

Задача номер 5.3

Ответ

$$\int \frac{1}{x^8 + x^4 + 1} dx = \frac{-1}{2\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{-2x+1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{2} (\ln(x^2 + \sqrt{3}x + 1) - \ln(x^2 + \sqrt{3}x - 1)) \right) + C$$

Решение:

Для вычисления $\int \frac{1}{x^8 + x^4 + 1} dx$ надо разложить знаменатель дроби на множители.

Пусть $t = x^4$ тогда корни уравнения $x^8 + x^4 + 1 = t^2 + t + 1$:

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -0.5 \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{x^8 + x^4 + 1} = \frac{1}{t_1 - t_2} \left(\frac{1}{x^4 - t_1} - \frac{1}{x^4 - t_2} \right) \quad (2)$$

$$\text{То есть } \int \frac{1}{x^8 + x^4 + 1} dx = \int \frac{1}{t_1 - t_2} \left(\frac{1}{x^4 - t_1} - \frac{1}{x^4 - t_2} \right) dx = \frac{1}{t_1 - t_2} \int \frac{1}{x^4 - t_1} dx - \frac{1}{t_1 - t_2} \int \frac{1}{x^4 - t_2} dx \quad (3)$$

Теперь надо вычислить каждый из этих двух интегралов. То есть достаточно вычислить:

$$\int \frac{1}{x^4 - f} dx, \text{ где } f\text{-комплексная константа}$$

Последующие вычисления делаются аналогично:

Пусть $l = x^2$ тогда корни уравнения $x^4 - f = l^2 - f$:

$$l_{1,2} = \pm \sqrt{f} \quad (4)$$

$$\frac{1}{x^4 - f} = \frac{1}{l_1 - l_2} \left(\frac{1}{x^2 - l_1} - \frac{1}{x^2 - l_2} \right) \quad (5)$$

$$\int \frac{1}{x^4 - f} dx = \int \frac{1}{l_1 - l_2} \left(\frac{1}{x^2 - l_1} - \frac{1}{x^2 - l_2} \right) dx = \frac{1}{l_1 - l_2} \int \frac{1}{x^2 - l_1} dx - \frac{1}{l_1 - l_2} \int \frac{1}{x^2 - l_2} dx \quad (6)$$

Остается лишь вычислить следующий интеграл:

$$\int \frac{1}{x^2 - s} dx, \text{ где } s\text{-комплексная константа}$$

$$\int \frac{1}{x^2 - s} dx = \frac{1}{\sqrt{s}} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right)^2 - 1} d\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{\sqrt{s}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{s}} \right) + C \quad (7)$$

Замечу что это выражение не изменится если корень будет братья со знаком минус, то есть неопределенность при взятии корня не влияет на результат.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^8 + x^4 + 1} dx &= \frac{1}{t_1 - t_2} \int \frac{1}{x^4 - t_1} dx - \frac{1}{t_1 - t_2} \int \frac{1}{x^4 - t_2} dx = \frac{1}{t_1 - t_2} \frac{1}{l_1 - l_2} \int \frac{1}{x^2 - l_1} dx \\ &- \frac{1}{t_1 - t_2} \frac{1}{l_1 - l_2} \int \frac{1}{x^2 - l_2} dx - \frac{1}{t_1 - t_2} \frac{1}{l_3 - l_4} \int \frac{1}{x^2 - l_3} dx + \frac{1}{t_1 - t_2} \frac{1}{l_3 - l_4} \int \frac{1}{x^2 - l_4} dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{t_1 - t_2} \left(\frac{1}{l_1 - l_2} \left(\frac{1}{\sqrt{l_1}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{l_1}} \right) - \frac{1}{\sqrt{l_2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{l_2}} \right) \right) - \frac{1}{l_3 - l_4} \left(\frac{1}{\sqrt{l_3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{l_3}} \right) - \frac{1}{\sqrt{l_4}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{l_4}} \right) \right) \right) + C \quad (8)$$

Где

$$l_{1,2} = \pm \sqrt{t_1} = \pm \sqrt{-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}} = \pm \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$l_{3,4} = \pm \sqrt{t_2} = \pm \sqrt{-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}} = \pm \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (9)$$

Так как неопределенность в виде знака при взятии корня не влияет на результат то можно сказать, что:

$$l_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (10) \quad \sqrt{l_1} = \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (14)$$

$$l_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (11) \quad \sqrt{l_2} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (15)$$

$$l_3 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (12) \quad \sqrt{l_3} = -\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (16)$$

$$l_4 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (13) \quad \sqrt{l_4} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (17)$$

$$t_1 - t_2 = i\sqrt{3} \quad (18) \quad l_1 - l_2 = 1 + i\sqrt{3} \quad (19) \quad l_3 - l_4 = 1 - i\sqrt{3} \quad (20)$$

Подставляя все в получившееся выражение получаю:

$$\int \frac{1}{x^8 + x^4 + 1} dx = \frac{1}{t_1 - t_2} \left(\frac{1}{l_1 - l_2} \left(\frac{1}{\sqrt{l_1}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{l_1}} \right) - \frac{1}{\sqrt{l_2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{l_2}} \right) \right) - \frac{1}{l_3 - l_4} \left(\frac{1}{\sqrt{l_3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{l_3}} \right) - \frac{1}{\sqrt{l_4}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sqrt{l_4}} \right) \right) \right) + C = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left(\frac{1}{1 + i\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} \right) - \frac{1}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) \right) - \frac{1}{1 - i\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} \right) - \frac{1}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) \right) \right) + C \quad (21)$$

Теперь остается привести все к действительным числам:

$$\frac{1}{i\sqrt{3}} \left(\frac{1}{1 + i\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} \right) - \frac{1}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) \right) - \frac{1}{1 - i\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} \right) - \frac{1}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) \right) \right) = \frac{-i}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{k} \left(\frac{1}{z} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{z} \right) + \right) \right)$$

$$+\frac{i}{z} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{iz}\right) - \frac{1}{k^*} \left(\frac{1}{z^*} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z^*}\right) + \frac{i}{z^*} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{iz^*}\right) \right) = \frac{-i}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{k} \frac{1}{z} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z}\right) + i \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{iz}\right) \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{k^*} \frac{1}{z^*} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z^*}\right) + i \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{iz^*}\right) \right) \right) \quad (22), \text{ где } k = 1 + i\sqrt{3}, \text{ а } z = \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\ln(y) = \ln(|y|) + i(\arg(y) + 2\pi n), \text{ где } n\text{-целое} \quad (23)$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z}\right) = -\frac{i}{2} \ln\left(\frac{1 + i\frac{x}{z}}{1 - i\frac{x}{z}}\right) = -\frac{i}{2} \ln\left(\frac{z + ix}{z - ix}\right) = -\frac{i}{2} (\ln(z + ix) - \ln(z - ix)) = \\ = -\frac{i}{2} (\ln(|z + ix|) - \ln(|z - ix|) + i(\arg(z + ix) + 2\pi n_1) - i(\arg(z - ix) + 2\pi n_2)) \quad (24)$$

Но так как $2\pi n_1$ и $2\pi n_2$ будут давать лишь константу, их можно отбросить.

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z}\right) = -\frac{i}{2} (\ln(|z + ix|) - \ln(|z - ix|) + i(\arg(z + ix) - \arg(z - ix))) \quad (25)$$

$$|z + ix| = \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + x + 1} \quad (26)$$

$$|iz + ix| = \sqrt{\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \sqrt{3}x + 1} \quad (27)$$

$$|z^* + ix| = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - x + 1} \quad (28)$$

$$|iz^* + ix| = \sqrt{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1} \quad (29)$$

$$kz = (1 + i\sqrt{3}) \left(\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2i \quad (30)$$

$$k^*z^* = (kz)^* = -2i \quad (31)$$

$$\frac{-i}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{k} \frac{1}{z} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z}\right) + i \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{iz}\right) \right) - \frac{1}{k^*} \frac{1}{z^*} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z^*}\right) + i \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{iz^*}\right) \right) \right) = \frac{-i}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{2i} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z}\right) + i \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{iz}\right) \right) - \frac{1}{-2i} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z^*}\right) + i \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{iz^*}\right) \right) \right) = \frac{-1}{2\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z}\right) + \right. \\ \left. + i \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{iz}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z^*}\right) + i \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{iz^*}\right) \right) \quad (32)$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z^*}\right) = -\frac{i}{2} (\ln(|z + ix|) - \ln(|z - ix|) + i(\arg(z + ix) - \arg(z - ix))) - \\ - \frac{i}{2} (\ln(|z^* + ix|) - \ln(|z^* - ix|) + i(\arg(z^* + ix) - \arg(z^* - ix))) = \frac{i}{2} (\ln(|z - ix|) -$$

$$- \ln(|z^* + ix|) + \ln(|z^* - ix|) - \ln(|z + ix|)) + \frac{1}{2} (\arg(z + ix) - \arg(z - ix) + \arg(z^* + ix)$$

$$- \arg(z^* - ix)) = \frac{i}{2} \left(\ln\left(\frac{|z - ix|}{|z^* + ix|}\right) + \ln\left(\frac{|z^* - ix|}{|z + ix|}\right) \right) + (\arg(z + ix) - \arg(z - ix)) = \arg(z + ix) -$$

$-\arg(z - ix)$ (33), так как $|z - ix| = |(z - ix)^*| = |z^* + ix|$ (34) и $|z^* - ix| = |z + ix|$ (35), а также $-\arg(z^* - ix) = -\arg((z + ix)^*) = \arg(z + ix)$ (36) и $\arg(z - ix) = -\arg(z^* + ix)$ (36)

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{iz}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{iz^*}\right) &= -\frac{i}{2}(\ln(|iz + ix|) - \ln(|iz - ix|) + i(\arg(iz + ix) - \arg(iz - ix))) - \\ &-\frac{i}{2}(\ln(|iz^* + ix|) - \ln(|iz^* - ix|) + i(\arg(iz^* + ix) - \arg(iz^* - ix))) = \frac{i}{2}(\ln(|iz - ix|) - \\ &-\ln(|iz^* + ix|) + \ln(|iz^* - ix|) - \ln(|iz + ix|)) + \frac{1}{2}(\arg(iz + ix) - \arg(iz - ix) + \arg(iz^* + ix) - \\ &-\arg(iz^* - ix)) = i(\ln(|iz - ix|) - \ln(|iz^* + ix|)) + \frac{1}{2}(\arg(iz + ix) - \arg(iz - ix) + \\ &+\arg(-(iz + ix)^*) - \arg(-(iz - ix)^*)) = i(\ln(|iz - ix|) - \ln(|iz^* + ix|)) \quad (37) \end{aligned}$$

Так как:

$$\arg(-(iz + ix)^*) = \pi + \arg((iz + ix)^*) = \pi - \arg(iz + ix) \quad (38) \text{ и } |iz - ix| = |-(iz^* - ix)^*| = |iz^* - ix| \quad (38)$$

$$\arg(d) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}(d)}{\operatorname{Re}(d)}\right) + \pi j \quad (39), \text{ где } j\text{-целое}$$

$\arg(z + ix) - \arg(z - ix) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}(z+ix)}{\operatorname{Re}(z+ix)}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}(z-ix)}{\operatorname{Re}(z-ix)}\right) + \pi j_1 - \pi j_2$ (40), но так как слагаемое $\pi j_1 - \pi j_2$ добавляет лишь константу к ответу, то его можно не учитывать.

$$z + ix = \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + ix \quad (41)$$

$$\operatorname{Im}(z + ix) = x + \frac{1}{2} \quad (42)$$

$$\operatorname{Re}(z + ix) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (43)$$

$$|iz + ix| = \sqrt{\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \sqrt{3}x + 1} \quad (44)$$

$$z - ix = \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - ix \quad (45)$$

$$\operatorname{Im}(z - ix) = -x + \frac{1}{2} \quad (46)$$

$$\operatorname{Re}(z - ix) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (47)$$

$$|iz^* + ix| = \sqrt{\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z}\right) + i\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{iz}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{z^*}\right) + i\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{iz^*}\right)\right) &= \frac{-1}{2\sqrt{3}}(\arg(z + ix) - \arg(z - ix) + \\ &+ ii(\ln(|iz - ix|) - \ln(|iz^* + ix|))) = \frac{-1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}(z + ix)}{\operatorname{Re}(z + ix)}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}(z - ix)}{\operatorname{Re}(z - ix)}\right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \ln \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{3}x + 1} \right) - \ln \left(\sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1} \right) = \frac{-1}{2\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{-2x + 1}{\sqrt{3}} \right) \right) + \\
& + \ln \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{3}x + 1} \right) - \ln \left(\sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1} \right) = \frac{-1}{2\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{-2x + 1}{\sqrt{3}} \right) \right) + \\
& + \frac{1}{2} (\ln(x^2 + \sqrt{3}x + 1) - \ln(x^2 - \sqrt{3}x + 1)) \quad (49)
\end{aligned}$$

Готово.