Задача номер 5.3

Ответ

$$\int \frac{1}{x^8+x^4+1}dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{-2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}(\ln\left(\mathrm{x}^2+\sqrt{3}\mathrm{x}+1\right) -$$

$$-\ln\left(\mathrm{x}^2+\sqrt{3}\mathrm{x}+1\right))) + \mathrm{C}$$

Решение:

Разложу знаменатель дроби $\frac{1}{x^8+x^4+1}$ на множители.

Пусть $t = x^4$ тогда корни уравнения $x^8 + x^4 + 1 = t^2 + t + 1$:

$t_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = -0.5 \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (1)

$\frac{1}{x^8+x^4+1} = \frac{1}{t_1-t_2}(\frac{1}{x^4-t_1} - \frac{1}{x^4-t_2})$ (2)

То есть $\int \frac{1}{x^8+x^4+1}dx = \int \frac{1}{t_1-t_2}(\frac{1}{x^4-t_1} - \frac{1}{x^4-t_2})dx = \frac{1}{t_1-t_2}\int\frac{1}{x^4-t_1}dx - \frac{1}{t_1-t_2}\int\frac{1}{x^4-t_2}dx$ (3)

Теперь надо вычислить каждый из этих двух интегралов. То есть требуется вычислить:

$\int \frac{1}{x^4-f}dx$, где f-любая комплексная константа, не равная нулю.

Вычисляю $\int \frac{1}{x^4-f}dx$:

Обозначим новою переменную за l,такую, $l = x^2$. Найду корни уравнения $l^2 - f = 0$

$l_{1,2} = \pm\sqrt{f}$ (4)

$\frac{1}{x^4-f} = \frac{1}{l_1-l_2}(\frac{1}{x^2-l_1} - \frac{1}{x^2-l_2})$ (5)

$\int \frac{1}{x^4-f}dx = \int \frac{1}{l_1-l_2}(\frac{1}{x^2-l_1} - \frac{1}{x^2-l_2})dx = \frac{1}{l_1-l_2}\int\frac{1}{x^2-l_1}dx - \frac{1}{l_1-l_2}\int\frac{1}{x^2-l_2}dx$ (6)

Остается лишь вычислить следующий интеграл:

$\int \frac{1}{x^2-s}dx$, где s-комплексная константа

$\int \frac{1}{x^2-s}dx = \frac{1}{\sqrt{s}}\int\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right)^2-1}d(\frac{x}{\sqrt{s}}) = \frac{i}{\sqrt{s}}arctg\left(\frac{ix}{\sqrt{s}}\right) + \mathrm{C}$ (7)

Замечу что это выражение не изменится если корень будет браться со знаком минус, то есть неопределенность при взятии корня не влияет на результат.

$$\int \frac{1}{x^8+x^4+1}dx = \frac{1}{t_1-t_2}\int\frac{1}{x^4-t_1}dx - \frac{1}{t_1-t_2}\int\frac{1}{x^4-t_2}dx = \frac{1}{t_1-t_2}\frac{1}{l_1-l_2}\int\frac{1}{x^2-l_1}dx$$

$$-\frac{1}{t_1-t_2}\frac{1}{l_1-l_2}\int\frac{1}{x^2-l_2}dx - \frac{1}{t_1-t_2}\frac{1}{l_3-l_4}\int\frac{1}{x^2-l_3}dx + \frac{1}{t_1-t_2}\frac{1}{l_3-l_3}\int\frac{1}{x^2-l_4}dx =$$

$$=\frac{1}{t_1-t_2}(\frac{1}{l_1-l_2}\left(\frac{i}{\sqrt{l_1}}arctg\left(\frac{ix}{\sqrt{l_1}}\right)-\frac{i}{\sqrt{l_2}}arctg\left(\frac{ix}{\sqrt{l_2}}\right)\right)-\frac{1}{l_3-l_4}(\frac{i}{\sqrt{l_3}}arctg\left(\frac{ix}{\sqrt{l_3}}\right)-$$

$$-\frac{i}{\sqrt{l_4}}arctg\left(\frac{ix}{\sqrt{l_4}}\right)))+\mathrm{C} \quad (8)$$

Где

$$l_{1,2}=\pm\sqrt{t_1}=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\pm(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$l_{3,4}=\pm\sqrt{t_2}=\pm\sqrt{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\pm(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}) \ (9)$$

Так как неопределенность в виде знака при взятии корня не влияет на результат то можно сказать, что:

$l_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (10) $\sqrt{l_1}=\frac{i}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ (14)

$l_2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (11) $\sqrt{l_2}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (15)

$l_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (12) $\sqrt{l_3}=-\frac{i}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ (16)

$l_4=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (13) $\sqrt{l_4}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (17)

$t_1-t_2=i\sqrt{3}$ (18) $l_1-l_2=1+i\sqrt{3}$ (19) $l_3-l_4=1-i\sqrt{3}$ (20)

Подставляя все в получившееся выражение получаю:

$$\int\frac{1}{x^8+x^4+1}dx=\frac{i}{t_1-t_2}\left(\frac{1}{l_1-l_2}\left(\frac{1}{\sqrt{l_1}}arctg\left(\frac{ix}{\sqrt{l_1}}\right)-\frac{1}{\sqrt{l_2}}arctg\left(\frac{ix}{\sqrt{l_2}}\right)\right)-\frac{1}{l_3-l_4}\left(\frac{1}{\sqrt{l_3}}arctg\left(\frac{ix}{\sqrt{l_3}}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\sqrt{l_4}}arctg\left(\frac{ix}{\sqrt{l_4}}\right)\right)\right)+\mathrm{C}=\frac{i}{i\sqrt{3}}\left(\frac{1}{1+i\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\frac{i}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}arctg\left(\frac{ix}{\frac{i}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)-\frac{1}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}arctg\left(\frac{ix}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right)-\right.$$

$$\left.\frac{1}{1-i\sqrt{3}}\left(\frac{1}{-\frac{i}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}arctg\left(\frac{ix}{-\frac{i}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)-\frac{1}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}arctg\left(\frac{ix}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right)\right)+\mathrm{C} \quad (21)$$

Теперь остается привести все к действительным числам:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{1+i\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\frac{i}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}arctg\left(\frac{ix}{\frac{i}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)-\frac{1}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}arctg\left(\frac{ix}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\right)-$$

$$-\frac{1}{1-i\sqrt{3}}(\frac{1}{-\frac{i}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}arctg\left(\frac{ix}{-\frac{i}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)-\frac{1}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}arctg\left(\frac{ix}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)))=\frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{1}{k}(\frac{1}{z}arctg\left(\frac{ix}{z}\right)+$$

$$+\frac{i}{z}arctg\left(\frac{ix}{iz}\right)) - \frac{1}{k^*}(\frac{1}{z^*}arctg\left(\frac{ix}{z^*}\right) + \frac{i}{z^*}arctg\left(\frac{ix}{iz^*}\right))) = \frac{-i}{\sqrt{3}}(\frac{1}{k}\frac{1}{z}\left(-arctg\left(\frac{x}{z}\right) - iarctg\left(\frac{x}{iz}\right)\right) -$$

$-\frac{1}{k^*}\frac{1}{z^*}\left(-arctg\left(\frac{x}{z^*}\right) - iarctg\left(\frac{x}{iz^*}\right)\right))$ (22) , где $k = 1 + i\sqrt{3}$, а $z = \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\ln(y) = \ln(|y|) + i(\arg(y) + 2\pi n)$, где n-целое (23)

$$arctg\left(\frac{x}{z}\right) = -\frac{i}{2}\ln\left(\frac{1+i\frac{x}{z}}{1-i\frac{x}{z}}\right) = -\frac{i}{2}\ln\left(\frac{z+ix}{z-ix}\right) = -\frac{i}{2}(\ln(z+ix) - \ln(z-ix)) =$$

$= -\frac{i}{2}(\ln(|z+ix|) - \ln(|z-ix|) + i(\arg(z+ix) + 2\pi n_1) - i(\arg(z-ix) + 2\pi n_2))$ (24)

Но так как $2\pi n_1$ и $2\pi n_2$ будут давать лишь константу, их можно отбросить.

$arctg\left(\frac{x}{z}\right) = -\frac{i}{2}\left(\ln(|z+ix|) - \ln(|z-ix|) + i(\arg(z+ix) - \arg(z-ix))\right)$ (25)

$|\mathrm{z}+\mathrm{ix}| = \sqrt{(\mathrm{x}+\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1}$ (26)

$|\mathrm{iz}+\mathrm{ix}| = \sqrt{(\mathrm{x}+\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\mathrm{x}^2+\sqrt{3}\mathrm{x}+1}$ (27)

$|\mathrm{z}^*+\mathrm{ix}| = \sqrt{(\mathrm{x}-\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\mathrm{x}^2-\mathrm{x}+1}$ (28)

$|\mathrm{iz}^*+\mathrm{ix}| = \sqrt{(\mathrm{x}-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\mathrm{x}^2-\sqrt{3}\mathrm{x}+1}$ (29)

$kz = \left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\frac{i}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2i$ (30)

$k^*z^* = (kz)^* = -2i$ (31)

$\frac{i}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{k}\frac{1}{z}\left(arctg\left(\frac{x}{z}\right) + iarctg\left(\frac{x}{iz}\right)\right) - \frac{1}{k^*}\frac{1}{z^*}\left(arctg\left(\frac{x}{z^*}\right) + iarctg\left(\frac{x}{iz^*}\right)\right)\right) = \frac{i}{\sqrt{3}}$

$\left(\frac{1}{2i}\left(arctg\left(\frac{x}{z}\right) + iarctg\left(\frac{x}{iz}\right)\right) - \frac{1}{-2i}\left(arctg\left(\frac{x}{z^*}\right) + iarctg\left(\frac{x}{iz^*}\right)\right)\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(arctg\left(\frac{x}{z}\right) +$

$+iarctg\left(\frac{x}{iz}\right) + arctg\left(\frac{x}{z^*}\right) + iarctg\left(\frac{x}{iz^*}\right))$ (32)

$$arctg\left(\frac{x}{z}\right) + arctg\left(\frac{x}{z^*}\right) = -\frac{i}{2}\left(\ln(|z+ix|) - \ln(|z-ix|) + i(\arg(z+ix) - \arg(z-ix))\right) -$$

$$-\frac{i}{2}\left(\ln(|z^*+ix|) - \ln(|z^*-ix|) + i(\arg(z^*+ix) - \arg(z^*-ix))\right) = \frac{i}{2}(\ln(|z-ix|) -$$

$$-\ln(|z^*+ix|) + \ln(|z^*-ix|) - \ln(|z+ix|)) + \frac{1}{2}(\arg(z+ix) - \arg(z-ix) + \arg(z^*+ix)$$

$$-\arg(z^*-ix)) = \frac{i}{2}(\ln\left(\frac{|z-ix|}{|z^*+ix|}\right) + \ln\left(\frac{|z^*-ix|}{|z+ix|}\right)) + (\arg(z+ix) - \arg(z-ix)) = \arg(z+ix) -$$

$-\arg(z-ix)$ (33), так как $|z-ix| = |(z-ix)^*| = |z^*+ix|$ (34) и $|z^*-ix| = |z+ix|$ (35), а также $-\arg(z^*-ix) = -\arg((z+ix)^*) = \arg(z+ix)$ (36) и $\arg(z-ix) = -\arg(z^*+ix)$ (36)

$$arctg\left(\frac{x}{iz}\right) + arctg\left(\frac{x}{iz^*}\right) = -\frac{i}{2}\big(\ln(|iz+ix|) - \ln(|iz-ix|) + i(\arg(iz+ix) - \arg(iz-ix))\big) -$$

$$-\frac{i}{2}\big(\ln(|iz^*+ix|) - \ln(|iz^*-ix|) + i(\arg(iz^*+ix) - \arg(iz^*-ix))\big) = \frac{i}{2}(\ln(|iz-ix|) -$$

$$-\ln(|iz^*+ix|) + \ln(|iz^*-ix|) - \ln(|iz+ix|)) + \frac{1}{2}(\arg(iz+ix) - \arg(iz-ix) + \arg(iz^*+ix) -$$

$$-\arg(iz^*-ix)) = i(\ln(|iz-ix|) - \ln(|iz^*+ix|)) + \frac{1}{2}(\arg(iz+ix) - \arg(iz-ix) +$$

$$+\arg(-(iz+ix)^*) - \arg(-(iz-ix)^*)) = i(\ln(|iz-ix|) - \ln(|iz^*+ix|))\ (37)$$

Так как:

$\arg(-(iz+ix)^*) = \pi + \arg((iz+ix)^*) = \pi - \arg(iz+ix)$ (38) и $|iz-ix| = |-(iz^*-ix)^*| =$

$=|iz^*-ix|$ (38)

$\arg(\mathrm{d}) = \mathrm{arctg}\left(\frac{Im(d)}{Re(d)}\right) + \pi j$ (39), где j-целое

$\arg(z+ix) - \arg(z-ix) = \mathrm{arctg}\left(\frac{Im(z+ix)}{Re(z+ix)}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{Im(z-ix)}{Re(z-ix)}\right) + \pi j_1 - \pi j_2$ (40), но так как слагаемое $\pi j_1 - \pi j_2$ добавляет лишь константу к ответу, то его можно не учитывать.

$z + ix = \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + ix$ (41)

$Im(z+ix) = x + \frac{1}{2}$ (42)

$Re(z+ix) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (43)

$|\mathrm{iz}+\mathrm{ix}| = \sqrt{(\mathrm{x}+\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \sqrt{3}\mathrm{x} + 1}$ (44)

$z - ix = \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - ix$ (45)

$Im(z-ix) = -x + \frac{1}{2}$ (46)

$Re(z-ix) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (47)

$|\mathrm{iz}^*+\mathrm{ix}| = \sqrt{(\mathrm{x}+\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\mathrm{x}^2 - \sqrt{3}\mathrm{x} + 1}$ (48)

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(arctg\left(\frac{x}{z}\right) + iarctg\left(\frac{x}{iz}\right) + arctg\left(\frac{x}{z^*}\right) + iarctg\left(\frac{x}{iz^*}\right)\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\arg(z+ix) - \arg(z-ix) +$$

$$+ii(\ln(|iz-ix|) - \ln(|iz^*+ix|))) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\mathrm{arctg}\left(\frac{Im(z+ix)}{Re(z+ix)}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{Im(z-ix)}{Re(z-ix)}\right) +\right.$$

$$+\ln\left(\sqrt{x^2+\sqrt{3}x+1}\right)-\ln\left(\sqrt{x^2-\sqrt{3}x+1}\right)) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{-2x+1}{\sqrt{3}}\right)+$$

$$+\ln\left(\sqrt{x^2+\sqrt{3}x+1}\right)-\ln\left(\sqrt{x^2-\sqrt{3}x+1}\right)) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{-2x+1}{\sqrt{3}}\right)+$$

$+\frac{1}{2}(\ln\left(x^2+\sqrt{3}x+1\right)-\ln\left(x^2-\sqrt{3}x+1\right)))$ (49)

Готово.