Пример нахождения подхода к решению задачи по аналогии с теорией квадратичных вычетов.

Никишин Максим, 57 школа, 2021 год.

Рассмотрим задачу:

Пусть натуральные числа $n > 20$ и $k > 1$ такие, что n делится на k^2. Докажите, что найдутся натуральные числа a, b, c такие что $n = ab + bc + ca$.

Рассмотрим p–наибольший простой делитель числа k,
тогда $k^2 \vdots p^2$ и $n \vdots k^2 \vdots p^2 \Rightarrow n = p^2 x,\ x \in \mathbb{N}$
$p \geq 5$, так как в противном случае в силу его простоты $p \leq 3$ и тогда
$9x \geq p^2 x = n > 20,\ \Rightarrow x \geq 3 \geq p \Rightarrow x \geq p$, противоречие

Рассмотрим два случая:

1 : $x \geq p$;

Тогда определим a, b и c как:

$a = p$, $b = p^2 - p$ и $c = x + 1 - p$

Тогда выполняется равенство $n = ab + bc + ca$

2 : $x < p$;

Тогда $p \geq 5$, так как в противном случае в силу его простоты $p \leq 3$ и тогда
$9x \geq p^2 x = n > 20,\ \Rightarrow x \geq 3 \geq p \Rightarrow x \geq p$, противоречие так как по преположению $x < p$.

Пусть $n = 2m + 1,\ m \in \mathbb{N}$. Определим a, b и c как
$a = 1;\ b = m;\ c = 1;$

Пусть $n = 4m,\ m \in \mathbb{N}$. Определим a, b и c как
$a = 2;\ b = m - 1;\ c = 2$ и условие, требуемое в задаче, выполнено.

Заметим, что остался неразобранным лишь случай $n \equiv 2 \pmod 4$,
так как случаи $n \equiv 1 \pmod 4$ и $n \equiv 3 \pmod 4$ разобраны в случае $n = 2m + 1$,
а если n делится на 4, то это совпадает со случаем $n = 4m$.

Так как $p^2 \equiv 1 \pmod 4$, то при $n \equiv 2 \pmod 4$ $x \equiv 2 \pmod 4$ то есть $x = 4y + 2$,
$y \in \mathbb{N} \Longrightarrow x + 1 = 4y + 3$, тогда существует натуральное $q : q \mid x + 1$ вида $4d + 3$, $d \in \mathbb{N}$
$x + 1 \vdots q \Longleftrightarrow x \equiv -1 \pmod q$

Пусть α остаток при делении p на q, тогда $n = p^2 x \equiv -p^2 \equiv -\alpha^2 \pmod q$,
при этом $p \geq x + 1 \geq q,\ x > 1 \Longrightarrow n = p^2 x > p^2 \geq q^2 \Longrightarrow n > q^2$.

Значит $\exists\ t \in \mathbb{N} : n = qt - \alpha^2 = q(t - \alpha + \alpha) - \alpha^2 = \alpha(t - \alpha) + (q - \alpha)(t - \alpha) + \alpha(q - \alpha)$.

$\alpha(q - \alpha) < q^2 < n \Longrightarrow t - \alpha > 0$.
Определим a, b и c как: α, $q - \alpha$ и $t - \alpha$ соответственно.□