Теорема:

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = arctg(x) + \text{C}$$

Доказательство:

Сначала определю логарифм от комплексного перемнного:

Логарифм комплексного числа определяется так, что $\ln(\exp{(z)}) = z$, где $z \in \mathbb{C}$

$\ln(x+iy) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2} * \exp{(i*(arctg\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi k)}\right) =$

$= \ln\left(\exp\left(\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + i*arctg\left(\frac{y}{x}\right) + i*2\pi k\right)\right) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + i*arctg\left(\frac{y}{x}\right) + i*2\pi k$

где $x, y \in \mathbb{R}$, а $k \in \mathbb{Z}$.

Откуда видно, что ln(x)=ln(-x) при равных k

Докажу следующую теорему:

$\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{x-i}{x+i}\right) = arctg(x)$

Доказательство:

$\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right) = arctg(x)$

$\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right) = \frac{1}{2i}\ln(\exp{(i*arctg(x)*2+i*2\pi k)}) = \frac{1}{2i}*i*arctg(x)*2+\pi k = arctg(x)+\pi k$

Но замечу, что при $x = 0$ $\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right) = 0$, то $0 = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right) = arctg(0) + \pi k = \pi k$, то есть $k = 0$

$\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right) = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{(1+ix)*i}{(1-ix)*i}\right) = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{i-x}{i+x}\right) = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{x-i}{x+i}\right) = arctg(x)$ ч.т.д.

Разложу знаменатель дроби $\frac{1}{x^2+1}$ на множители.

Найду сначала корни уравнения $x^2+1=0$

$x_{1,2} = \pm i$

По теореме Безу: $x^2 - 1 = (x-x_1)(x-x_2) = (x-i)(x+i)$

$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \int \frac{1}{(x-i)(x+i)} dx = \frac{1}{2i}\int(\frac{1}{(x-i)} - \frac{1}{(x+i)})dx = \frac{1}{2i}\ln(x-i) - \frac{1}{2i}\ln(x+i) + \text{C} =$

$= \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{x-i}{x+i}\right) + \text{C} = arctg(x) + C$