+1})$, где a_i - вершины пятиугольника в порядке обхода по часовой стрелке (см. рис. 2). Понятно, что B - это множество точек, граничных для первой итерации отображения f . Оно также будет обозначаться B_1 .

Множество B_n граничных точек для n -ой итерации отображения определяется рекуррентным соотношением $B_{n+1} = B_n \cup f^{-1}(B_n)$. Под B_∞ будем понимать $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$.

Определение 3. Пять компонент, на которые граничные лучи делят поле бильярда, называются *секторами*.

Каждому сектору присвоим номер в соответствии с номером вершины стола, относительно которой его отражает отображение внешнего бильярда (рис. 2). Сектор номер i будем обозначать V_i .

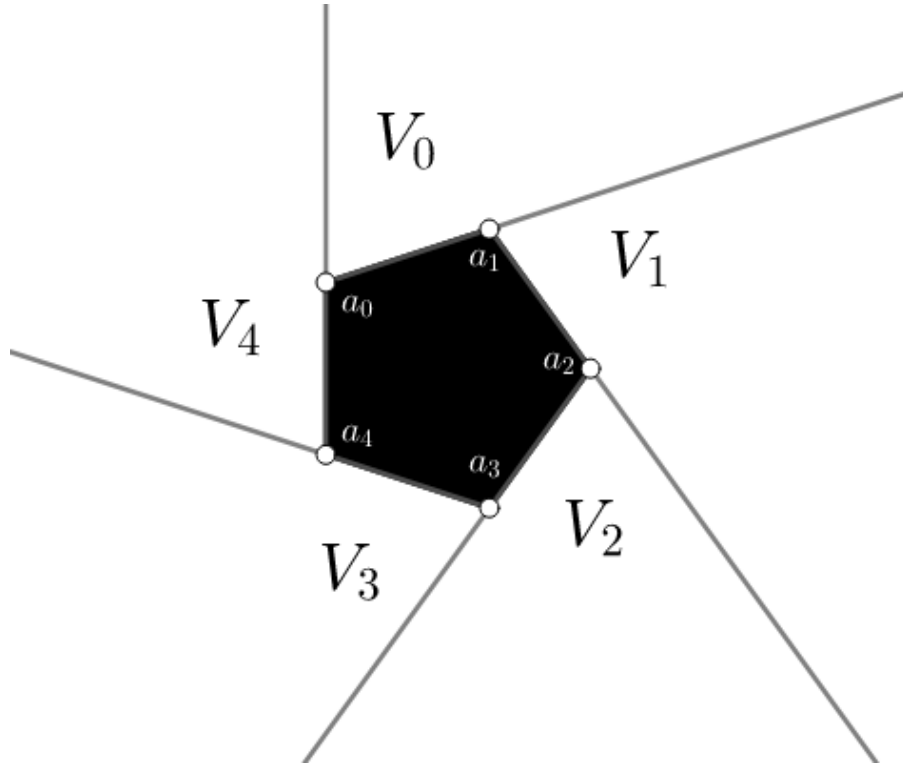


Рис. 2: Области определения внешнего бильярда

Определение 4 (Маршрут). Рассмотрим точку $x \in X \setminus B_n$. Номер сектора, в котором находится образ точки x_i на i -ой итерации f , называется её *адресом*. *Маршрут* длины n для точки x относительно действия отображения f — это конечная последовательность $\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}$ элементов из множества $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, в которой α_i является адресом точки $f^i(x)$.

Под *бесконечным маршрутом* точки мы будем понимать такую последовательность адресов, что любые n её первых членов образуют маршрут длины n для этой точки.

Если существует такая подстрока бесконечного маршрута точки, что, начиная с некоторой позиции, маршрут состоит лишь из последовательных повторений этой подстроки, она называется *периодом* маршрута. Обычно под периодом мы будем понимать период наименьшей длины.

Рассмотрим многоугольник на рис. 3. Он образован пятью красными треугольниками Λ_i и пятью зелёными треугольниками Δ_i . Каждый Λ_i построен продолжением до пересечения сторон стола $[a_i a_{i+1}]$ и $[a_{i-1} a_{i-2}]$ (здесь и далее считается, что индекс каждой вершины взят по модулю 5, то есть a_{-1} — это то же, что a_4 и т.д.). Каждый Δ_i построен гомотетией в вершине a_i с коэффициентом $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ треугольника $\Delta a_{i-1} a_i a_{i+1}$. Нетрудно убедиться в том, что объединение этих треугольников (будем обозначать его, как Υ) переходит само в себя при действии отображения f (см. правую часть рис. 3).

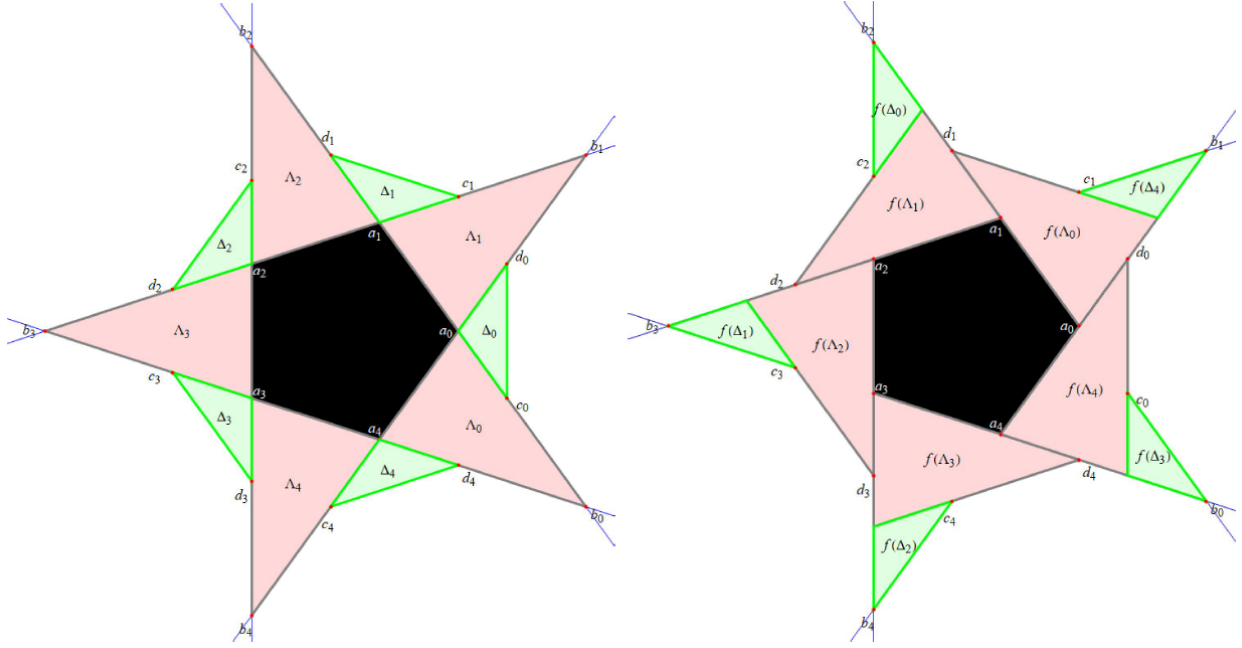


Рис. 3: Многоугольник Y переходит сам в себя при действии отображения f

Определение 5 (Поворот до V_0). Определим отображение R , как поворот точки относительно центра стола на угол $\frac{2\pi}{5}$ против часовой стрелки. Для всякой точки $y \in \mathbb{R}^2 \setminus B$ найдётся целое число m_y такое, что $R^{m_y}(y) \in V_0$. Поворотом до V_0 назовем следующее отображение: $R_0 : y \mapsto R^{m_y}(y)$. Неформально говоря, всякую точку оно “доворачивает” до сектора V_0 .

Введём отображение $F : V_0 \setminus B \rightarrow V_0$ такое, что $F = R_0 \circ f$. Нетрудно убедиться, что на каждой из отмеченных цветом на рис. 4 областей (метод их построения понятен из отмеченных на том же рисунке длин и углов) F является движением. В ограничении на треугольник Λ_0 отображение F есть поворот на 108° относительно точки пересечения биссектрис углов $\angle a_0 F a_1$ и $\angle P Q a_0$. В ограничении на красную область (в дальнейшем она будет называться U_1) это поворот на 108° относительно точки пересечения биссектрис углов $\angle P Q M$ и $\angle F a_1 G$. В ограничении на зелёную область (в дальнейшем она будет называться U_2) это поворот на 36° относительно точки пересечения углов $\angle K R N$ и $\angle L G M$.

Определение 6. Отображение F называется *индуцированным внешним бильярдом*.

Объединение жёлтого и зелёного треугольников на рис. 5 (Λ_0 и Δ_4 в терминах определения поля Y) назовём полем Y_0 .

Действие индуцированного бильярда в ограничении на поле Y_0

Определение 7. *Бинарный маршрут* b_x точки $x \in Y_0$ — это следующая последовательность из 0 и 1:

$$b_x(k) = \begin{cases} 0, & \text{если } F^k(x) \text{ лежит в жёлтом треугольнике в } Y_0 \text{ на рис. 5} \\ 1, & \text{если } F^k(x) \text{ лежит в зелёном треугольнике в } Y_0 \text{ на рис. 5} \end{cases}$$

Период бинарного маршрута точки определяется аналогично периоду обычного маршрута.

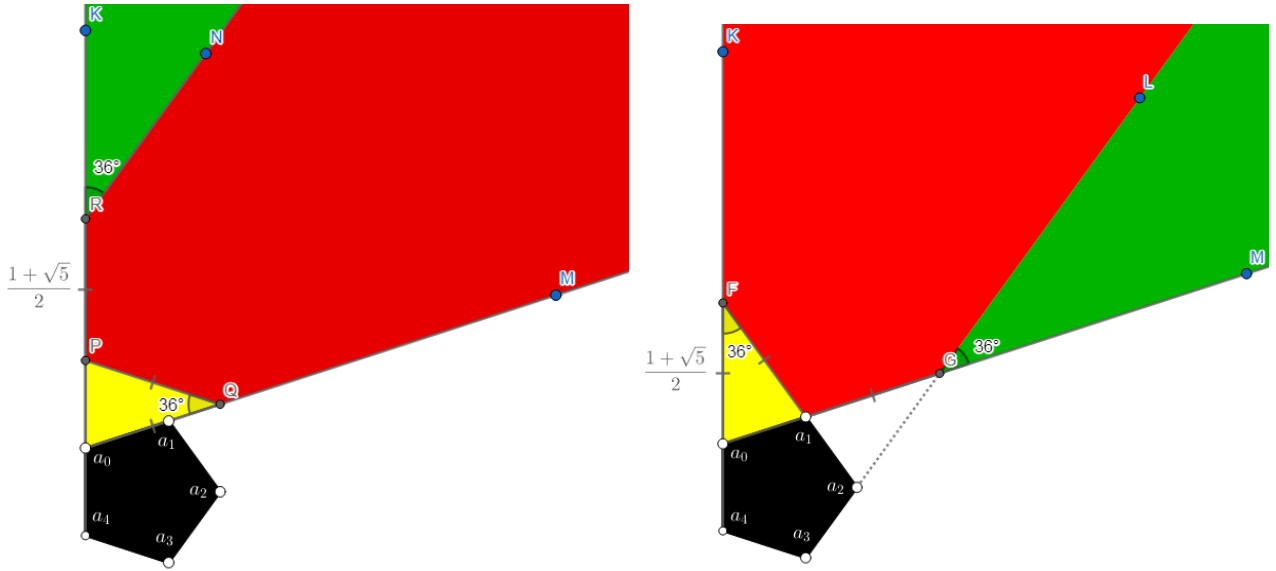


Рис. 4: Действие перекладывания F на секторе V_0 . На левой части иллюстрации жёлтым цветом обозначена область U_0 (совпадает с ранее определённым треугольником Λ_0), красным — область U_1 , зелёным — область U_2

Положим $H_*(y) = \sigma \circ H$, где H - гомотетия с центром в вершине стола a_0 с коэффициентом $(2 + \sqrt{5})$, а σ — отражение относительно внутренней диагонали четырёхугольника Y_0 .

Определение 8 (Отображение первого возвращения). Рассмотрим некоторое $A \subset \mathbb{R}^2$. *Время первого возвращения* в A — это функция $T_A : A \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, причём если найдётся такое натуральное i , что $f^i(x) \in A$, то $T_A(x) = i$, а в противном случае $T_A(x) = \infty$. Положим $B_A = \{x \in A \mid T_A(x) = \infty\} \subset A$. *Отображение первого возвращения* $R_A f : A \setminus B_A \rightarrow A$ определено формулой $R_A f(x) = f^{T_A(x)}(x)$.

Жёлтые и зелёные треугольники номер 0 на рис. 6 дают в объединении четырёхугольник $H_*^{-1}(Y_0)$. Обозначим $H_*^{-1}(Y_0)$ как Y'_0 .

Утверждение 1. *Перекладывание F и $R_Y F$ (отображение первого возвращения в Y при действии F) в ограничении на Y'_0 сопряжены относительно преобразования H_*^{-1} , то есть*

$$R_Y F|_{Y'_0} = H_*^{-1} \circ F \circ H_*|_{Y'_0}$$

Это нетрудно проверить, непосредственно рассмотрев траектории движения жёлтого и зелёного треугольников номер 0, дающих в объединении четырёхугольник Y'_0 на рис. 6.

Данное соотношение создаёт эффект *самоподобия* динамики отображения F на поле Y_0 .

Утверждение 2. *Пусть b_y - бинарный маршрут точки $y \in Y_0$. Тогда $b_{H_*(y)} = s(b_y)$, где*

$$s : 0 \mapsto 0010100, \quad 1 \mapsto 000$$

Доказательство. Тот факт, что $b_{H_*(y)}$ может быть получен из b_y некоторой подстановкой, понятен из утверждения 1. Также ясно, что эта подстановка должна иметь вид $0 \mapsto \lambda$, $1 \mapsto \delta$, где λ и δ — маршруты до первого возвращения в $H_*(y)$ маленьких жёлтого и зелёного треугольников соответственно. Непосредственное их рассмотрение позволяет убедиться в том, что $\lambda = 0010100$ и $\delta = 000$. \square

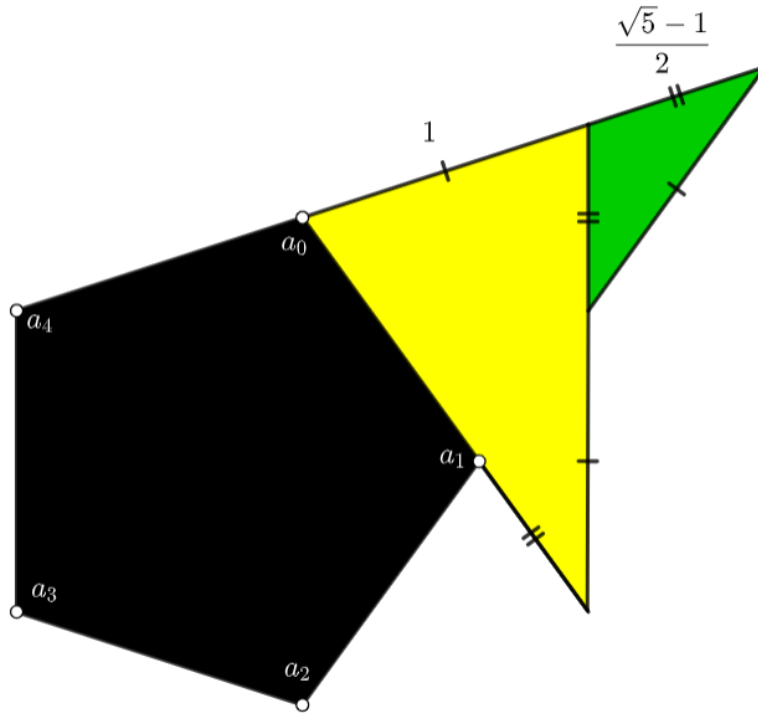


Рис. 5: Поле Y_0

Определение 9. Максимальное по включению множество точек с данным одинаковым периодическим маршрутом называется *периодической компонентой* (или просто *компонентой*).

Определение 10 (Ранг). Пусть для некоторой периодической компоненты X' нашлось такое неотрицательное целое число r , что $H_*^r(X')$ — либо сиреневый десятиугольник, либо один из серых пятиугольников (рис. 6). Тогда r называется *рангом* компоненты X' . Если компоненту X'' можно перевести в X' за некоторое число итераций отображения F , ранг X'' также полагается равным r .

Иногда понятие ранга будет применяться и к непериодическим фигурам. Ранг жёлтого или зелёного треугольника определяется аналогично рангу десяти- или пятиугольника; фигурами нулевого ранга в данном случае считаются $H_*^{-1}(\Lambda_0)$ и $H_*^{-1}(\Delta_4)$.

Лемма 1. Пусть X — некоторая периодическая компонента. Тогда это обязательно выпуклый многоугольник, каждая из сторон которого параллельна некоторой стороне стола и состоит из граничных точек отображения F .

Доказательство. Покажем, что множество X выпукло. Рассмотрим точки $a, b \in X$. На каждой итерации индексы в маршрутах этих точек совпадают. Следовательно, прямолинейный отрезок $[a, b] \subset X$. Значит, по определению, множество X выпукло.

Докажем, что многоугольник X ограничен множеством точек из B_n . Из определения периодической компоненты следует, что на какой-то итерации индексы одинаковых номеров у неграничных точек из X и вне X должны различаться. Это означает, что они попали в разные сектора, т.е. их “разделил” луч из B . Значит, граничные точки многоугольника X принадлежат множеству B_n .

Центральная симметрия переводит прямые в параллельные им, поэтому каждая из сторон X (образованная лучами или отрезками точек из B_n) параллельна некоторой стороне стола. \square

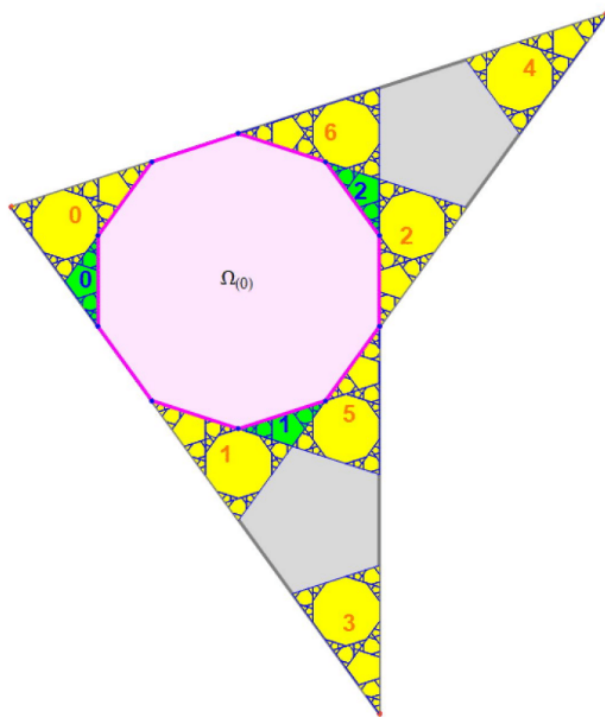


Рис. 6: Динамика отображения F в пределах поля Y_0

Утверждение 3. Любая периодическая точка $x \in Y_0$ лежит в правильном десяти- или пятиугольнике некоторого ранга.

Доказательство. Рассмотрим периодическую точку x . Согласно лемме 1, периодическая компонента, в которой лежит x — это выпуклый многоугольник со сторонами, параллельными сторонам стола. Обозначим его за X . Рассмотрим отображение $H'(X) = H_* \circ F^{\alpha_X}(X)$, где α_X — номер жёлтого или зелёного треугольника наименьшего ранга, в котором содержится X . Если X - десяти- или пятиугольник нулевого ранга, то утверждение верно, и этот случай не рассматривается. Будем применять итерации H' к компоненте X .

Размеры X после каждой такой итерации увеличиваются, а значит, рано или поздно он станет не меньше десятиугольника или пятиугольника нулевого ранга. Предположим, что образ X после применения любого числа k итераций отображения H' не пересекается ни с одной фигурой нулевого ранга. Тогда, очевидно, образ X будет содержать граничные точки, чего быть не может, ведь и сам X граничных точек не содержал. Значит, образ X пересекается с фигурой нулевого ранга, причём даже содержится в ней, ведь иначе из выпуклости X снова следует наличие в его образе граничных точек. При этом он также полностью покрывает эту фигуру. Пусть это не так — тогда в этой фигуре содержатся граничные точки, которыми окружён образ X , чего быть не может. Значит, образ X — действительно фигура нулевого ранга, а сам X , стало быть, — соответствующая фигура k -ого ранга. \square

Определение 11 (Тип маршрута). *Типом* периодического бинарного маршрута называется пара таких целых неотрицательных чисел (u, v) , что u — число нулей в периоде маршрута, а v — число единиц в нём.

Утверждение 4. Пусть бинарный маршрут b_x точки x имеет тип (u, v) . Тогда, если $s(b_x)$ имеет тип (u', v') , выполнено следующее соотношение:

$$\begin{cases} u' = 5u + 3v \\ v' = 2u \end{cases} .$$

Доказательство. Непосредственно следует из определения подстановки s . □

Это соотношение позволяет выражать типы бинарных маршрутов компонент с более высоким рангом в сравнении с теми, типы маршрутов которых уже известны.

Заметим, наконец, что после применения одной итерации перекладывания F сиреневый десятиугольник (рис. 6) переходит в себя с поворотом на 108° , а за две итерации каждый из серых пятиугольников переходит в себя с поворотом на 72° . Это поможет в дальнейшем при изучении периодов других компонент.

Действие индуцированного бильярда вне поля Y_0

Оказывается, внутри сектора V_0 есть другая область, которая является инвариантной для действия индуцированного бильярда на всём оставшемся секторе. Первая часть этого раздела посвящена построению всех компонент данной области. В дальнейшем мы назовём её *полем* Z .

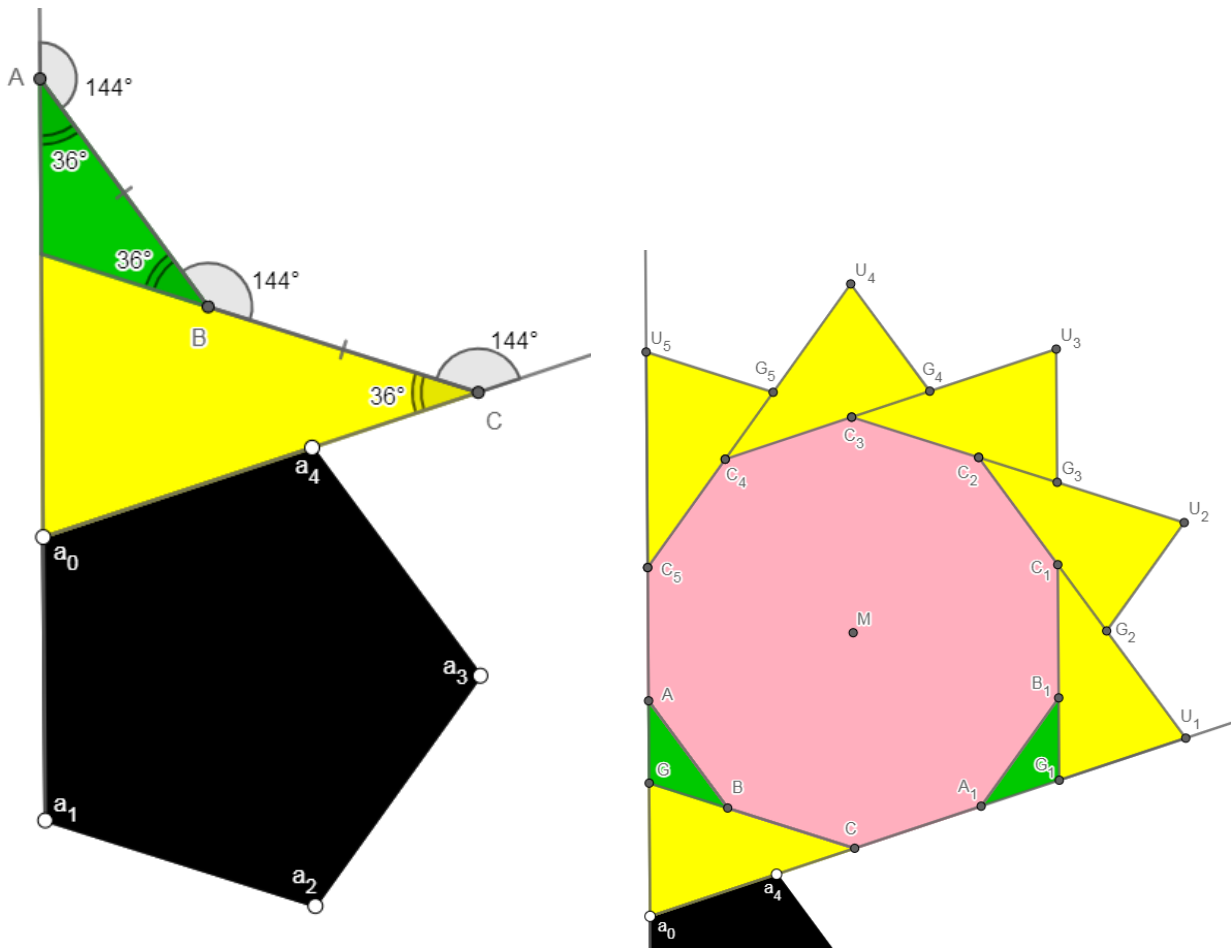


Рис. 7: Первые два этапа построения компонент поля Z

Обратимся к левой части рис. 7. 144° — угол правильного десятиугольника; $|AB| = |BC|$. Значит, можно построить правильный десятиугольник для которого $[AB]$ и $[BC]$ являются сторонами, а ещё две стороны (смежные точкам соответственно A и C) лежат на лучах $[a_1a_0]$ и $[a_0a_4]$ соответственно. Обозначим этот десятиугольник, как $\Omega_{1,1}$.

Рассмотрим поворот $R_M^{108^\circ}$ (M — центр десятиугольника $\Omega_{1,1}$). Для краткости будем в этой части обозначать данный поворот, как r_0 . Пусть $\triangle A_1B_1G_1 = r_0(\triangle ABG)$ и $\triangle G_1U_1C_1 =$

$r_0(\Delta Ga_0C)$. Треугольник $\Delta A_1B_1G_1$ назовём $\Delta_{1,1}^*$, треугольник $\Delta G_1U_1C_1$ назовём $\Lambda_{1,1}^*$. Объединение $\Lambda_{1,1}^*$ и $\Delta_{1,1}^*$ назовём Y_1^* . Далее для каждого $2 \leq i \leq 5$ построим $\Lambda_{1,i}^*$, как $r^{i-1}(\Lambda_{1,1}^*)$, где $r \equiv R_M^{36^\circ}$, который совпадает с $F|_{U_1}$, что освещалось в конце первого раздела. Результат можно видеть на правой части рис. 7.

Отметим, что из самого метода построения треугольников $\Lambda_{1,i}^*$ ясно, что при $1 \leq i \leq 4$ индуцированный внешний бильярд переводит $\Lambda_{1,i}^*$ в $\Lambda_{1,i+1}^*$.

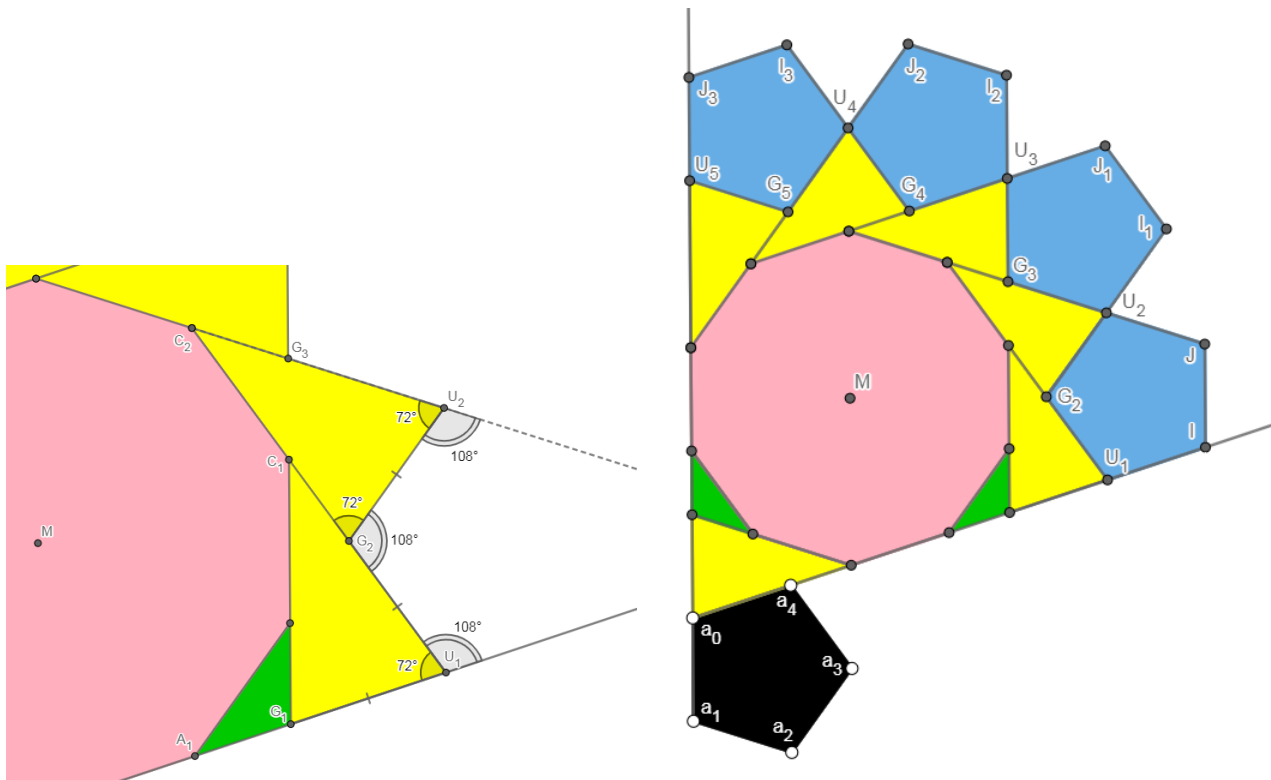


Рис. 8: Второй этап построения компонент поля Z

Посмотрим на левую часть рис. 8. $|U_1G_2| = |G_1U_1|$, поскольку треугольники $\Delta U_1A_1G_2$ и $\Delta G_1C_1U_1$ равны, поскольку равны их прообразы относительно поворота r_0 , переводящиеся один в другой движением $F|_{\Lambda_0}$. Также $|G_1U_1| = |G_2U_2|$, т.к. они переводятся друг в друга поворотом r . Значит, $|U_1G_2| = |G_2U_2|$. При этом угол $\widehat{U_1G_2U_2}$ равен 108° , то есть углу правильного пятиугольника. То же можно сказать про углы между лучами $[U_2G_2)$, $[G_3U_2)$ и $[G_2U_1)$, $[G_1U_1)$. Значит, можно построить правильный пятиугольник, три из вершин которого — это как раз U_1 , G_2 и U_2 , а две стороны, смежные соответственно с U_2 и U_1 лежат на прямых (G_1U_1) и (G_3U_2) соответственно. Назовём этот пятиугольник $\Pi_{1,1}$.

Пятиугольники $\Pi_{1,i}$ (по всем $2 \leq i \leq 4$) строятся, как $r^{i-1}(\Pi_{1,1})$. Как и в случае с $\Lambda_{1,i}^*$, метод построения пятиугольников позволяет отметить, что при $1 \leq i \leq 3$ индуцированный внешний бильярд переводит $\Pi_{1,i}$ в $\Pi_{1,i+1}$.

Нетрудно показать, что при действии перекладывания F десятиугольник $\Omega_{1,1}$ переходит сам в себя с поворотом на 36° относительно своего центра, а за четыре итерации отображения $\Pi_{1,1}$ переходит в себя с поворотом на 72° относительно своего центра.

Перейдём, наконец, к последнему этапу построения. Построим треугольники $\Lambda_{1,1}$ и $\Lambda_{1,5}$ на сторонах $[U_2J]$ и $[JI]$ пятиугольника $\Pi_{1,1}$, продлив соседние к ним стороны до пересечения. Ясно, что оба построенных треугольника равны Λ_0 по основанию и двум прилежащим углам. Треугольники $\Lambda_{1,2}, \Lambda_{1,3}, \Lambda_{1,4}$ построим одним, двумя и тремя соответственно применениями поворота r к $\Lambda_{1,1}$, треугольники $\Lambda_{1,6}, \Lambda_{1,7}$ — одним и двумя соответственно

применениями поворота r к $\Lambda_{1,5}$. Треугольник ΔRJS , в дальнейшем называемый $\Delta_{1,1}$, построим, отложив на сторонах угла $\angle PJO$ отрезки, равные боковым сторонам треугольника Δ_0 . Ясно, что $\Delta_{1,1} = \Delta_0$ по двум сторонам и углу между ними. Треугольники $\Delta_{1,2}$ и $\Delta_{1,3}$ построим, как $r(\Delta_{1,1})$ и $r^2(\Delta_{1,1})$ соответственно. Объединение $\Lambda_{1,1}$ и $\Delta_{1,1}$ назовём Y_1 .

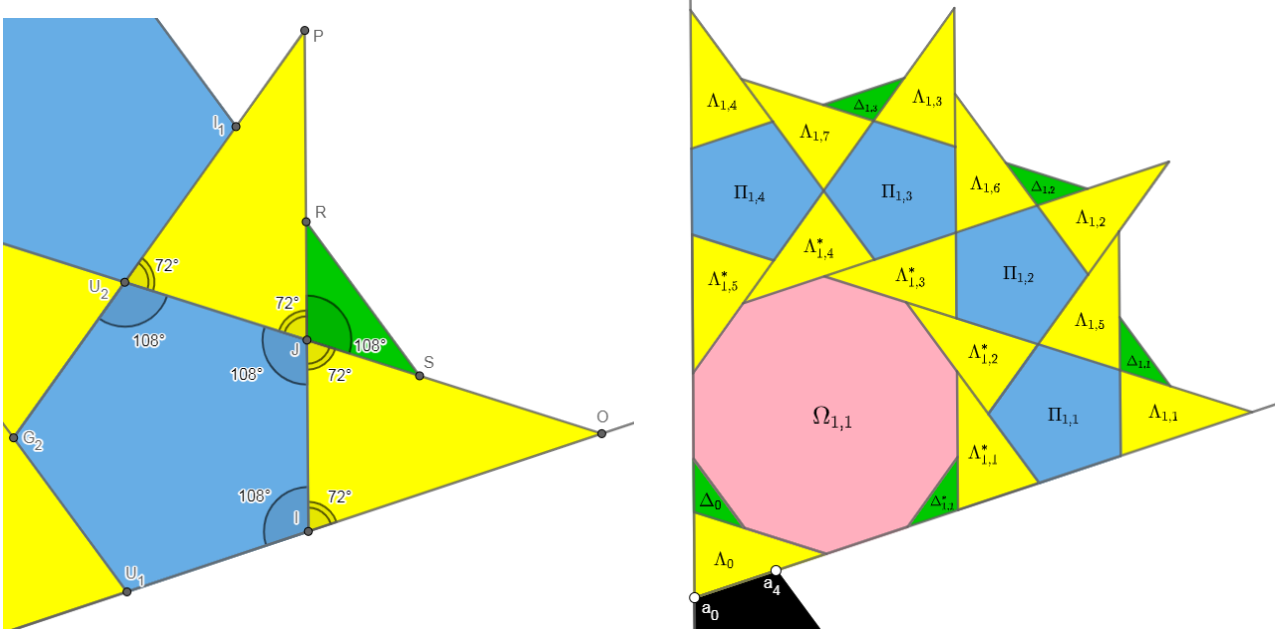


Рис. 9: Последний этап в построении компонент поля Z и всё поле Z после построения

Поле Z теперь будем называть объединение $\Omega_{1,1}$, $\bigcup_{1 \leq i \leq 5} \Lambda_{1,i}^*$, $\Delta_{1,1}^*$, $\bigcup_{1 \leq i \leq 4} \Pi_{1,i}$, $\bigcup_{1 \leq i \leq 7} \Lambda_{1,i}$ и $\bigcup_{1 \leq i \leq 3} \Delta_{1,i}$. Для завершения описания отображения F на поле Z докажем две леммы.

Лемма 2. Пусть $R_{Y_1^*}F$ — отображение первого возвращения в Y_1^* при действии отображения F . Тогда на области Y_1^* верно

$$R_{Y_1^*}F = r_0 \circ F \circ r_0^{-1},$$

где r_0 — поворот на 108° вокруг центра десятиугольника $\Omega_{1,1}$.

Доказательство. Как было получено ранее, при $1 \leq i \leq 4$ верно, что $F(\Lambda_{1,i}^*) = \Lambda_{1,i+1}^*$. Заметим, что $\Lambda_{1,5}^* \subset U_2$, а значит $F(\Lambda_{1,5}^*)$ является образом при повороте этого треугольника на 36° относительно точки пересечения биссектрис углов $\angle U_5C_5G_5$ и $\angle G_2A_1U_1$ в обозначениях рис. 7. Но этот образ в точности совпадает с $\Delta G_2A_1U_1$ (в обозначениях того же рисунка), который в свою очередь является образом $\Delta a_0Aa_4 = F(\Lambda_0)$ при действии поворота r_0 . Поскольку $\Delta G_2A_1U_1 \subset Y_1^*$, он является образом первого возвращения $\Lambda_{1,1}^*$ в Y_1^* . Т.о., $R_{Y_1^*}F(\Lambda_{1,1}^*) = r_0(F(\Lambda_0)) = r_0(F(r_0^{-1}(\Lambda_{1,1}^*)))$.

Треугольник же $\Delta_{1,1}^*$ возвращается в Y_1^* первым же применением F : его образ — это $\Delta B_1C_1G_1$ в обозначениях рис. 7, который по построению есть $r_0(\Delta CBa_4) = r_0(F(\Delta_0)) = r(F(r_0^{-1}(\Delta_{1,1}^*)))$.

Т.о., на всём Y_1^* заявленное соотношение выполнено. \square

Лемма 3. Пусть $R_{Y_1}F$ — отображение первого возвращения в Y_1 при действии отображения F . Тогда на области Y_1 верно

$$R_{Y_1}F = h \circ F \circ h^{-1},$$

где h — параллельный перенос на вектор $(3 + \sqrt{5}) \cdot \overrightarrow{a_0a_1}$ (a_0, a_1 — вершины стола, см. рис. 2).

Доказательство. Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2, поэтому будет приведён лишь его план.

Сначала по построению $\Lambda_{1,4}$ и $\Lambda_{1,5}$ будет доказано, что $F(\Lambda_{1,4}) = \Lambda_{1,5}$. Затем аналогичным образом будет доказано, что $F(\Lambda_{1,7}) = \Delta IRS'$, где $S' = [RS] \cap (IO)$ в обозначениях рис. 9. Треугольник же $\Delta IRS'$, как нетрудно убедиться, является образом $F(\Lambda_0)$ при действии параллельного переноса h , то есть $F(\Lambda_{1,7}) = h(F(\Lambda_0)) = h(F(h^{-1}(\Lambda_{1,1})))$. Наконец будет доказано, что $F(\Delta_{1,3}) = \Delta SS'O$, который равен $h(F(\Delta_0))$, который равен $h(F(h^{-1}(\Delta_{1,1})))$. \square

Множество видов многоугольников, встречающихся в Z , обозначим за $S_\Phi = \{\Omega_1, \Pi_1, \Lambda_1, \Delta_1, \Lambda_1^*, \Delta_1^*\}$ (правая часть рис. 9). Говоря о некотором произвольном виде многоугольников из S_Φ , будем обозначать его как Φ (то есть, Φ — элемент из S_Φ). Множество всех содержащихся в Z многоугольников данного вида Φ будем обозначать $Z_{1,\Phi}$.

Из лемм 2 и 3 нетрудно увидеть структуру множества граничных точек перекладывания F на множестве Z . Она показана на рис. 10.

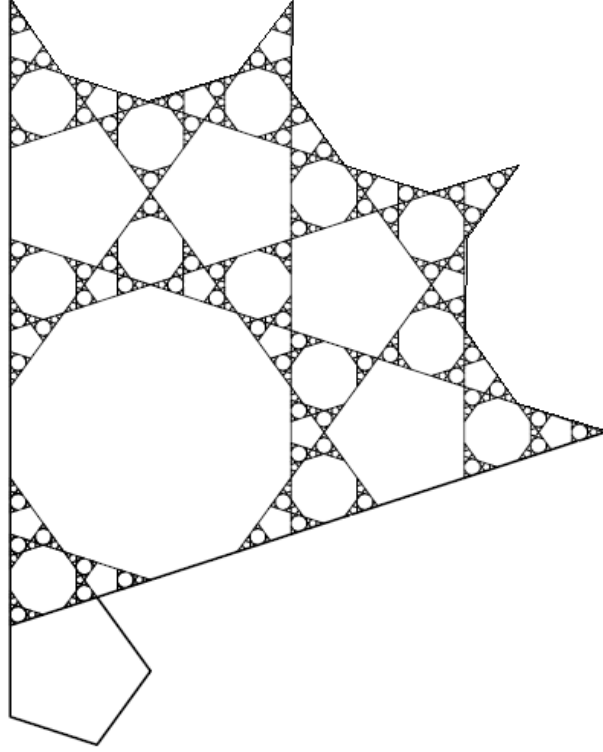


Рис. 10: Множество $B_\infty \cap Z$

Пользуясь исследованием действия отображения F на поле Z , попробуем сделать выводы о динамике этого отображения на остальной части сектора V_0 .

Пусть h — параллельный перенос на вектор $(3 + \sqrt{5}) \cdot \overrightarrow{a_0 a_4}$, v — параллельный перенос на вектор $2(1 + \sqrt{5}) \cdot \overrightarrow{a_2 a_1}$, r — поворот, совпадающий с $F^{-1}|_{U_2}$, где $F^{-1}|_{U_2}$ — обратное отображение к индуцированного внешнему бильярду, ограниченному на U_2 (см. всё на рис. 11).

Лемма 4. Построим семейство геометрических фигур $\{Z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ по следующим правилам: множество Z_1 положим совпадающим с полем Z , а для всякого натурального i определим Z_{i+1} , как объединение $h(Z'_i) \cup v(h(Z'_i)) \cup r(h(Z'_i))$, где $Z'_i = Z_i \cap U_1$.

Тогда утверждается, что $V_0 = Z_1 \sqcup Z_2 \sqcup Z_3 \sqcup \dots$, то есть V_0 представляется в виде объединения Z_i , причём никакие из этих множеств не пересекаются.

Доказательство. Докажем сначала, что $U_1 = Z'_1 \sqcup Z'_2 \sqcup Z'_3 \sqcup \dots$. Поскольку $r^{-1}(U_2) \subset U_1$ и $U_2 \cap U_1 = \emptyset$, то из утверждения выше следует, что $r^{-1}(U_2) = (Z'_1 \cap r^{-1}(U_2)) \sqcup (Z'_2 \cap r^{-1}(U_2)) \sqcup \dots = (Z'_1 \cap r^{-1}(U_2)) \sqcup h(Z'_1) \sqcup h(Z'_2) \dots$, что эквивалентно следующему: $U_2 = (r(Z'_1) \cap U_2) \sqcup r(h(Z'_1)) \sqcup r(h(Z'_2)) \dots$

Пусть K_i — область внутри U_1 , ограниченная прямой с направляющим вектором v и проходящая через точку $A_1 + i \cdot h$ (точка присутствует на правой части рис. 7). Очевидно, что $U_1 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$, а значит доказываемое утверждение следует из того, что для всякого натурального i верно $K_i \subset \bigsqcup_{j=1}^i Z'_j$. Докажем это индукцией по i .

Для $i = 1$ утверждение верно, т.к. $K_1 \subset \Omega_{1,1} \subset Z'_1$.

Пусть утверждение верно для некоторого i . Покажем, что оно верно и для $i + 1$. Заметим, что $K_{i+1} = K_i \cup h(K_i) \cup v(h(K_i))$. При этом $K_i \subset \bigcup_{j=1}^i Z'_j$. Также $h(K_i) \subset h(\bigcup_{j=1}^i Z'_j) = \bigcup_{j=1}^i h(Z'_j) \subset \bigcup_{j=2}^{i+1} Z'_j$, а $v(h(K_i)) \subset v(h(\bigcup_{j=1}^i Z'_j)) = \bigcup_{j=1}^i v(h(Z'_j)) \subset \bigcup_{j=2}^{i+1} Z'_j$. Т.о., действительно, $K_i \subset \bigcup_{j=1}^i Z'_j$.

Теперь покажем, что $\forall i \neq j \quad Z'_i \cap Z'_j = \emptyset$. Докажем это в следующей форме по индукции: $\forall i \in \mathbb{N} \quad Z'_i \cap \bigcup_{j=1}^{i-1} Z'_j = \emptyset$. Для $i = 1$ утверждение очевидно. Для Z'_{i+1} достаточно показать, что оно не пересекается с Z'_i . Разобьём Z'_{i+1} на две части, лежащие соответственно в областях P и Q (см. их определение в тексте перед рис. 12). Поскольку $Z'_{i+1} \cap P = h(Z'_i)$, которое не пересекается с $h(Z'_{i-1}) = Z'_i \cap P$ по предположению индукции, остаётся показать, что не пересекаются части множеств, лежащие в Q . Но легко показать, что для всякого натурального i множество $Z'_i \cap Q$ представляет собой $(v \circ h)^i(Z'_1 \cap Q)$, и ни одно такое множество не пересекает предыдущее. \square

Для каждого типа фигур Φ введём обозначение $Z_{k,\Phi}$. Положим по определению $Z_{1,\Phi}$ равным множеству всех фигур типа Φ внутри поля Z , а $Z_{k+1,\Phi}$ определим, как

$$\{h(\phi), v(h(\phi)), r(h(\phi)) \mid \phi \in Z_{k,\Phi}\}.$$

Некоторый элемент такого множества обычно будем обозначать, как ϕ .

Отдельно отметим, что Y_k определяется, как $\Lambda_{k,1} \cup \Delta_{k,1}$ (здесь $\Lambda_{k,1} \stackrel{\text{def}}{=} h(\Lambda_{k-1,1})$; $\Delta_{k,1}$ определяется аналогично), а Y_k^* — как $\Lambda_{k,1}^* \cup \Delta_{k,1}^*$ (их определения аналогичны таковым для $\Lambda_{k,1}$ и $\Delta_{k,1}$).

Следующая теорема раскрывает структуру множества всех периодических точек на области действия индуцированного внешнего бильярда.

Теорема 1. Пусть $k \in \mathbb{N}$, а тип фигур Φ не является треугольником. Тогда элементы множества $Z_{k,\Phi}$ можно так занумеровать числами от 1 до $|Z_{k,\Phi}|$, что $F(\phi_{k,i}) = \phi_{k,i+1}$ для всякого $i < |Z_{k,\Phi}|$, тогда как $F(\phi_{k,|Z_{k,\Phi}|}) = \phi_{k,1}$.

Если же Φ — некоторый треугольник, то элементы множества $Z_{k,\Phi}$ можно так занумеровать числами от 1 до $|Z_{k,\Phi}|$, что $F(\phi_{k,i}) = \phi_{k,i+1}$ для всякого $i < |Z_{k,\Phi}|$, тогда как $F(\phi_{k,|Z_{k,\Phi}|}) \subset Y_k$, причём

$$R_{Y_k} F = h^k \circ F \circ h^{-k},$$

где $R_{Y_k} F$ — отображение первого возвращения в множество Y_k при действии отображения F . В случае, если речь о нечётном множестве треугольников, требуемое соотношение принимает следующий вид:

$$R_{Y_k^*} F = (h^{k-1} \circ r_0) \circ F \circ (r_0^{-1} \circ h^{-(k-1)}),$$

где r_0 — поворот на 72° относительно центра $\Omega_{1,1}$.

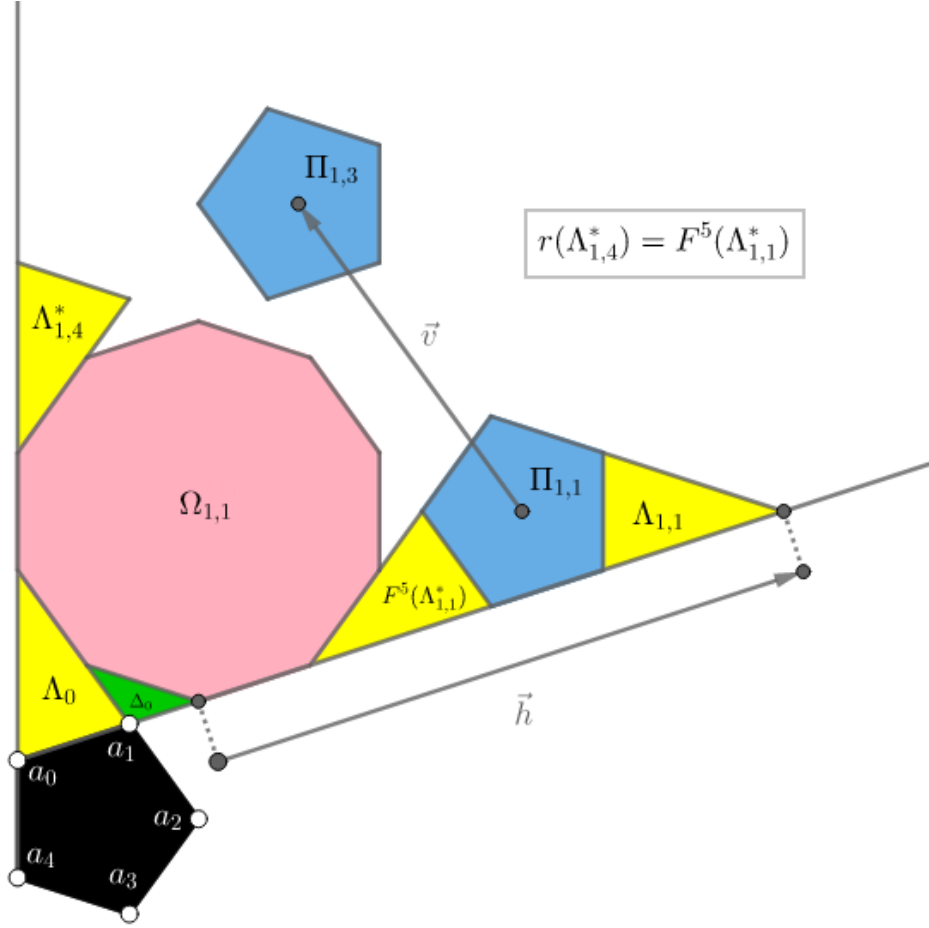


Рис. 11: Полезные движения (на рисунке вместо r должно быть r^{-1})

Доказательство. Докажем сначала следующую лемму:

Лемма 5. Пусть $R_U F$ - отображение первого возвращения в $U = U_1 \setminus Y_0$ при действии перекладывания F в ограничении на U , $R_{h(U)} F$ - аналогичное отображение для $h(U)$. Тогда

$$R_{h(U)} F|_{h(U)} = h \circ R_U F \circ h^{-1}|_{h(U)}$$

Доказательство. Сводится к непосредственному рассмотрению траекторий красной и зелёной частей области $h(U)$ (см. рис. 24). \square

В лемме 5 показано, что происходит с отображением первого возвращения при сдвиге области U_1 на h (рис. 11). Аналогичные рассуждения можно провести при рассмотрении сдвига на h и на v и сдвига на h и поворота на r (рис. 11). Это позволяет нам сказать, что при применении этих преобразований к Z'_1 периодические точки переходят в периодические, а граничные — в граничные.

Рассмотрим первый случай теоремы, когда тип фигур Φ не является треугольником.

Легко убедиться, что многоугольники из $Z_{1,\Phi}$, $\Phi \in \{\Omega_1, \Pi_1\}$ являются периодическими компонентами. Следовательно, по Лемме 5, каждый многоугольник из $Z_{k,\Phi}$, $\Phi \in \{\Omega_1, \Pi_1\}$, $k > 1, k \in \mathbb{N}$ также является периодической компонентой.

Докажем, что множество всех периодических компонент одного вида в Z_k составляет единую периодическую орбиту. Заметим, что, если данное утверждение верно, то существует заявленная в формулировке теоремы 1 нумерация (к ней вернемся позже).

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 6. Пусть $Z'_{k-1} = Z_{k-1} \cap U_1$. Тогда любая компонента из Z'_k , $v(Z'_k)$ или $r(Z'_k)$ переходит в аналогичную компоненту в одном из этих трёх множеств (как всегда, для одного из треугольников каждого типа в Z_k под переходом понимается возвращение в Y_k или Y_k^*).

Доказательство. По определению $F(r(Z'_k)) = Z'_k$. Однако полного соответствия компонент в таком случае не будет. Чтобы с ними всё было правильно, нужно в множествах треугольников $r(Z'_k)$ применить обратное переключивание к $r(Y_k)$ и $r(Y_k^*)$, чтобы r действительно было обратным действием к бильярду. Нетрудно также показать, что $F(v(Z'_k)) \equiv r(Z'_k)$. При отображении F все компоненты, которые лежат в Z'_k переходят в множество U_2 за исключением “полоски” (обозначена красным в левой верхней части рис. 23) также лежат и в $v(Z'_k)$. Значит, необходимо рассмотреть только эту “полоску”.

Рассмотрим множество $Z'_k \setminus v(Z'_k)$. Оно будет полностью лежать в “полоске”. А вся эта область переходит в “диагональную полоску” (она обозначена красным уже на правой верхней части того же рис. 23). Вся эта диагональ всегда так или иначе попадает в $v(Z'_k)$.

Заметим, что имеет место равенство $v \circ h \circ F|_{U_1} = F|_{U_1} \circ h$. То есть, не важно, сначала мы перешли от Z'_{k-1} к Z'_k , а потом применили бильярд, или же сначала применили бильярд, а потом уже сдвинулись по диагонали в $v(Z'_k)$. Второй случай — это как раз рассматриваемая ситуация, когда мы применяем бильярд к $Z'_k \setminus v(Z'_k)$. А в первом случае применим соображения индукции: мы применяем бильярд сначала, то есть ещё к Z'_{k-1} , для которого мы уже знаем, куда перейдут компоненты. Далее мы применяем диагональный сдвиг (композицию h и v), который переносит образ в $v(Z'_k)$. Перенос сохраняет корректность компонент. Значит, наша последняя область — $Z'_k \setminus v(Z'_k)$ — также ведёт себя понятным образом. \square

В частности, из леммы 6 следует, что элементы одной периодической орбиты могут принадлежать только одному множеству $Z_{k,\Phi}$.

Докажем теперь, что каждая периодическая компонента из Z_k проходит все множество компонент своего вида в Z_k .

Рассмотрим множество компонент одного вида в Z_n . Все компоненты в Z_n занумерованы от 0 до $k-1$. Периодическую компоненту X индуцированный бильярд переводит в компоненту $F(X)$ с номерами $\text{num}(X)$ и $\text{num}(F(X))$ соответственно.

$$\text{Step} = (\text{num}(F(X)) - \text{num}(X)) \bmod k.$$

Заметим, что если $\text{НОД}(\text{step}, k) = 1$, то требуемое утверждение верно (перед тем, как вернуться в себя, компонента окажется в каждой компоненте своего вида в Z_n).

$$R = V_0 \setminus Y_0. \text{ Пусть } Q = R \setminus U_2 \setminus F(U_2), \text{ а } P = R \setminus Q \text{ (рис. 12).}$$

Пусть m — количество компонент Z_n в области Q , а L — в области U_2 или $R(U_2)$ (понятно, что в этих областях количество компонент из Z_n одинаково). Понятно также, что $k = 2L + m$.

$$N(U_2) - \text{количество компонент в пересечении } Z_n \text{ и } U_2.$$

Для доказательства взаимной простоты step и k нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 7. $\text{Step} = N(U_2) \bmod k$

Доказательство. Занумеруем периодические компоненты в каждом множестве одного вида в Z так, как показано на рисунке 13.

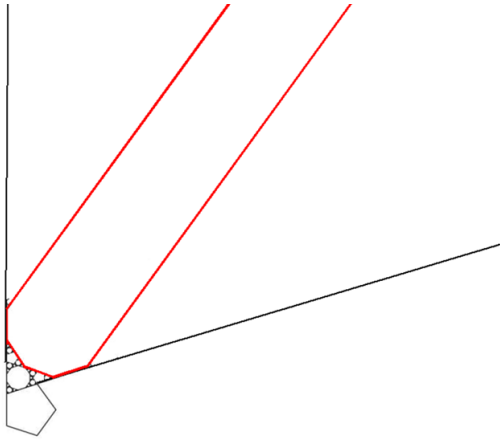


Рис. 12: Область Q выделена красным контуром

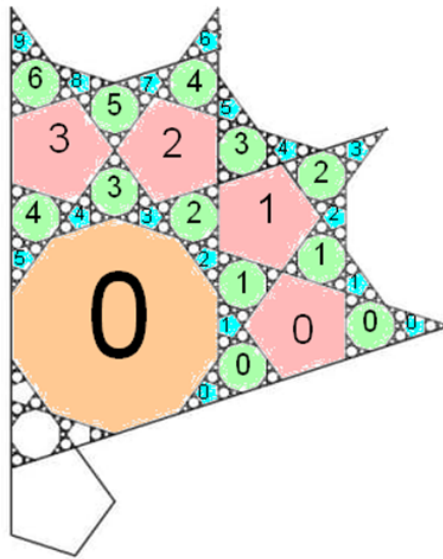


Рис. 13: Нумерация на Z

Покажем, как при помощи индукции ввести нумерацию¹ на Z_n .

Для начала введем ее на подсекторе U_1 .

База ($n = 1$) — Z .

Допустим, что в Z_{n-1} было p компонент с номерами от 0 до $p - 1$. Например, на рис.

13 Z_{n-1} выделено бледно-оранжевым, а построенное из него $h(Z_{n-1})$ — оранжевым.

Как мы уже знаем из леммы 4, $Z_n = h(Z_{n-1}) \cup (v^{n-1} \circ h^{n-1})(Z \cap Q)$. На рис. **13** $(v^{n-1} \circ h^{n-1})(Z \cap Q)$ выделено зеленым.

Нумерация на $h(Z_{n-1})$ остается такой же, как и на (Z_{n-1}) .

Построим нумерацию на $(v^{n-1} \circ h^{n-1})(Z \cap Q)$ из $(v^{n-2} \circ h^{n-1})(Z \cap Q)$ (на рис. **13** выделено синим) следующим образом: компоненте из U_1 присвоим номер $i + m$, если она получается путем переноса v из компоненты $X \in U_1$ с номером i (рис. **13**). Здесь m — количество компонент одного множества из $Z \cap Q$.

$$Num(v(X)) = num(X) + m,$$

где $v(X), X \in U_1$.

¹Нумерация, о которой идет речь в Лемме 7, является вспомогательной и не совпадает с нумерацией из утверждения Теоремы 1.

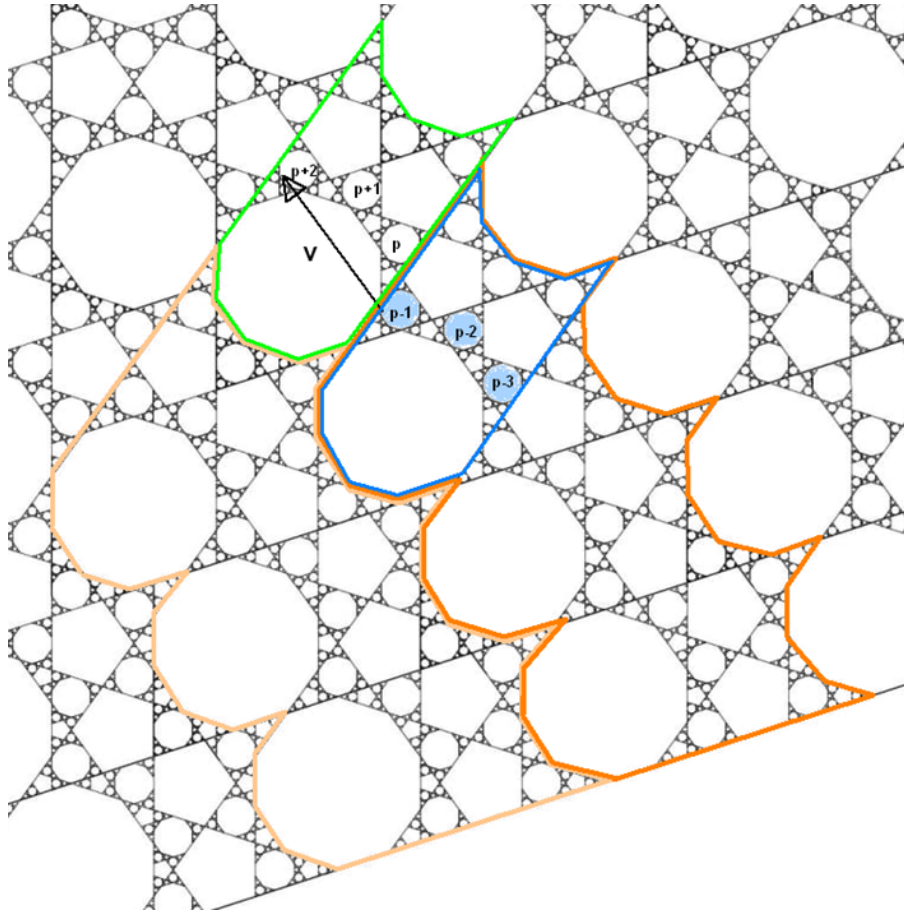


Рис. 14: Пример построения нумерации

Нумерация в U_2 вводится по следующему правилу:

$$Num(X) = num(F(X)) + (L + m),$$

где $X \subset U_2$ (рисунок 15).

Теперь перейдем к непосредственному доказательству леммы.

Существует 2 случая.

1. $X \in U_1$. Заметим, что при действии индуцированного бильярда (т.е. при повороте относительно центра большого 10-угольника из Z) (рис. 16) для любого зеленого сектора его пересечение с U_1 переходит в точности в следующий сектор. Иными словами, если любой зеленый сектор из U_1 обозначить за W_i ($i \in [1; 5]$), то:

$$F(W_i \cap U_1) = W_{i+1}, i \in [1; 5].$$

Если ввести нумерацию указанной выше процедурой отдельно для каждого зеленого сектора W_i , то компонента из U_1 перейдет в компоненту с таким же номером. Это означает, что она «перешагнула» столько компонент, сколько содержится в ее множестве в одном зеленом секторе. Но зеленые секторы есть образы при повороте U_1 относительно центра большого 10-угольника из Z . Значит, $step = N(U_1) = N(U_2) = N(U_2) \pmod k$.

2. $X \in U_2$. U_2 переходит в область, обведенную на рисунке 19 зеленым, причем каждая компонента с номером i переходит в компоненту с номером $i - (L + m)$, $(L + m)$ по модулю $k = 2L + m$ сравнимо с $L = N(U_2)$. Т.е. $step = N(U_2) \pmod k$. \square

Перейдем теперь к непосредственному доказательству взаимной простоты $step$ и k .

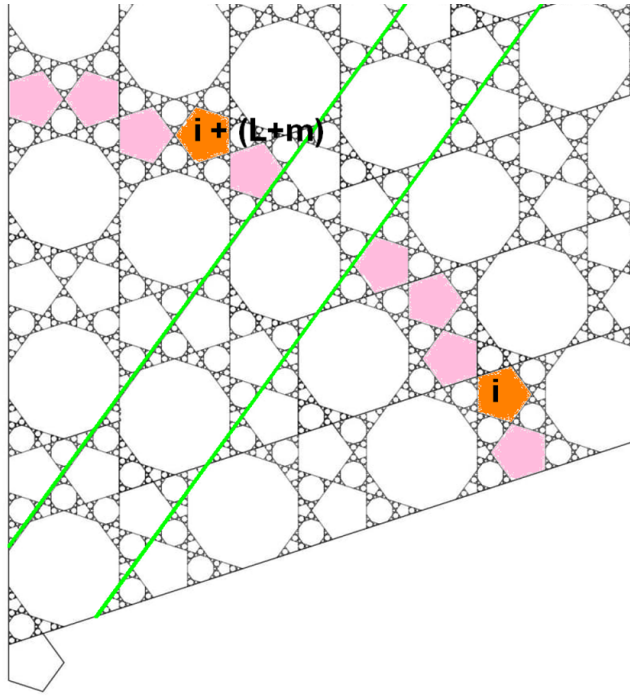


Рис. 15: Получение нумерации на U_2

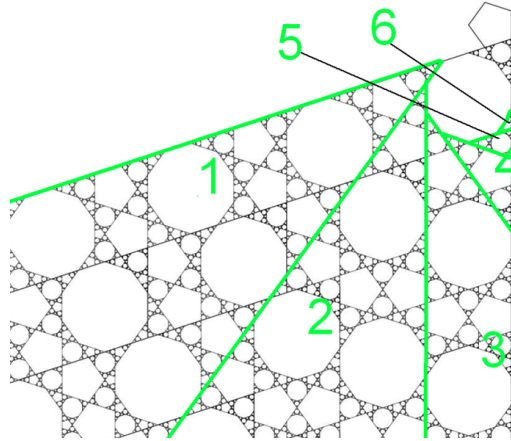


Рис. 16: Последовательность секторов при применении F

Лемма 8. $\text{НОД}(\text{step}, k) = 1$

Доказательство. Из предыдущей леммы ясно, что мы проверяем на взаимную простоту числа L и $2L + m$, что сводится к проверке значений $\text{НОД}(m; L)$.

Возьмем Z_n в пересечении с $V_0 \setminus U_2$. Рассмотрим на нем множество определенного вида. Количество компонент в нем равно $|A_i| \cup |B_i|$, где $|A_i|$ – количество компонент, которые содержит образ $Z \cap U_1$ при применении к нему n раз переноса h и i раз переноса v , $|B_i|$ – аналогично для образов от $Z \cap Q$. A_z и B_z – множества A_i и B_i на поле Z .

То, что $v(B_0), v^2(B_0), \dots, v^{n-1}(B_0)$ покрывают все Z_n на U_1 , следует из Леммы 5. (получая Z_n на U_1 переносами от $Z \cap U_1$, мы, в частности, параллельно переносим B_z), а также из того факта, что B_i и $v(B_i)$ пересекаются ровно по “внешнему контуру” граничных отрезков: при действии v левый внешний контур фигуры B_i переходит в правый внешний контур B_i .

Отсюда также понятно, что B_i покрывают Z_n на U_1 без внутренних пересечений.

Поскольку мы можем вычесть m из L n раз (Z_n), то $\text{НОД}(m, L) = \text{НОД}(m, L - nm)$.

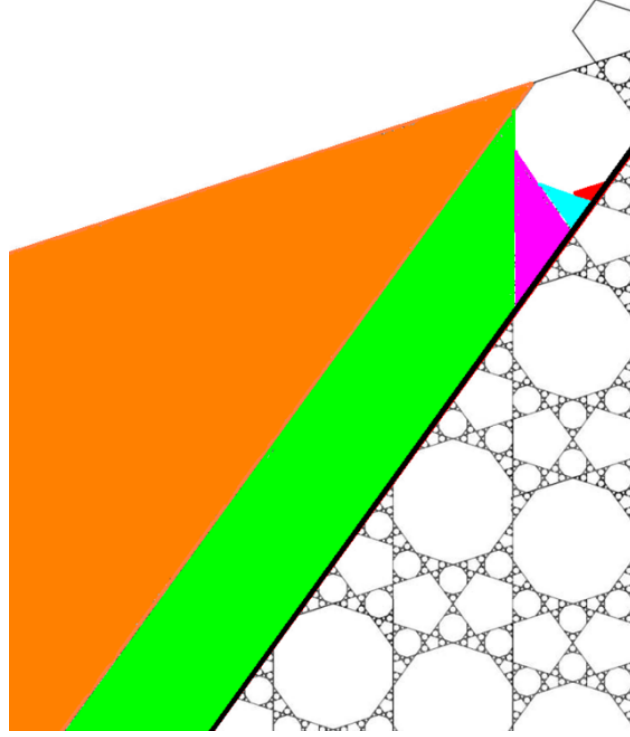


Рис. 17: сектора W_i в пересечении с U_1

Докажем, что $\text{НОД}(m, L - nm) = \text{НОД}(|B_0|; |A_0 \setminus B_0|)$.

$m = |B_0|$ по определению.

$L - nm = |A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}| - n(|B_i|)$.

Знание о том, по каким множествам проходят пересечения с B_i (а именно: B_i пересекаются с A_{i+1} только по $A_{i+1} \setminus B_{i+1}$) даёт возможность составить следующее тождество:

$$L - nm = |A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}| - \sum_{i=0}^{n-1} |B_i| = \sum_{i=0}^{n-1} |A_i| - \sum_{i=0}^{n-2} |A_i \cap A_{i+1}| - \sum_{i=0}^{n-1} |B_i| = |A_0| - |B_0| = |A_0 \setminus B_0|.$$

Из сказанного выше получаем: $\text{НОД}(m, L) = \text{НОД}(m, L - nm) = \text{НОД}(|B_0|; |A_0 \setminus B_0|) = \text{НОД}(|B_z|; |A_z \setminus B_z|)$. \square

Т.е. достаточно посмотреть на $\text{НОД}(|B_z|; |A_z \setminus B_z|)$, который равен 1 для всех видов компонент.

Докажем теперь часть теоремы о возвращении треугольников в свой Y_k , то есть

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} R_{Y_k} F|_{Y_k} = h^k \circ F \circ h^{-k}|_{Y_k} \\ R_{Y_k^*} F|_{Y_k^*} = (h^{k-1} \circ r_0) \circ F \circ (r_0^{-1} \circ h^{-(k-1)})|_{Y_k^*} \end{cases}$$

Проведём доказательство по индукции. Для $k = 1$ утверждение доказано в рамках лемм 2 и 3. Пусть теперь для некоторого k утверждение верно. Будем рассматривать только случай чётного ожерелья (для нечётного доказательство аналогично). Итак,

$$\begin{aligned} R_{Y_k} F|_{Y_k} &= h^k \circ F \circ h^{-k}|_{Y_k} \\ \iff h \circ R_{Y_k} F|_{Y_k} \circ h^{-1}|_{Y_{k+1}} &= h^{k+1} \circ F \circ h^{-(k+1)}|_{Y_{k+1}}. \end{aligned}$$

Покажем, что левая часть есть ни что иное, как $R_{Y_{k+1}} F|_{Y_{k+1}}$. **В разработке**

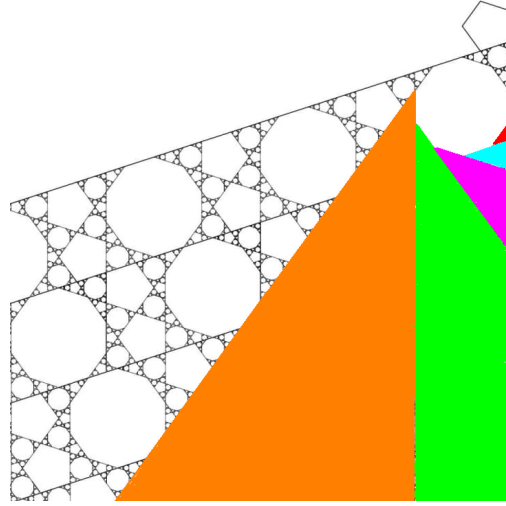


Рис. 18: $F(W_i)$ для $W_i \subset U_1$

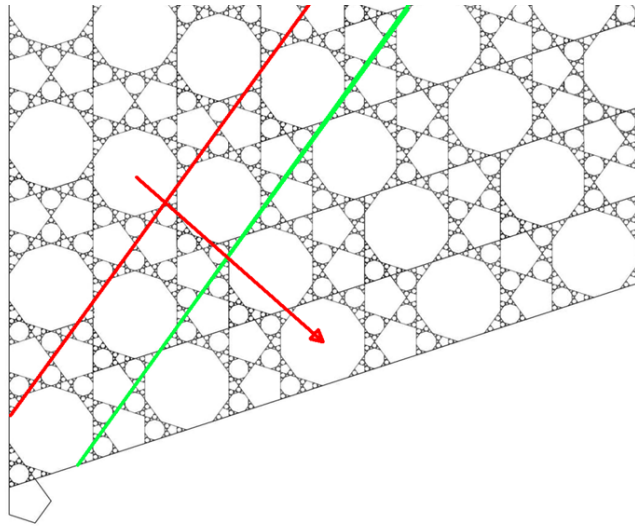


Рис. 19: U_2 и $F(U_2)$

Вернемся теперь к утверждению первого случая теоремы. Нам было необходимо занумеровать элементы множества $Z_{k,\Phi}$ числами от 1 до $|Z_{k,\Phi}|$ так, что $F(\phi_{k,i}) = \phi_{k,i+1}$ для всякого $i < |Z_{k,\Phi}|$, тогда как $F(\phi_{|Z_{k,\Phi}|}) = \phi_{k,1}$. Элементам $\Omega_{k,1}$ и $\Pi_{k,1}$ присвоим номера 1, а далее будем нумеровать компоненты из соответствующих $Z_{k,\Phi}$ в том порядке, в каком их проходят $\Omega_{k,1}$ и $\Pi_{k,1}$ при последовательных итерациях индуцированного бильярда.

Таким образом, теорема полностью доказана. \square

Позднее мы увидим, что множество видов периодических компонент (на $\Lambda_{1,1-7}$; $\Delta_{1,1-3}$; $\Lambda_{1,1-5}^*$; $\Delta_{1,1}^*$) речь идет о компонентах 1-го ранга) на Z (будем обозначать его как S_K) ограничивается пятиугольниками и десятиугольниками двух размеров (рис. 13) (чтобы различать эти размеры, будем называть их большими и маленькими). Примем следующие обозначения для этих видов: $S_K = \{\text{б.д.}, \text{м.д.}, \text{б.п.}, \text{м.п.}, \text{м.д.}^*, \text{м.п.}^*\}$. Множество фигур определенного вида из S_K будем обозначать за K . Теперь мы можем дать определения множествам Z_k и $Z_{k,K}$. Множество Z_k за его геометрические и динамические свойства будем называть *ожерельем*, или *большим ожерельем*.

Определение 12. Малым ожерельем будем называть единую периодическую орбиту компонент одного вида $Z_{k,K}$, геометрически упорядоченную на плоскости таким образом, что

$$Z_{k,K} = h(Z'_{k-1,K}) \cup (v \circ h)(Z'_{k-1,K}) \cup (r \circ h)(Z'_{k-1,K})$$

Теорема 1 показывает, что поле V_0 образовано чередующимися множествами, содержащими периодические орбиты, напоминающими по внешнему виду ожерелья. Ожерелье Z_k за вычетом аperiodических и граничных точек есть минимальное объединение всех единичных периодических орбит компонент из K (расположенных в Z_k в том же порядке, что и в Z), чередующееся на V_0 .

Далее ожерельем для краткости могут называться как $Z_{k,K}$, так и Z_k . Какие из множеств имеются ввиду в каждом случае, будет уточняться в контексте.

Следует отметить, что, называя множества жёлтых и зелёных треугольников ожерельями, мы допускаем некоторую неточность, поскольку сами треугольники не являются периодическими компонентами. Однако для удобства и в таких случаях терминология будет сохраняться.

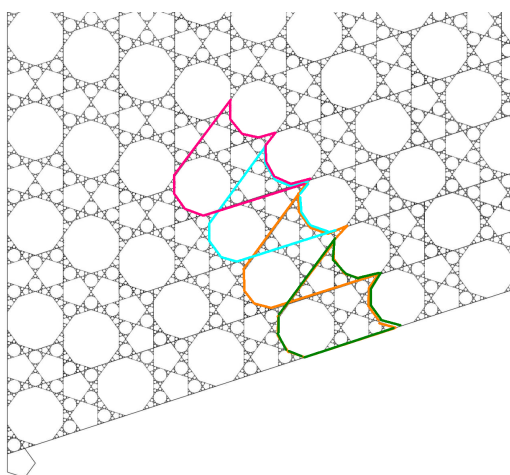


Рис. 20: A_i

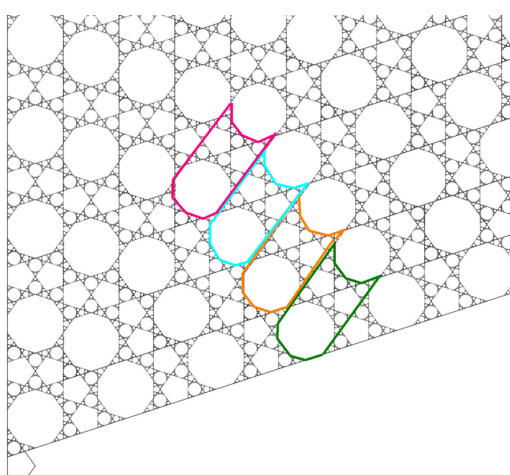


Рис. 21: B_i

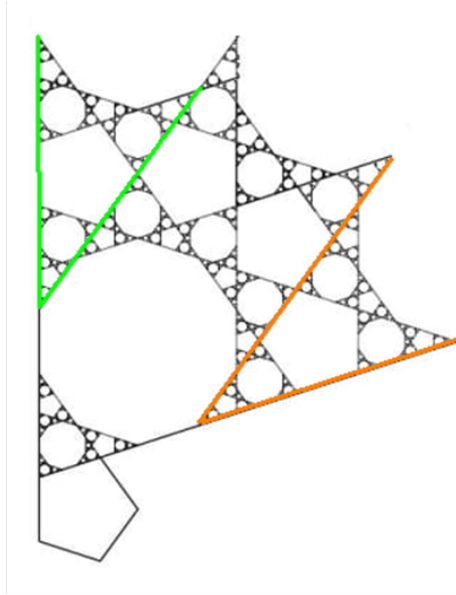


Рис. 22: $Z \setminus (Z \cap Q)$ обведен зеленым ($Z \cap U_2$) и оранжевым ($Z \cap (U_1 \setminus Q)$)

Тернарные маршруты

Напомним, что граница перекладывания F делит сектор V_0 на три подсектора: U_0 , U_1 и U_2 (левая часть рис. 4; также эти подсекторы показаны на рис. 23).

Определение 13. Тернарным маршрутом t_x точки $x \in V_0 \setminus Y_0$ назовём такую последовательность символов из множества $\{1, 2\}$, что $t_x(k) = i \iff F^k(x) \in U_i$. Нумерация символов маршрута начинается с нуля. Если тернарные маршруты всех точек некоторого множества совпадают, можно говорить о тернарном маршруте этого множества, как о маршруте любой его точки.

Следующая лемма позволяет получить маршрут точки относительно f по её бинарному или тернарному маршруту.

Лемма 9. Пусть $x \in V_i \setminus B_n$. Через w_x обозначим маршрут точки x длины n , а через r_x — бинарный или тернарный маршрут точки $R_0(x)$ длины n . Тогда

$$\begin{cases} w_x(0) = i \\ \forall k \leq n \quad w_x(k) = (w_x(k-1) + r_x(k) + 1) \pmod{5} \end{cases}$$

То есть, символ 0 в бинарном маршруте соответствует переходу в следующий сектор, символ 1 в бинарном или тернарном — переходу через один, символ 2 в тернарном — переходу через два.

Доказательство. Заметим, что $f(U_0) \subset V_1$, $f(U_1) \subset V_2$, $f(U_2) \subset V_3$. Пусть $r_x(k) = i$, а $w_x(k-1) = j$. Тогда следующая итерация отображения F переведёт точку в сектор с номером $(j + (i + 1)) \pmod{5}$. То есть, $w_x(k) = (j + (i + 1)) \pmod{5} = (w_x(k-1) + r_x(k) + 1) \pmod{5}$, что и требовалось. \square

Следующая теорема описывает, как из тернарных маршрутов различных компонент получать тернарные маршруты этих же компонент в ожерельях с бóльшими номерами.

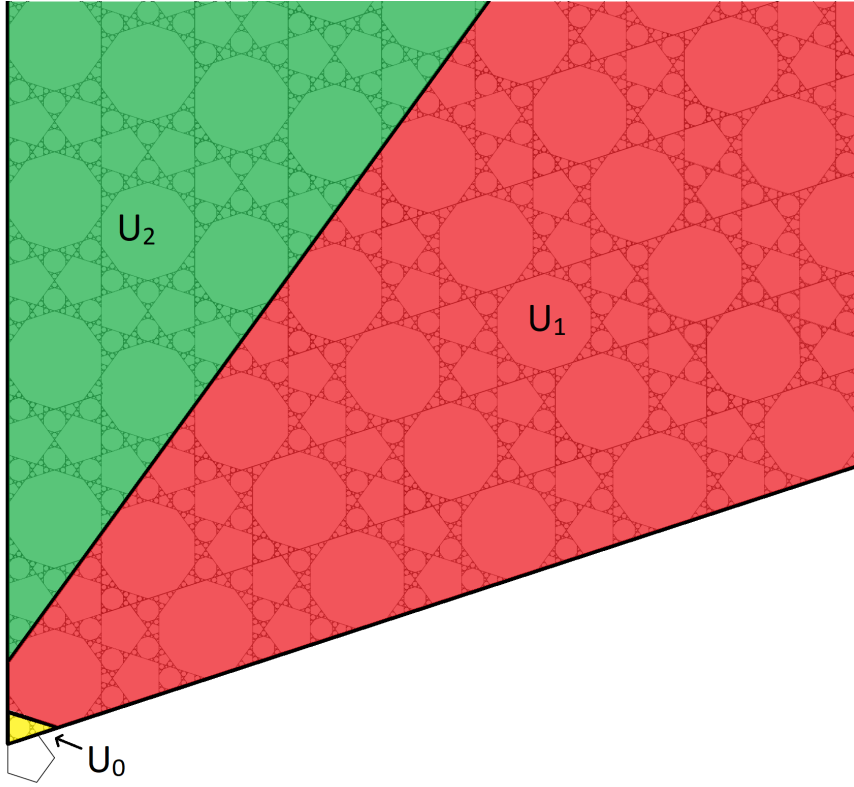


Рис. 23: Деление поля на сектора U_0 , U_1 и U_2

Теорема 2. Пусть τ — конечный автомат, действующий из алфавита $\{1, 2\}$ в такой же алфавит и определяемый следующим образом: $\tau 11 = 112\tau 1$, $\tau 12 = 12\tau$. Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \omega_{n+1} = \tau \omega_n \\ \pi_{n+1} = \tau \pi_n \\ \lambda_{n+1}^* = \tau \lambda_n^*, \quad \lambda_{n+1} = \tau \lambda_n \\ \delta_{n+1}^* = \tau \delta_n^*, \quad \delta_{n+1} = \tau \delta_n \end{cases},$$

где ω_n — тернарный маршрут $\Omega_{n,1}$ до первого возвращения в себя, π_n — тернарный маршрут $\Pi_{n,1}$ до первого возвращения в себя, λ_n^* — тернарный маршрут $\Lambda_{n,1}^*$ до первого возвращения в Y_n^* , δ_n^* — тернарный маршрут $\Delta_{n,1}^*$ до первого возвращения в Y_n^* (аналогично определяются λ_n и δ_n).

Доказательство. Для начала заметим, что τ действительно определён для каждого такого маршрута, поскольку все они начинаются с 1 и в каждом из них (как и в любом корректном тернарном маршруте) 2 следует только после 1. То есть, ему действительно могут встретиться только сочетания 11 и 12.

Рассмотрим отображение первого возвращения в $U_1 \setminus Y_0$. Оно по-разному действует на красную и зелёную области (верх рис. 24). У зелёной области маршрут до первого возвращения будет 12, а у красной — 1.

Теперь рассмотрим $U'_1 = h(U_1)$, где h — сдвиг на $(3 + \sqrt{5}) \cdot \overrightarrow{a_0 a_1}$ (низ рис. 24) и отображение первого возвращения в неё. У зелёной области маршрут до первого возвращения будет 12, а у красной — 112.

Теперь введём вспомогательный бинарный маршрут относительно отображения первого возвращения в $U_1 \setminus Y_0$. Пусть 0 в таком маршруте соответствует попаданию в красную область, а 1 — в зелёную. Тернарный маршрут однозначно восстанавливается из бинарного подстановкой $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto 12$. Аналогичный бинарный маршрут введём на U'_1 .

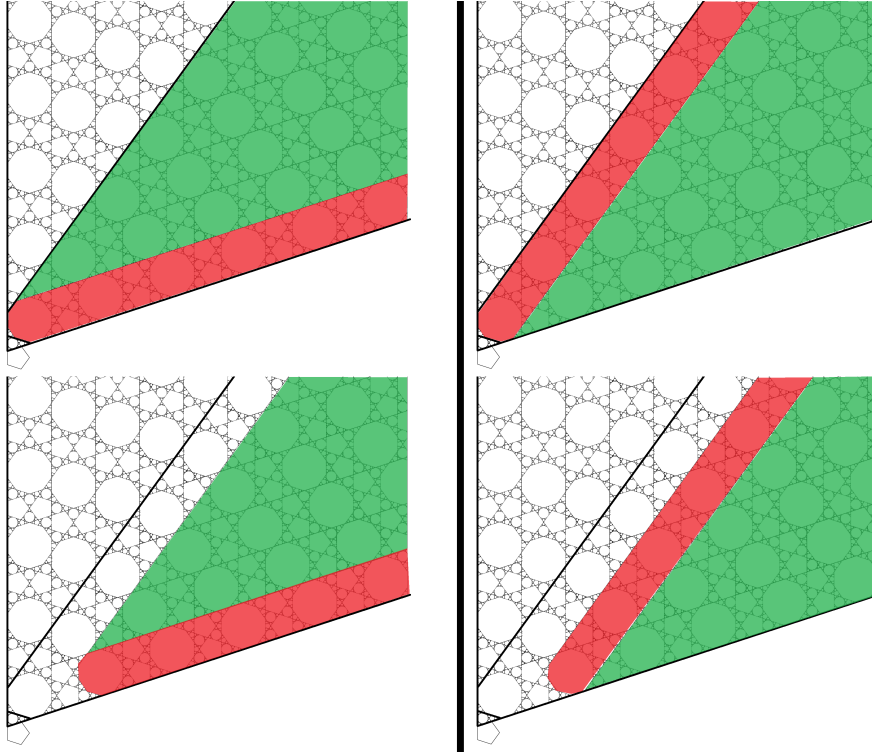


Рис. 24: Отображение первого возвращения в U_1 (выше) и в его сдвинутую версию $h(U_1)$ (ниже)

Чтобы получить тернарный маршрут из него, воспользуемся уже другой подстановкой: $0 \mapsto 112$, $1 \mapsto 12$.

Очевидно, что сдвиг h сохраняет бинарный маршрут (бинарный маршрут точки $x \in U_1$ совпадает с таковым для $h(x)$ в U'_1). Но это значит, что $t_{h(x)}$ получается из t_x как раз действием автомата τ .

Наконец, по определению

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} h(\Omega_{n,1}) = \Omega_{n+1,1} \\ h(\Pi_{n,1}) = \Pi_{n+1,1} \\ h(\Lambda_{n,1}^*) = \Lambda_{n+1,1}^*, \quad h(\Lambda_{n,1}) = \Lambda_{n+1,1} \\ h(\Delta_{n,1}^*) = \Delta_{n+1,1}^*, \quad h(\Delta_{n,1}) = \Delta_{n+1,1} \end{cases}$$

Это завершает доказательство теоремы. \square

Теорема 2 позволяет генерировать тернарные маршруты фигур из последующих ожерелий на основе маршрутов предыдущих. Таким образом, зная тернарные маршруты для первых ожерелий в каждой из последовательностей фигур (десятиугольники, пятиугольники, чётные и нечётные жёлтые и зелёные треугольники), можно получить тернарный маршрут для любого ожерелья данных фигур. Маршрутам первых ожерелий каждой последовательности фигур посвящено следующее утверждение.

Утверждение 5. В обозначениях теоремы 2 верны следующие соотношения: $\omega_1 = 1$, $\pi_1 = 1112$, $\lambda_1^* = 11112$, $\delta_1^* = 1$, $\lambda_1 = 1112112$, $\delta_1 = 112$.

Доказательство представляет собой непосредственное рассмотрение траекторий соответствующих компонент и здесь не приводится.

Можно заметить, что $\delta_1^* = \omega_1$ и $\delta_1 = \omega_2$, а также $\lambda_1^* = \omega_1 \pi_1$ и $\lambda_1 = \pi_1 \omega_2$. Простая индукция вместе с теоремой 2 позволяют сформулировать следующее утверждение:

Утверждение 6.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \lambda_n^* = \omega_n \pi_n \\ \delta_n^* = \omega_n \\ \lambda_n = \pi_n \omega_{n+1} \\ \delta_n = \omega_{n+1} \end{cases}$$

Это — просто примечательный факт, который никак не будет использоваться в доказательстве основных утверждений.

Пусть точка x лежит в i -ом треугольнике (не важно, жёлтом или зелёном) n -ого треугольного ожерелья (не важно, чётного или нечётного). Обозначим через x' точку $F^{-i}(x)$ (неформально говоря, это точка, x “отмотанная” до Y_k своего ожерелья). Понятно, что из тернарного маршрута точки x' можно получить маршрут точки x циклическим сдвигом периода на i символов назад. Теперь рассмотрим точку x'' , определяемую в терминах из доказательства теоремы 2, как $h^{-(n-1)/2} \circ R(x')$ для нечётного n и как $h^{-n/2}(x')$ для чётного (неформально говоря, это точка x' , “отмотанная” вместе с Y_k своего ожерелья до поля Y_0). Следующая теорема показывает, как получить тернарный маршрут точки x' по $b_{x''}$ и номеру ожерелья k .

Лемма 10. *Пусть точка x' лежит в первом треугольнике (не важно, жёлтом или зелёном) k -ого чётного ожерелья. Пусть подстановка ξ_k действует следующим образом: $0 \mapsto \lambda_k$, $1 \mapsto \delta_k$. Тогда*

$$t_{x'} = \xi_k(b_{x''})$$

В случае, если x' лежит в нечётном ожерелье,

$$t_{x'} = \xi_k^*(b_{x''}),$$

где $\xi_k^ : 0 \mapsto \lambda_k^*$, $1 \mapsto \delta_k^*$.*

Доказательство. Напомним, что отображение первого возвращения в соответствующий точке x четырёхугольника Y_k (или, возможно, Y_k^*) действует аналогично перекладыванию F в ограничении на поле Y_0 . Рассмотрим i -ый символ в бинарном маршруте точки x'' . Если $b_{x''}(i) = 0$, то, по определению бинарного маршрута, $x'' \in \Lambda_{0,1}$, а по одной из упомянутых лемм (в зависимости от чётности рассматриваемого ожерелья) $x' \in \Lambda_{k,i}$. Значит, до следующего первого возвращения в Y_k точка x' пройдёт тернарный маршрут, в точности равный λ_k , что соответствует подстановке λ_k вместо нуля на рассматриваемой i -ой позиции бинарного маршрута.

Аналогично рассматривается случай $b_{x''}(i) = 1$. □

Наконец, следующая теорема перечисляет все бинарные и тернарные маршруты, реализуемые при действии итераций перекладывания F на V_0 .

Теорема 3. *Пусть \mathcal{B} — множество всех периодов периодических бинарных маршрутов, возникающих при действии перекладывания F , а \mathcal{T} — аналогичное множество для периодов тернарных маршрутов. Пусть также $\tau X = \{\tau x \mid x \in X\}$ и $s(X) = \{s(x) \mid x \in X\}$. Тогда в обозначениях утверждения 2, теоремы 2 и леммы 10*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(s^k(\{0, 01, 10\}) \right)$$

$$\mathcal{T} = \bigcup_{n, m \in \mathbb{N}} \left(\tau^n(\{\omega_1, \pi_1\} \cup \xi_m(\mathcal{B}) \cup \xi_m^*(\mathcal{B})) \right)$$

Доказательство. Первое соотношение следует из исследования действия перекладывания F на поле Y_0 . Второе же непосредственно следует из теоремы 2 и леммы 10. Отсутствие каких-либо других периодических маршрутов, кроме перечисленных, доказывается в теореме 3 и утверждении 3. \square

Пользуясь этой теоремой и леммой 9, можно вычислить множество всех периодов периодических маршрутов уже относительно отображения внешнего бильярда f .

Периоды компонент относительно отображения f

Будем говорить, что периодический тернарный маршрут имеет $\text{тип}(v, w)$, если его период содержит ровно v единиц и w двоек. Через (v_m, w_m) обозначается тип тернарного маршрута m .

Пусть $(v_{\kappa_n}, w_{\kappa_n})$ — тип тернарного маршрута некоторой компоненты κ из большого ожерелья номер n . Тогда из теоремы 2 (если точнее - из определения автомата τ) следует рекуррентное соотношение:

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad (v_{\kappa_{k+1}}, w_{\kappa_{k+1}}) = (2v_{\kappa_k} - w_{\kappa_k}, v_{\kappa_k})$$

Лемма 11. Пусть рассматривается большое ожерелье номер n . Тогда имеют место следующие формулы для типов маршрутов различных компонент:

$$\begin{cases} (v_{\omega_n}, w_{\omega_n}) = (n, n-1) \\ (v_{\pi_n}, w_{\pi_n}) = (2n+1, 2n-1) \\ (v_{\lambda_n^*}, w_{\lambda_n^*}) = (3n+1, 3n-2), (v_{\delta_n^*}, w_{\delta_n^*}) = (n, n-1) \\ (v_{\lambda_n}, w_{\lambda_n}) = (3n+2, 3n-1), (v_{\delta_n}, w_{\delta_n}) = (n+1, n) \end{cases}$$

Здесь важно заметить, что маршрут λ_n и другие маршруты треугольников периодическими не являются, и рассматривается тип их маршрута до первого возвращения в соответствующий четырёхугольник Y_k или Y_k^* .

Доказательство. В теореме 1 было доказано, что в своем периодическом маршруте компонента проходит через все ожерелье. Это означает, что количество символов “1” и “2” в тернарном маршруте равно числу компонент в ожерелье в пересечении с U_1 и U_2 соответственно. Т.е. $(v_{\kappa_n}, w_{\kappa_n}) = (m+L, L)$.

Количество компонент ожерелья в U_1 (то же, что и $m+L$) равно:

$$|A_0 \cup A_1 \dots \cup A_{n-1}| = \sum_{i=0}^{n-1} |A_i| - \sum_{i=0}^{n-2} |A_i \cap A_{i+1}| = n \cdot |A_z| - (n-1) \cdot |A_z \setminus (A_z \cap Q)|.$$

Количество компонент ожерелья в U_2 (то же, что и L) рассчитаем как $|A_0 \cup A_1 \dots \cup A_{n-1}| - |B_z|$.

Подставляя нужные значения $|A_i|, |A_i \cap A_{i+1}|$ из A_z , получаем искомые формулы. \square

Теперь можно сформулировать теорему, описывающую периоды всех периодических относительно отображения f компонент.

Теорема 4. Обозначим период периодической компоненты X за $p(X)$. Также пусть $O_{n,k}$ — центр десятиугольника $\Omega_{n,k}$. Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} \forall k \leq 2n-1 & p(O_{n,k}) & = 10n-5 \\ \forall k \leq 2n-1 & p(\Omega_{n,k} \setminus \{O_{n,k}\}) & = 2 \cdot p(O_{n,k}) \\ \forall k \leq 4n & p(\Pi_{n,k}) & = 20n \end{cases}$$

Пусть Ω_n^{r*} — некоторый десятиугольник r -ого ранга в n -ом нечётном треугольном ожерелье, O_n^{r*} — его центр; Ω_n^r — некоторый десятиугольник r -ого ранга в n -ом чётном треугольном ожерелье, O_n^r — его центр; аналогично определяются Π_n^{r*} и Π_n^r , P_n^{r*} и P_n^r . Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \forall r \in \mathbb{N} \quad \left\{ \begin{array}{l} p(\Omega_n^{r*} \setminus \{O_n^{r*}\}) = 2 \cdot p(O_n^{r*}) \\ p(O_n^{r*}) = \frac{5}{21} \left((6(-1)^{r+1} + 20 \cdot 6^r)n + (3(-1)^{r+1} - 4 \cdot 6^r) \right) \\ p(O_n^r) = \frac{5}{21} \left((6(-1)^{r+1} + 20 \cdot 6^r)n - (3(-1)^{r+1} - 4 \cdot 6^r) \right) \\ p(\Omega_n^r \setminus \{O_n^r\}) = 2 \cdot p(O_n^r) \\ p(P_n^{r*}) = \frac{10}{7} \left((2(-1)^r + 5 \cdot 6^r)n + ((-1)^r - 6^r) \right) \\ p(\Pi_n^{r*} \setminus \{P_n^{r*}\}) = p(P_n^{r*}) \\ p(P_n^r) = \frac{10}{7} \left((2(-1)^r + 5 \cdot 6^r)n - ((-1)^r - 6^r) \right) \\ p(\Pi_n^r \setminus \{P_n^r\}) = p(P_n^r) \end{array} \right.$$

Доказательство. Пусть X — некоторая периодическая компонента n -ого ожерелья. Обозначим через l_X длину её маршрута до первого возвращения в себя. Под l_{Λ_i} и l_{Δ_i} будем понимать длину маршрутов этих треугольников до первого возвращения в соответствующие их ожерельям Y_k . Заметим, что $l_X = v_{t_X} + w_{t_X}$.

Пусть X' — некоторая компонента отображения f , причём она отличается лишь поворотом на кратный $\frac{2\pi}{5}$ угол от периодической относительно F компоненты $X \subset V_0$. Обозначим через $m_{X'}$ число секторов, на которое сместится X' после применения к нему f^{l_X} . Пользуясь леммой 9, нетрудно получить, что $m_{X'} = 2 \cdot v_{t_X} + 3 \cdot w_{t_X}$. Если $m_{X'} \equiv 0 \pmod{5}$, можно утверждать, что l_X — время первого возвращения X' в себя (или в Y_k в случае с треугольными компонентами). В противном случае $m_{X'}$ всегда взаимно просто с числом 5, и временем первого возвращения X' в себя будет число $5 \cdot l_X$.

Лемма 12. $l_{\Omega_{n,k}} = 2n - 1$, $m_{\Omega_{k,n}} = 5n - 3$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 11: $l_{\Omega_{n,k}} = v_{\omega_n} + w_{\omega_n} = n + (n - 1) = 2n - 1$. Аналогично $m_{\Omega_{n,k}} = 2 \cdot v_{\omega_n} + 3 \cdot w_{\omega_n} = 2 \cdot n + 3 \cdot (n - 1) = 5n - 3$. \square

$m_{\Omega_{n,k}}$ не кратно пяти, а значит в себя $\Omega_{n,k}$ вернётся лишь через $5 \cdot l_{\Omega_{n,k}} = 10n - 5$ итераций. Это число нечётно, а композиция нечётного числа поворотов на 180° — это поворот на 180° . Значит, за $l_{\Omega_{n,k}}$ итераций отображения f десятиугольник повернётся на 180° относительно своего центра. Значит, у его центра период равен $5 \cdot l_{\Omega_{n,k}}$, то есть $10n - 5$, а у остальных точек он ровно вдвое больше.

Лемма 13. $l_{\Pi_{n,k}} = 4n$, $m_{\Pi_{k,n}} = 10n - 1$.

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 12, воспользуемся леммой 11: $l_{\Pi_{n,k}} = v_{\pi_n} + w_{\pi_n} = (2n+1) + (2n-1) = 4n$; $m_{\Pi_{n,k}} = 2 \cdot v_{\pi_n} + 3 \cdot w_{\pi_n} = 2 \cdot (2n+1) + 3 \cdot (2n-1) = 10n - 1$. \square

$m_{\Pi_{n,k}}$ не кратно пяти, а значит $\Pi_{n,k}$ вернётся в себя ровно через $5 \cdot l_{\Pi_{n,k}} = 20n$ итераций. При этом $l_{\Pi_{n,k}}$ чётно, а композиция чётного числа поворотов на 180° — это параллельный перенос, причём в данном случае — на нуль-вектор, ведь фигура перешла в себя. Значит, период всех точек $\Pi_{n,k}$ равен $20n$.

Лемма 14. Пусть (u_r, v_r) — тип бинарного маршрута некоторого десятиугольника ранга r , лежащего в Y_0 , а (u'_r, v'_r) — тип бинарного маршрута некоторого пятиугольника ранга r , лежащего в Y_0 . Тогда имеют место соотношения:

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{7}((-1)^r + 6^{r+1}) \\ v_r = \frac{2}{7}((-1)^{r+1} + 6^r) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'_r = \frac{1}{7}(2(-1)^{r+1} + 9 \cdot 6^r) \\ v'_r = \frac{1}{7}(4(-1)^r + 3 \cdot 6^r) \end{cases}$$

Доказательство. Доказательство сводится к применению общеизвестных средств линейной алгебры, и здесь не приводится. \square

Рассмотрим некоторый десятиугольник ранга r в нечётном ожерелье треугольников номер $n - \Omega_n^{r*}$. Пусть соответствующий ему в Y_0 десятиугольник Ω_n^{r*} имеет тип бинарного маршрута (u_r, v_r) . Лемма 10 позволяет сказать, что $l_{\Omega_n^{r*}} = u_\omega \cdot (v_{\Lambda_n^*} + w_{\Lambda_n^*}) + v_\omega \cdot (v_{\Delta_n^*} + w_{\Delta_n^*})$, а также $m_{\Omega_n^{r*}} = 2 \cdot (u_\omega \cdot v_{\Lambda_n^*} + v_\omega \cdot w_{\Lambda_n^*}) + 3 \cdot (u_\omega \cdot v_{\Delta_n^*} + v_\omega \cdot w_{\Delta_n^*})$. Распишем это в соответствии с леммами 11 и 14:

$$\begin{aligned} l_{\Omega_n^{r*}} &= u_\omega \cdot (v_{\Lambda_n^*} + w_{\Lambda_n^*}) + v_\omega \cdot (v_{\Delta_n^*} + w_{\Delta_n^*}) = \\ &= \frac{1}{7}((-1)^r + 6^{r+1}) \cdot ((3n + 1) + (3n - 2)) + \frac{2}{7}((-1)^{r+1} + 6^r) \cdot (n + (n + 1)) = \\ &= \frac{1}{21} \left((6(-1)^{r+1} + 20 \cdot 6^r)n + (3(-1)^{r+1} - 4 \cdot 6^r) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{\Omega_n^{r*}} &= 2 \cdot (u_\omega \cdot v_{\Lambda_n^*} + v_\omega \cdot w_{\Lambda_n^*}) + 3 \cdot (u_\omega \cdot v_{\Delta_n^*} + v_\omega \cdot w_{\Delta_n^*}) = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{7}((-1)^r + 6^{r+1}) \cdot (3n + 1) + \frac{2}{7}((-1)^{r+1} + 6^r) \cdot n \right) + \\ &+ 3 \cdot \left(\frac{1}{7}((-1)^r + 6^{r+1}) \cdot (3n - 2) + \frac{2}{7}((-1)^{r+1} + 6^r) \cdot (n - 1) \right) = \\ &= \frac{1}{21} \left(5(3(-1)^{r+1} + 10 \cdot 6^r)n + (6(-1)^{r+1} - 15 \cdot 6^r) \right) \end{aligned}$$

Видно, что $m_{\Omega_n^{r*}}$ не делится на 5. Значит, рассматриваемый десятиугольник вернётся в себя лишь через $5 \cdot l_{\Omega_n^{r*}}$ итераций отображения f . При этом, как известно из исследования отображения F на множестве Y_0 , после возвращения в себя этот десятиугольник повернётся относительно своего центра на $5 \cdot 108^\circ$. Через 2 таких поворота все точки десятиугольника вернутся на прежние позиции, а значит, их периоды равны $10 \cdot l_{\Omega_n^{r*}}$.

Проведя аналогичное рассуждение для Π_n^{r*} , получим, что

$$\begin{aligned} l_{\Pi_n^{r*}} &= \frac{2}{7} \left((2(-1)^r + 5 \cdot 6^r)n + ((-1)^r - 6^r) \right), \\ m_{\Pi_n^{r*}} &= \frac{1}{14} \left(5(4(-1)^{r+1} + 10 \cdot 6^r)n + (8(-1)^r - 15 \cdot 6^r) \right) \end{aligned}$$

И из аналогичных же соображений получаем, что $p(P_n^{r*}) = 5 \cdot l_{\Pi_n^{r*}}$ и $p(\Pi_n^{r*}) = 5 \cdot l_{\Pi_n^{r*}}$.

Тем же образом устроено доказательство для десяти- и пятиугольников, ранг которых не меньше 1, в чётных ожерельях. Приведём лишь конечные формулы для соответствующих им характеристик:

$$\begin{aligned} l_{\Omega_n^r} &= \frac{1}{21} \left((6(-1)^{r+1} + 20 \cdot 6^r)n - (3(-1)^{r+1} - 4 \cdot 6^r) \right) \\ m_{\Omega_n^r} &= \frac{1}{21} \left(5(3(-1)^{r+1} + 10 \cdot 6^r)n + (9(-1)^r + 5 \cdot 6^r) \right) \\ l_{\Pi_n^r} &= \frac{2}{7} \left((2(-1)^{r+1} + 5 \cdot 6^r)n - ((-1)^r - 6^r) \right) \\ m_{\Pi_n^r} &= \frac{1}{14} \left(5(4(-1)^r + 10 \cdot 6^r)n + (12(-1)^{r+1} + 5 \cdot 6^r) \right) \end{aligned}$$

Таким образом, формула для периода каждого вида компонент доказана, и доказательство теоремы завершено. \square

Список литературы

- [1] Nicolas Bedaride, Julien Cassaigne. Outer billiard outside regular polygons. Journal of the London Mathematical Society, London Mathematical Society, 2011, 10.1112/jlms/jdr010. hal-01219092
- [2] Serge Tabachnikov. On the dual billiard problem. Adv. Math., 1995