Исследование внешнего бильярда вне правильного пятиугольника

Дмитренко Андрей[1]
Скачкова Маргарита[2]
Синицына Владислава[3]

Научный руководитель: Тиморин Владлен Анатольевич

[1]dmitrenko.ett@gmail.com
[2]margomolko14@gmail.com
[3]vladislava.sinitsyna@yandex.ru

Основные определения

Обозначим за M правильный пятиугольник на плоскости со стороной 1 и вершинами в точках A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 в порядке обхода против часовой стрелки.

Положим множество B_1 равным объединению M и пяти лучей следующего вида: каждый из них, начинаясь в вершине A_i, проходит через вершину $A_{(i-1) \mod 5}$

Определение 1 (Внешний бильярд)**.** Очевидно, что для всякой точки $P \in \mathbb{R}^2 \setminus B_1$ найдутся такие две вершины пятиугольника M, обозначаемые A_i и A_j, что $M \subset \angle A_i P A_j$, причём этот угол имеет положительную ориентацию. Тогда определим $f : \mathbb{R}^2 \setminus B_1 \to \mathbb{R}^2$ следующим образом: положим $f(P)$ равным точке, симметричной точке P относительно A_i. Отображение f будем называть *внешним бильярдом.*

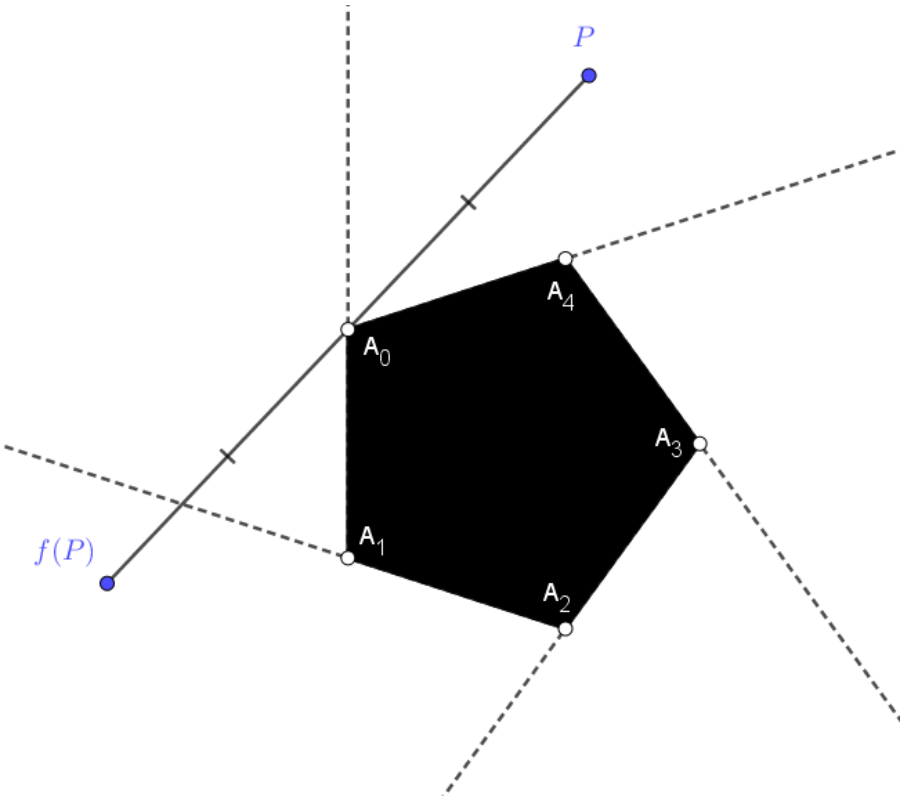

Рис. 1: Определение внешнего бильярда; пунктиром обозначены точки множества B_1

Рекуррентно определим последовательность множеств $(B_n)_{n \in \mathbb{Z}_{>0}}$ следующим образом: для всякого натурального n положим $B_{n+1} = B_n \cup f^{-1}(B_n)$. Под B_∞ будем понимать $B_1 \cup B_2 \cup \ldots$, то есть множество всех точек, лежащих хотя бы в одном множестве B_i для некоторого натурального i.

Далее под отображением f мы будем понимать его сужение на $\mathbb{R}^2 \setminus B_\infty$.

Определение 2 (Сектор)**.** Пять областей, на которые лучи множества B_1 делят плоскость без пятиугольника M, называются *секторами.*

Каждому сектору присвоим номер в соответствии с индексом вершины M, относительно которой его отражает отображение внешнего бильярда. Сектор номер i будем обозначать V_i.

Определение 3 (Поворот до V_0)**.** Определим отображение R, как поворот относительно центра M на угол $\frac{2\pi}{5}$ против часовой стрелки. Для всякой точки $y \in \mathbb{R}^2 \setminus B_\infty$ найдётся

целое число m_y такое, что $R^{m_y}(y) \in V_0$. *Поворотом до* V_0 назовём такое отображение $R_0 : \mathbb{R}^2 \setminus B_\infty \to V_0$, что $R_0(y) = R^{m_y}(y)$ (неформально говоря, всякую точку множества $\mathbb{R}^2 \setminus B_\infty$ оно "доворачивает" до сектора V_0).

Определение 4 (Индуцированный внешний бильярд)**.** Введём отображение $F : V_0 \setminus B_\infty \to V_0$ такое, что $F = R_0 \circ f$. Это отображение будем называть *индуцированным внешним бильярдом.*

Лемма 1. *Существуют такие точки A, B, C на границе сектора V_0, а также точка D внутри него, что:*

(1) $|A_0C| = |CB| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,
(2) $|A_0B| = 1$,
(3) $|AB| = |BD| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$,
(4) $|AD| = 1$,
(5) $\widehat{BA_0C} = \widehat{A_0BC} = 72°$,
(6) $\widehat{BCA_0} = 36°$,
(7) $\widehat{DAB} = \widehat{ADB} = 36°$,
(8) $\widehat{ABD} = 108°$.

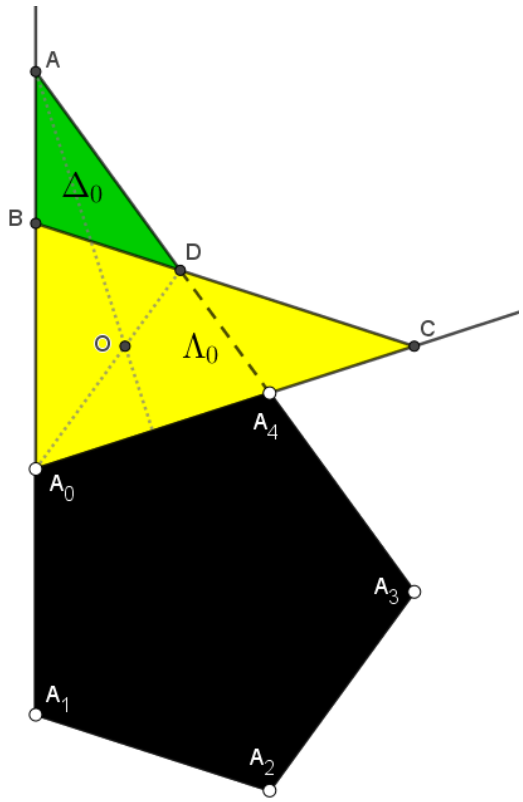

Рис. 2: Иллюстрация к лемме 1

Доказательство. Продлим до пересечения стороны пятиугольника $[A_1A_0]$ и $[A_3A_4]$. Точку пересечения назовём A. Ясно, что $\triangle A_0AA_4$ — равнобедренный треугольник с длиной основания 1 и длинами боковых сторон, равными $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. В частности, $|A_0A| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Отметим на отрезке $[AA_0]$ точку B так, что $|A_0B| = 1$. Ясно, что положение (2) в таком случае верно. Также отметим точку C на луче с вершиной в точке A_0, проходящем через A_4, так, чтобы $|A_0C| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ясно, что $\triangle A_0AA_4 = \triangle BCA_0$ по двум сторонам и углу между ними. Значит, $|CB| = |A_0A| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, и положение (1), тем самым, верно.

Нетрудно также заметить, что эти треугольники симметричны относительно биссектрисы угла $\angle AA_0C$, а значит, в частности, точка пересечения $[AA_4]$ и $[BC]$ (назовём её D) лежит на этой биссектрисе.

Положения (5) и (6) нетрудно доказать, исходя из положений (1) и (2). Из положения (5) же следует положение (8), т.к. $\widehat{A_0BC} + \widehat{ABD} = 180^\circ$ (эти углы являются смежными).

Из равенства треугольников $\triangle A_0AA_4$ и $\triangle BCA_0$ угол $\widehat{DAB} = \widehat{A_4AA_0} = 36^\circ$. Из суммы углов в $\triangle ABD$, угол $\widehat{ADB}$ также равен 36°, что доказывает положение (7). Нетрудно вычислить стороны $\triangle ABD$: длина основания окажется в точности равна 1 (это доказывает положение (4)), тогда как длины боковых сторон — по $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (это доказывает положение (3)).

Таким образом, все положения леммы доказаны. □

Множество $\triangle A_0BC \setminus B_\infty$ будем называть Λ_0. Множество $\triangle ABD \setminus B_\infty$ будем называть Δ_0. На рис. 2 треугольники, содержащие эти множества, обозначены жёлтым и зелёным цветами соответственно.

Заметим, что $F(\Lambda_0) = \triangle A_0AA_4$ и $F(\Delta_0) = \triangle DA_4C$. То есть, любая точка из $\Lambda_0 \cup \Delta_0$ под действием индуцированного внешнего бильярда переходит в какую-то точку этого же множества.

Определение 5. *Маршрут* точки $x \in \Lambda_0 \cup \Delta_0$ — это последовательность из символов 0 и 1, k-ый символ которой определяется следующим образом:

$$b_x(k) = \begin{cases} 0, \text{ если } F^k(x) \in \Lambda_0 \\ 1, \text{ если } F^k(x) \in \Delta_0 \end{cases}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

Определение 6 (Период, длина периода)**.** Пусть для данной точки x нашлось такое целое положительное t, что $F^t(x) = x$. Пусть t_0 — минимальное из таких. Тогда строка из символов $b_x(1), b_x(2), \ldots, b_x(t_0)$ называется *периодом* этой точки, а само число t_0 — *длиной* её периода.

Если точка имеет конечный период, её маршрут будем называть *периодическим*.

Формулировка основного результата

Теорема 1 (Bedaride, Cassaigne)**.** *Пусть $\mathcal{B}$ — множество периодов всех периодических маршрутов точек из множества $\Lambda_0 \cup \Delta_0$. Тогда*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}} s^k\big(\{0, 01, 10\}\big),$$

где s — подстановка, сопоставляющая одной конечной строке из нулей и единиц другую по следующему правилу:

$$0 \mapsto 0010100, \ 1 \mapsto 000.$$

Данный результат является частным случаем теоремы, доказанной в [1] (Theorem 2 для пятиугольника).

Список литературы

[1] Nicolas Bedaride, Julien Cassaigne. Outer billiard outside regular polygons. Journal of the London Mathematical Society, London Mathematical Society, 2011, 10.1112/jlms/jdr010. hal-01219092