Точка Микеля и её свойства

Пелишенко Михаил, 9 класс

ГБОУ Школа 2086

Содержание

1 Введение

Историческая справка

Огюст Микель – французский математик первой половины XIX века. Родился примерно в 1816 году, умер в 1851. В 1836 году Микель опубликовал в журнале *Le Geometre* доказательства теорем, сформулированных Якобом Штейнером (плодотворный швейарский математик). Ранее доказательства нигде не публиковались.

Актуальность

Различные конструкции вокруг точки Микеля четырёх прямых имеют идеологически разные решения; они связаны с теормой Симсона, прямой Обера, поворотной гомотетией, инверсией, и прочим. Поэтому я нахожу эту тему достойной исследования.

2 Базовые факты и теоремы

Направленные углы

Направленным углом $\measuredangle(\ell_1, \ell_2)$ между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 называют угол, на который надо повернуть прямую ℓ_1 против часовой стрелки, чтобы получить прямую, параллельную ℓ_2 . Значение направленного угла определено с точностью до 180°. Определим $\measuredangle ABC$ как $\measuredangle(AB, BC)$. Основные свойства направленных углов:

- $\measuredangle(\ell_1, \ell_2) = -\measuredangle(\ell_2, \ell_1)$;
- $\measuredangle(\ell_1, \ell_2) + \measuredangle(\ell_2, \ell_3) = \measuredangle(\ell_1, \ell_3); \measuredangle ABO + \measuredangle OBC = \measuredangle ABC$;
- $\measuredangle(\ell_1, \ell_2) = 0° \iff \ell_1 || \ell_2$; $\measuredangle ABC = 0° \iff A, B, C$ лежат на одной прямой;
- $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC \iff A, B, C, D$ лежат на одной окружности или прямой;
- $\measuredangle ABC = -\measuredangle ACB \iff AB = AC$ или A, B, C лежат на одной прямой.

Через (XYZ) обозначается описанная окружность треугольника XYZ.

Теорема Микеля

Пусть ABC -— треугольник с произвольными точками A', B' и C' соответственно на сторонах BC, AC и AB (или на их продолжениях). Опишем три окружности около треугольников $AB'C'$, $A'BC'$, и $A'B'C$. Теорема Микеля утверждает, что эти три окружности пересекутся в одной точке M.

Доказательство очевидно.

Теорема Симсона

Проекции точки P на стороны треугольника лежат на одной прямой (прямой Симсона) тогда и только тогда, когда P принадлежит его описанной окружности.

Точки симметричные P относительно прямых, содержащих стороны треугольника, лежат на одной прямой (прямой Штейнера) тогда и только тогда, когда $P \in (ABC)$.

Основное свойство – все прямые Штейнера пересекаются в ортоцентре треугольника.

Доказательство и подборку задач смотрите в [1].

Поворот

Фиксирована точка O и α – мера угла. **Поворотом** с центром в точке O на угол α против часовой стрелке является преобразование плоскости, при котором каждой точке A сопоставляется A_1 такая, что $\angle AOA_1 = \alpha$ и $OA = OA_1$

Свойства

1. Поворот является движением, не меняющим ориентацию.
2. Угол между прямой и её образом равен углу поворота.

Гомотетия

Фиксирована точка O и k$\in \mathbb{R}$ и $\neq 0$ Гомотетия с центром в точке O и коэффицентом k – это преобразование плоскости, которое каждой точке A сопоставляется точка A_1 такая, что $\overrightarrow{OA_1}$ = k $\times$ $\overrightarrow{OA}$

Свойства

1. Образом всякой фигуры F является фигура, подобная ей.
2. Рассмотрим гомотетию с коэффицентом k. A_1, B_1 – образы точек A и B. Тогда $\mid \overrightarrow{A_1B_1} \mid = \mid k \mid \times \mid \overrightarrow{AB} \mid$
3. Гомотетия не меняет ориентацию плоскости

Композиция гомотетии и поворота на не нулевой угол с одним центром – поворотная гомотетия. Она не меняет ориентацию плоскости, так как является композицией двух преобразований, не меняющих ориентацию. Также истинно, что угол между прямой и её образом равен углу поворота.

О повороте и гомотетии можно почитать в стандартном учебнике по геометрии, например в [3].

Инверсия

Пусть на плоскости дана окружность S с центром O и радиусом R. Инверсией относительно окружности S называют преобразование, переводящее произвольную точку A, отличную от O, в точку A^*, лежащую на луче OA на расстоянии $OA^* = R^2/OA$ от точки O. Инверсию относительно S будем также называть инверсией с центром O и степенью R^2, а окружность S – окружностью инверсии. Всюду в этом проекте образ точки A при инверсии обозначается через A^*.

Из определения инверсии вытекает, что точки окружности S она оставляет на месте, точки, лежащие внутри S, переводит наружу, а точки, лежащие вне S, — внутрь S. Если точка A переходит при инверсии в A^*, то точку A^* эта инверсия переводит в A, то есть $(A^*)^* = A$. Образом прямой, проходящей через центр инверсии, является сама эта прямая. В этом месте надо сделать оговорку, связанную с тем, что инверсия не является в строгом смысле слова преобразованием плоскости, так как точка O никуда не переходит. Поэтому формально мы не имеем права говорить об «образе прямой, проходящей через точку O», а должны рассматривать объединение двух лучей, получающихся из прямой выбрасыванием точки O. Аналогично обстоит дело и с окружностями, содержащими точку O. Но, тем не менее, будем придерживаться этих нестрогих формулировок.

Сформулируем важнейшие свойства инверсии, постоянно применяемые при решении задач. При инверсии с центром O:

1. прямая ℓ, не содержащая O, переходит в окружность, проходящую через O;
2. Окружность, проходящая через O, переходит в прямую;
3. Окружность, не проходящая через O, переходит в окружность, не проходящую через O;

Доказательства свойств смотрите в [2]

3 Точка Микеля

Даны четыре прямые общего положения. При их пересечении образуется 4 треугольника. Тогда окружности, описанные около них пересекаются в одной точке – точке Микеля.

Введём обозначения:

Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке E, а лучи DA CB в F. Окружности описанные около треугольников BCE и BAF пересекаются в точках B и X.

Доказать, что $CDFX$ – вписанный четырёхугольник.

Доказательство 1

Заметим, что $\measuredangle BXC = \measuredangle BEC$ как вписанные, $\measuredangle BEC$ совпадает с $\measuredangle AED$, следовательно, $\measuredangle BXC = \measuredangle AED$. Четырёхугольник $BAFX$ вписанный, следовательно, $\measuredangle FXB = \measuredangle FAB = \measuredangle DAE$. $\measuredangle FXB + \measuredangle BXC = \measuredangle DAE + \measuredangle AED \Longrightarrow \measuredangle FXC = \measuredangle ADE$, $\measuredangle ADE$ совпадает с $\measuredangle FDC \Longrightarrow \measuredangle FXC = FDC$. Таким образом, $CDFX$ – вписанный четырёхугольник(так как F, D, C не лежат на одной прямой). Аналогично, $DAXE$ – тоже вписанный четырёхугольник. Следовательно, описанные окружности треугольнков EBC, FAB, EAD и FCD пересекаются в одной точке – точке Микеля.

Увы, картинки никак не получилось прикрепить...

Доказательство 2

Пусть существует поворотная гомотетия с центром в точке X, переводящая отрезок AD в BC ($A \to B, D \to C$). Тогда угол поворота равен ориентированному углу между прямыми DA и CB. $\Longleftrightarrow \measuredangle AXB = \measuredangle AFB$ и $\measuredangle DXC = \measuredangle DFC$. Следовательно, центром поворотной гомотетии(при предположении о его существовании) является одна из точек пересечения (AFB) и (DFC).

Если X совпадает с F, то $\frac{FA}{FB} = \frac{FD}{FC}$, что свидетельствует о подобии треугольников FAB и FDC, из чего следует параллельность прямых AB и DC, но они пересекаются в точке E по условию. Противоречие. Следовательно, если существует поворотная гомотетия, переводящая A в B, D в C, то её центр – точка пересечения окружностей (AFB) и (DFC), отличная от F; обозначим её за X. Проверим, что $\triangle XAD \sim \triangle XBC$. $\measuredangle XCB = \measuredangle XCF = \measuredangle XDF = \measuredangle XDA$, $\measuredangle XAF = \measuredangle XBF$, следовательно, $\measuredangle XAD = \measuredangle XBC$. Поэтому, $\triangle XAD \sim \triangle XBC$, таким образом X – центр поворотной гомотетии. Следовательно, $\frac{XA}{XD} = \frac{XB}{XC}$ и $\measuredangle AXB = \measuredangle DXC$, следовательно $\triangle XAB \sim \triangle XDC$. Следовательно, X, также, – центр поворотной гомотетии, переводящей A в D, B в C. Следовательно, X принадлежит окружностям (CEB) и (DAE). Следовательно, (CDF), (ABF), (AED) и (BEC) пересекаются в одной точке – точке Микеля.

4 Конструкция о поворотной гомотетии

Задача 1

Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ такой что, стороны BC и AD не параллельны. Пусть E и F – внутринние точки отрезков BC и AD такие, что $\frac{BE}{EC} = \frac{DF}{FA}$. Прямые AC и BD пересекаются в точке R. Отрезок EF пересекает диагонали AC и BD в точках P и Q соответственно. Рассмотрим треугольники PQR, получаемые для всех точек E и F. Доказать, что все окружности, описанные около рассматриваемых треугольников, имеют общую точку, оличную от R.

Решение Не умаляя общности, можно считать, что лучи CB И DA пересекаются.

Рассмотрим точку Микеля прямых BC, AD, AC и BD – точку X. Докажем, что X – искомая точка. X – центр поворотной гомотетии, переводящей C в A, B в D. Образом точки E является F, так как $\frac{BE}{EC} = \frac{DF}{FA}$. Таким образом, X – также точка Микеля прямых EF, AC, BC и AD. Следовательно, четырёхугольник $PFAX$ вписанный. Аналогично получается вписанность $DQXF$. Следовательно, X – точка Микеля прямых AC, AD, BD и EF. Следовательно, $X \in (PQR)$. Следовательно, все окружности, описанные около рассматриваемых треугольников, содержат точку X.

5 Конструкции вокруг теоремы Симсона

Задача 1

Докажите, что проекции точки Микеля четырёх прямых на них лежат на одной прямой.

Доказательство.

Точка Микеля лежит на четырёх описанных окружностях образовавшихся треугольников. Следовательно, по теореме Симсона, её проекции на любые три из четырёх прямых лежат на одной прямой. Следовательно, все четыре проекции лежат на одной прямой(прямые Симсона точки Микеля для четырёх треугольников совпали)

Задача 2. Прямая Обера

Рассмотрим черыре прямые общего положения. Тогда ортоцентры четырёх образованных ими треугольников лежат на одной прямой – прямой Обера.

Доказательство

Так как прямые Симсона точки Микеля для четырёх треугольников совпали, то и прямые Штейнера совпадут. Ортоцентр каждого из треугольников лежит на прямой Штейнера соответствующего треугольника. Следовательно все ортоцентры лежат на одной прямой. Что и требовалось доказать.

Задача 3

Четыре прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности, проходящеё через точку Микеля.

Лемма

Даны точки A, B, C лежащие на одной пряой в указанном порядке и точка X вне неё. Тогда O_C, O_A и O_B, центры описанных окружностей около теругольников ABX, BCX и ACX, лежат на окружности, проходящеё через X.

Даказательство.

Проекции X на O_CO_A, O_BO_A и O_CO_B – середины XB, XC и XA соответственно. Они лежат на одной прямой, так как точки А, B и C коллинеарны. Тогда по теореме Симсона $X \in (O_AO_BO_C)$. Что и тебовалось доказать.

Вернёмся к решению задачи. Будем пользоваться обозначенимя, что и при доказательстве существования точки Микеля. Очевидно, что если доказать, что три из четырёх центров лежат на окружности, проходящей через точу Микеля, то все четыре лежат на этой окружноти.

Тогда, окружности (ABF), (AED) и (DFC) совпадают с (AXF), (AXD) и FXD. Точки F, A и D лежат на одной прямой, X вне неё. Следовательно, центры (AXF), (AXD) и FXD лежат на окружности, проходящей через X по лемме. Следовательно, центры (ABF), (AED) и (DFC) лежат на окружности, проходящей через X. Следовательно, все 4 центра лежат на этой окружности. Что и требовалось доказать.

6 Конструкции об инверсии

Лемма 1

Даны четыре окружности S_1, S_2, S_3, S_4. S_1 и S_2 пересекаются в точках A_1 и A_2, S_2 и S_3 – в точках B_1 и B_2, S_3 и S_4 – в точках C_1 и C_2, S_4 S_1 – в точках D_1 и D_2. Докажите, что если A_1, B_1, C_1 и D_1 лежат на одной окружности или прямой ℓ, то A_2, B_2, C_2 и D_2 тоже лежат на одной окружности или на одной прямой.

Доказательство 1

Сделаем инверсию с центром в точке A_1. Образами S_1 и S_2 являются прямые $A_2^*D_1^*$ (D_2^* ей принадлежит) и $A_2^*B_1^*$ (B_2^* ей принадлежит). Образы S_3 и S_4 – $(B_1^*B_2^*C_2^*C_1^*)$ и $(C_2^*C_1^*D_1^*D_2^*)$. Образы точек B_1, C_1 и D_1 будут лежать на одной прямой, так как образ прямой или окружности, проходящей через центр инверсии – прямая. Тогда, по теореме Микеля $C_2^* \in (A_2^*B_2^*D_2^*)$. Следовательно, образы лежали на одной окружности или прямой. Что и требовалось доказать.

Доказательство 2

$\measuredangle A_2B_2C_2 = \measuredangle A_2B_2B_1 + \measuredangle B_1B_2C_2 = \measuredangle A_2A_1B_1 + \measuredangle D_1C_1C_2 = \measuredangle A_2D_2D_1 + \measuredangle D_1D2C_2 = \measuredangle A_2D_2C_2$. Следовательно, A_2, B_2, C_2 и D_2 лежат на одной окружности или на одной прямой.

Лемма 2

Дано не меньше 5 окружностей и прямых $S_1, S_2, \dots, S_n$ таких, что что любые три из них имеют общую точку. Докажите, что тогда все окружности и прямые имеют общую точку.

Доказательство

Если S_i и S_j имеют ровно одну точку пересечения, то все остальные окружности и прямые, очевилно, проходят через неё. Следовательно, S_1, S_2, $\dots$, S_n проходят через эту точку.

Пусть S_i и S_j пересекаются в двух точках для любых i и j. Следовательно, всего проведено не более одной прямой, если она есть, обозначим её за S_1. Пусть A – общая точка S_1, S_2 и S_3. Обозначим точки пересечения окружностей S_1 и S_2, S_2 и S_3, S_3 и S_1 через B, C, D соответственно. Предположим, что существует окружность S, не проходящая через точку A. Тогда S проходит через точки B, C, D. Пусть S' – пятая окружность. Каждая пара точек из набора A, B, C, D является парой точек пересечения двух из окружностей S_1, S_2 и S_3, S. Поэтому окружность S' проходит через одну точку из каждой пары точек A, B, C, D. Следовательно, S' проходит хотя бы через 3 из точек, иначе, понятно, что она не будет содержать точку из какой-то пары. Следовательно, S' совпадает с одной из окружностей S_1, S_2 и S_3 и S. Противоречие. Следовательно, S_1, S_2, ... , S_n имеют общую точку.

Теорема Микеля о пяти окружностях

Пусть даны 5 прямых общего положения. Докажите, что точки Микеля всех пяти возможных четвёрок прямых лежат на одной окружности или прямой.

Доказательство Обозначим прямые: $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5$ Обозначим точку пересечения прямых ℓ_i и ℓ_j через A_{ij}, а точку Микеля всех прямых, кроме ℓ_i, через X_i. Достаточно доказать, что X_1, X_2, X_3 и X_4 лежат на одной окружности. Рассмотрим окружности $(X_1X_2A_{35}A_{45})$, $(X_2X_3A_{15}A_{45})$, $(X_3X_4A_{15}A_{25})$ и $(A_4A_1X_{25}X_{35})$. Точки A_{15} A_{25}, A_{35}, A_{45} лежат на прямой ℓ_5. Следовательно, по лемме 1 точки X_1, X_2, X_3 и X_4 лежат на одной окружности или на одной прямой.

Основная задача

Рассмотрим n прямых общего положения. В случае, когда $n = 4$, мы доказали существование точки Микеля, когда $n = 5$ доказано, что пять точек Микеля лежат на одной окружности или прямой. Оказывается, что эту цепочку можно продолжить, поставив в соответствие каждому набору из n прямых общего положения точку при четном n и окружность или прямую при нечетном n, так, что n окружностей/прямых (точек), соответствующих наборам из $n-1$ прямых, проходят через эту точку (лежат на этой окружности или прямой).

Докажем утверждение задачи по индукции по числу прямых n, отдельно рассматривая случай чётного и нечётного n.

База для n равного 4 и 5 уже доказана. 3 прямым сопоставим окружность, описанную около образованного ими треугольника, 2 – их точку пересечения.

Предположение: для $n-1$, $n-2$, $n-3$ и $n-4$ утверждение верно.

Переход:

1)n нечётно

Обозначим через A_i точку, соответствующую набору из $n-1$ прямой, получаемому отбрасыванием прямой ℓ_i, а через A_{ijk} – точку, соответствующую набору из $n-3$ прямых без прямых ℓ_i, ℓ_j и ℓ_k. Обозначим через S_{ij} и S_{ijkm} окружности(или прямые), соответствующие наборам из $n-2$ и $n-4$ прямых, получаемых отбрасыванием прямых ℓ_i, ℓ_j и ℓ_i, ℓ_j и ℓ_k, ℓ_m. Для того чтобы доказать, что n точек A_1, A_2, ... , A_n лежат на одной окружности или прямой, достаточно доказать, что любые четыре из них лежат на одной окружности(или прямой). Докажем это для точек A_1, A_2, A_3 и A_4. Поскольку точки A_i и A_{ijk} лежат на S_{ij}, то окружности S_{12} и S_{23} пересекаются в точках A_2 и A_{123}, окружности S_{23} и S_{34} – в точках A_3 и A_{234}, окружности S_{34} и S_{41} – в точках A_4 и $A_1 34$, окружности S_{14} и S_{12} – в точках A_1 и $A_1 24$. Точки A_{123}, A_{234}, $A_1 34$ и $A_1 24$ лежат на одной окружности или прямой – S_{1234}, поэтому согласно лемме 1 точки A_1, A_2, A_3 и A_4 лежат на одной окружности или прямой.

2)Пусть теперь n четно. Получено, что если n≥5 достаточно доказать, что любыае 3 окружностипо лемме 2

Доказательство не завершено.

Список литературы

[1] Д. Швецов. От прямой Симсона до теоремы Дроз-Фарни – «Квант», 2009, № 6.

[2] В. Уроев. Инверсия – «Квант», 1984, № 5.

[3] А. Мерзляк и В. Поляков – Геометрия, 9 класс.