

Пример нахождения подхода к решению задачи по аналогии с теорией квадратичных вычетов.
Никишин Максим, 57 школа, 2021 год.

Рассмотрим задачу :

Пусть натуральные числа $n > 20$ и $k > 1$ такие, что n делится на k^2 . Докажите, что найдутся натуральные числа a, b, c такие что $n = ab + bc + ca$.

Рассмотрим p -наибольший простой делитель числа k , тогда $k^2 : p^2$ и $n : k^2 : p^2 \Rightarrow n = p^2 x, x \in \mathbb{N}$
 $p \geq 5$, так как в противном случае в силу его простоты $p \leq 3$ и тогда $9x \geq p^2 x = n > 20, \Rightarrow x \geq 3 \geq p \Rightarrow x \geq p$, противоречие

Рассмотрим два случая :

1 : $x \geq p$;

Тогда определим a, b и c как :

$$a = p, b = p^2 - p \text{ и } c = x + 1 - p$$

Тогда выполняется равенство $n = ab + bc + ca$

2 : $x < p$;

Тогда $p \geq 5$, так как в противном случае в силу его простоты $p \leq 3$ и тогда $9x \geq p^2 x = n > 20, \Rightarrow x \geq 3 \geq p \Rightarrow x \geq p$, противоречие.

Пусть $n = 2m + 1, m \in \mathbb{N}$. Определим a, b и c как

$$a = 1; b = m; c = 1;$$

Пусть $n = 4m, m \in \mathbb{N}$. Определим a, b и c как

$a = 2; b = m - 1; c = 2$ и условие, требуемое в задаче, выполнено.

Заметим, что остался неразобраным лишь случай $n \equiv 2 \pmod{4}$, так как случаи $n \equiv 1 \pmod{4}$ и $n \equiv 3 \pmod{4}$ разобраны в случае $n = 2m + 1$, а если n делится на 4, то это совпадает со случаем $n = 4m$.

Так как $p^2 \equiv 1 \pmod{4}$, то при $n \equiv 2 \pmod{4}$ $x \equiv 2 \pmod{4}$ то есть $x = 4y + 2$, $y \in \mathbb{N} \Rightarrow x + 1 = 4y + 3$, тогда существует натуральное $q : q \mid x + 1$ вида $4d + 3, d \in \mathbb{N}$
 $x + 1 : q \Leftrightarrow x \equiv -1 \pmod{q}$

Пусть α остаток при делении p на q , тогда $n = p^2 x \equiv -p^2 \equiv -\alpha^2 \pmod{q}$, при этом $p \geq x + 1 \geq q, x > 1 \Rightarrow n = p^2 x > p^2 \geq q^2 \Rightarrow n > q^2$.

Значит $\exists t \in \mathbb{N} : n = qt - \alpha^2 = q(t - \alpha + \alpha) - \alpha^2 = \alpha(t - \alpha) + (q - \alpha)(t - \alpha) + \alpha(q - \alpha)$.

$\alpha(q - \alpha) < q^2 < n \Rightarrow t - \alpha > 0$.

Определим a, b и c как : $a, q - \alpha$ и $t - \alpha$ соответственно. \square