

Конструкции вокруг точки Микеля

Пелишенко Михаил, 9 класс

ГБОУ Школа 2086

Содержание

1	Введение	3
2	Базовые факты и теоремы	3
3	Точка Микеля	6
4	Конструкции об инверсии	7
5	Конструкция о поворотной гомотетии	11
6	Конструкции вокруг теоремы Симсона	12

1 Введение

Цель исследования

Целью работы является доказательство теоремы о существовании точки или окружности Микеля для n прямых (точная формулировка основного результата приведена в разделе Конструкции об инверсии/Основная задача). Также в этом проекте будет рассмотрен ряд теорем, в которых так или иначе фигурирует точка Микеля. По ходу их доказательств будут продемонстрированы различные подходы к задачам: теорема Симсона, поворотная гомотетия, инверсия.

Историческая справка

Огюст Микель – французский математик первой половины XIX века. Родился примерно в 1816 году, умер в 1851. В 1836 году Микель опубликовал в журнале *Le Geometre* доказательства теорем, сформулированных Якобом Штейнером (плодотворный швейцарский математик). Ранее доказательства нигде не предъявлялись.

2 Базовые факты и теоремы

Направленные углы

Направленным углом $\sphericalangle(\ell_1, \ell_2)$ между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 называют угол, на который надо повернуть прямую ℓ_1 против часовой стрелки, чтобы получить прямую, параллельную ℓ_2 . Значение направленного угла определено с точностью до 180° . Определим $\sphericalangle ABC$ как $\sphericalangle(AB, BC)$. Основные свойства направленных углов:

- $\sphericalangle(\ell_1, \ell_2) + \sphericalangle(\ell_2, \ell_3) = \sphericalangle(\ell_1, \ell_3)$; $\sphericalangle ABO + \sphericalangle OBC = \sphericalangle ABC$;
- $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC \iff A, B, C, D$ лежат на одной окружности или прямой;

Через (XYZ) обозначается описанная окружность треугольника XYZ или прямая XY в случае коллинеарности точек.

Инструмент, требуемые для доказательства основного результата

Инверсия

Пусть на плоскости дана окружность S с центром O и радиусом R . Инверсией относительно окружности S называют преобразование, переводящее произвольную точку A , отличную от O , в точку A^* , лежащую на луче OA на расстоянии $OA^* = R^2/OA$ от точки O – центра инверсии.

Внутренность круга, ограниченного S , инверсия переводит во внешнюю область, поскольку из неравенства $OA < R$ следует $OA^* > R$, и наоборот, внешняя область

отображается во внутреннюю. Заметим, что если точку A выбирать всё ближе и ближе к центру инверсии, то OA^* будет неограниченно возрастать, поэтому будем считать, что образом точки O является некая бесконечно удалённая точка.

Заметим, что образом прямой, проходящей через центр инверсии, является сама эта прямая. В этом месте надо сделать оговорку, связанную с тем, что инверсия не является в строгом смысле слова преобразованием плоскости, так как точка O никуда не переходит. Поэтому формально мы не имеем права говорить об «образе прямой, проходящей через точку O », а должны рассматривать объединение двух лучей, получающихся из прямой выбрасыванием точки O . Аналогично обстоит дело и с окружностями, содержащими точку O . Но, тем не менее, будем придерживаться этих нестрогих формулировок.

Сформулируем важнейшие свойства инверсии, постоянно применяемые в ходе проекта.

При инверсии с центром в точке O :

1. Прямая ℓ , не содержащая O , переходит в окружность, проходящую через O ;
2. Окружность, проходящая через O , переходит в прямую, не проходящую через центр инверсии;
3. Окружность, не проходящая через O , переходит в окружность, не проходящую через O ;

Доказательства свойств смотрите в [1]

Дополнение

• Теорема Микеля

Пусть ABC – треугольник с произвольными точками A' , B' и C' соответственно на сторонах BC , AC и AB (или на их продолжениях). Опишем три окружности около треугольников $AB'C'$, $A'BC'$, и $A'B'C$. Теорема Микеля утверждает, что эти три окружности пересекутся в одной точке.

• Теорема Симсона

Проекции точки P на стороны треугольника лежат на одной прямой (прямой Симсона) тогда и только тогда, когда P принадлежит его описанной окружности.

Точки симметричные P относительно прямых, содержащих стороны треугольника ABC , лежат на одной прямой (прямой Штейнера) тогда и только тогда, когда $P \in (ABC)$. Основное свойство заключается в том, что все прямые Штейнера пересекаются в ортоцентре треугольника.

Доказательство и подборку задач смотрите в [2].

- **Поворот**

Фиксирована точка O и мера угла α . *Поворотом* с центром в точке O на угол α против часовой стрелки является преобразование плоскости, при котором каждой точке A сопоставляется A_1 такая, что $\angle AOA_1 = \alpha$ и $OA = OA_1$.

Основным свойством является то, что направленный угол между прямой и её образом равен углу поворота.

- **Гомотетия**

Фиксирована точка O и $k \in \mathbb{R}$ и $\neq 0$. Гомотетия с центром в точке O и коэффициентом k – это преобразование плоскости, которое каждой точке A сопоставляет точку A_1 такую, что $\overrightarrow{OA_1} = k \times \overrightarrow{OA}$.

Будем пользоваться тем, что образом всякой фигуры F является фигура, подобная ей.

- **Поворотная гомотетия**

Композицией гомотетии и поворота на не нулевой угол с одним центром называется *поворотная гомотетия*. Истинно, что отрезок отображается в отрезок, а направленный угол между прямой и её образом равен углу поворота.

О повороте и гомотетии можно прочитать в стандартном учебнике по геометрии, например в [3].

3 Точка Микеля

Даны четыре прямые общего положения. При их пересечении образуется 4 треугольника. Тогда окружности, описанные около них пересекаются в одной точке — *точке Микеля*.

Введём обозначения:

Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке E , а лучи DA и CB в F . Окружности описанные около треугольников BCE и BAF пересекаются в точках B и X .

Доказать, что $CDFX$ и $ADEX$ — вписанные четырёхугольники.

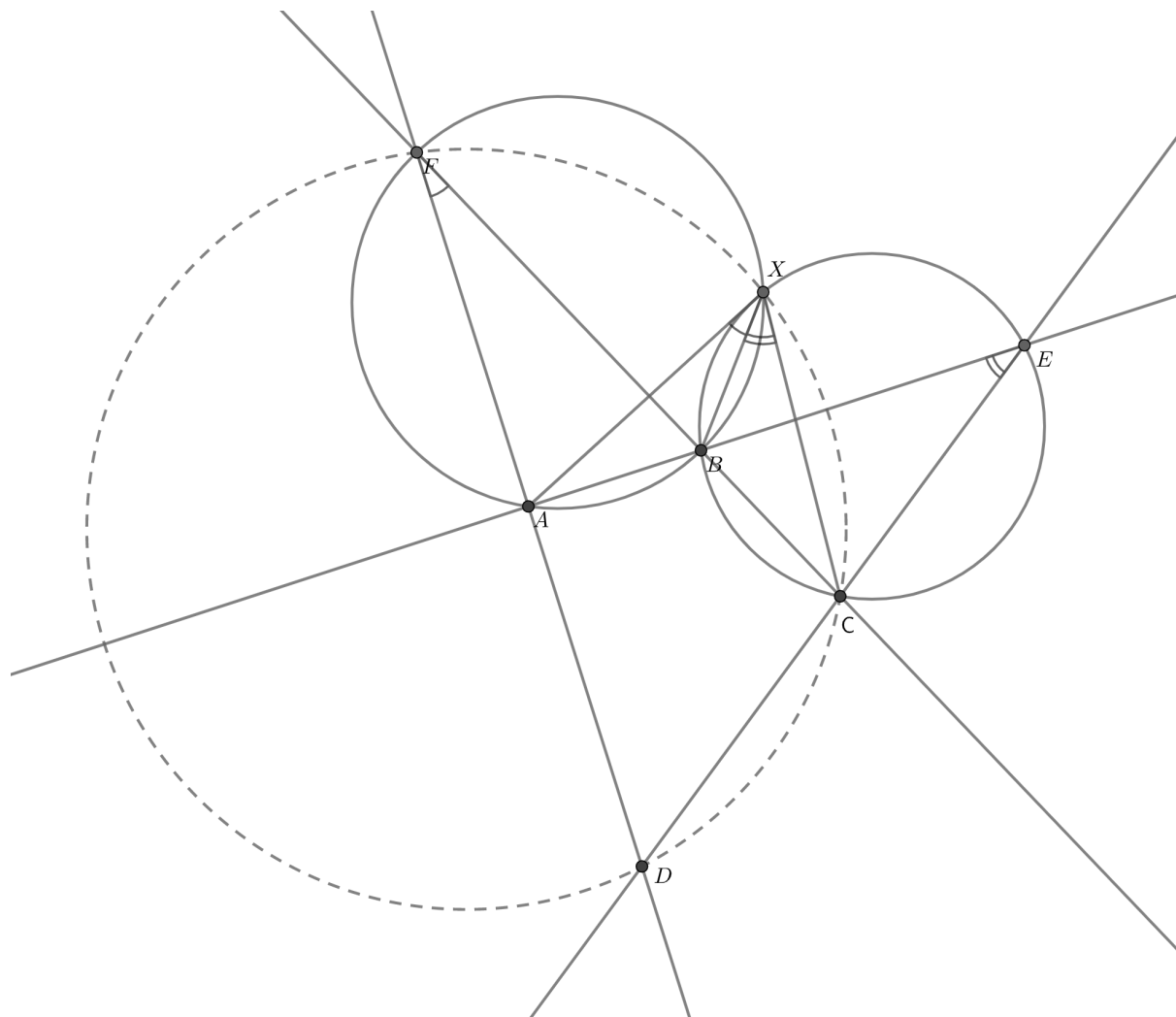


Рис. 1: Точка Микеля

Доказательство 1

Заметим, что $\angle BXC = \angle BEC$ как вписанные, $\angle BEC$ совпадает с $\angle AED$, следовательно, $\angle BXC = \angle AED$. Четырёхугольник $BAFX$ вписанный, поэтому, $\angle FXB = \angle FAB = \angle(FD, AE) = \angle DAE$. Следовательно, $\angle FXC = \angle FXB + \angle BXC = \angle DAE + \angle AED = \angle ADE$, $\angle ADE$ совпадает с $\angle FDC$, поэтому $\angle FXC = \angle FDC$. Таким образом, $CDFX$ — вписанный четырёхугольник (так как F, D, C не лежат на одной прямой). Аналогично, $DAXE$ — тоже вписанный четырёхугольник. Следовательно, окружности, описанные около треугольников EBC, FAB, EAD и FCD пересекаются в одной точке — точке Микеля.

Доказательство 2

Пусть существует поворотная гомотетия с центром в точке X , переводящая отрезок AD в BC ($A \rightarrow B, D \rightarrow C$). Тогда угол поворота равен ориентированному углу между прямыми DA и CB . То есть, $\angle AXB = \angle AFB$ и $\angle DXC = \angle DFC$. Следовательно, центром поворотной гомотетии (при предположении о его существовании) является одна из точек пересечения (AFB) и (DFC) .

Если бы X совпадала с F , то $\frac{FA}{FB} = \frac{FD}{FC}$, что бы свидетельствовало о подобии треугольников FAB и FDC , то есть о параллельности прямых AB и DC , но они пересекаются в точке E по условию. Противоречие. Следовательно, если существует поворотная гомотетия, переводящая A в B, D в C , то её центр — точка пересечения окружностей (AFB) и (DFC) , отличная от F ; обозначим её за X . Проверим, что $\triangle XAD \sim \triangle XBC$: $\angle XCB = \angle XCF = \angle XDF = \angle XDA$, $\angle XAF = \angle XBF$, равносильно тому, что $\angle XAD = \angle XBC$. Поэтому, $\triangle XAD \sim \triangle XBC$, таким образом X — центр поворотной гомотетии. Поскольку истинны соотношения $\frac{XA}{XD} = \frac{XB}{XC}$ и $\angle AXB = \angle DXC$, $\triangle XAB \sim \triangle XDC$. Следовательно, X , также, — центр поворотной гомотетии, переводящей A в D, B в C . Таким образом, X принадлежит окружностям (CEB) и (DAE) . Следовательно, $(CDF), (ABF), (AED)$ и (BEC) пересекаются в одной точке — точке Микеля.

4 Конструкции об инверсии

Лемма 1

Даны четыре окружности или прямые S_1, S_2, S_3, S_4 . Точки пересечения S_1 и S_2 обозначим за A_1 и A_2, S_2 и S_3 — за B_1 и B_2, S_3 и S_4 — за C_1 и C_2, S_4 и S_1 — за D_1 и D_2 . Докажите, что если A_1, B_1, C_1 и D_1 лежат на одной окружности или прямой ℓ , то A_2, B_2, C_2 и D_2 тоже лежат на одной окружности или на одной прямой.

Доказательство 1

Сделаем инверсию с центром в точке A_1 . Образами S_1 и S_2 являются прямые $A_2^*D_1^*$ (D_2^* ей принадлежит) и $A_2^*B_1^*$ (B_2^* ей принадлежит). Образы точек B_1, C_1 и D_1 лежат на одной прямой. Образы S_3 и S_4 — окружности $(B_1^*B_2^*C_2^*C_1^*)$ и $(C_2^*C_1^*D_1^*D_2^*)$. Тогда,

по теореме Микеля для треугольника $A_2^*D_1^*B_1^*$ и окружностей S_3^*, S_4^* и $(A_2^*B_2^*D_2^*)$, $C_2^* \in (A_2^*B_2^*D_2^*)$. Следовательно, прообразы лежали на одной окружности или прямой. Что и требовалось доказать.

Доказательство 2

Все переходы следуют из вписанности. $\angle A_2B_2C_2 = \angle A_2B_2B_1 + \angle B_1B_2C_2 = \angle A_2A_1B_1 + \angle B_1C_1C_2 = \angle A_2A_1D_1 + \angle D_1A_1B_1 + \angle B_1C_1D_1 + \angle D_1C_1C_2 = \angle A_2A_1D_1 + \angle D_1C_1C_2 + (\angle D_1A_1B_1 - \angle D_1A_1B_1) = \angle A_2D_2D_1 + \angle D_1D_2C_2 = \angle A_2D_2C_2$. Следовательно, A_2, B_2, C_2 и D_2 лежат на одной окружности или на одной прямой.

Лемма 2

Даны 4 окружности или прямые S_1, S_2, S_3 и S_4 таких, что все пересекаются в одной точке M . Если S_i и S_j имеют ровно одну общую точку, будем считать, что она кратная. Обозначим точки пересечения S_i и S_j через A_{ij} и M . Утверждается, что $(A_{12}A_{13}A_{23}), (A_{12}A_{24}A_{14}), (A_{13}A_{34}A_{14})$ и $(A_{23}A_{24}A_{34})$ пересекаются в одной точке (возможно в бесконечно далёкой).

Доказательство

Рассмотрим два случая:

- Какие-то две S -ки, пускай S_1, S_2 , имеют ровно одну общую точку. Следовательно, $A_{12} = M$. Поэтому $(A_{12}A_{13}A_{23}), (A_{12}A_{24}A_{14})$ совпадают с $(MA_{13}A_{23}), (MA_{24}A_{14})$, то есть с S_3 и S_4 соответственно. Осталось заметить, что $S_3, S_4, (A_{13}A_{34}A_{14})$ и $(A_{23}A_{24}A_{34})$ пересекаются в одной точке — A_{34} .
- Для любых i и j при пересечении S_i и S_j образуется 2 общие точки. Сделаем инверсию в точке M . Тогда S_1, S_2, S_3 и S_4 перейдут в прямые общего положения. А $(A_{12}A_{13}A_{23}), (A_{12}A_{24}A_{14}), (A_{13}A_{34}A_{14})$ и $(A_{23}A_{24}A_{34})$ перейдут в окружности, описанные около четырёх треугольников, образованных при пересечении S_1^*, S_2^*, S_3^* и S_4^* . Они пересекутся в одной точке — точке Микеля прямых S_1^*, S_2^*, S_3^* и S_4^* . Таким образом, $(A_{12}A_{13}A_{23}), (A_{12}A_{24}A_{14}), (A_{13}A_{34}A_{14})$ и $(A_{23}A_{24}A_{34})$ тоже пересекутся в одной точке.

Что и требовалось доказать.

Теорема Микеля о пяти окружностях

Пусть даны пять прямых общего положения. Докажите, что точки Микеля всех пяти возможных четвёрок прямых лежат на одной окружности или прямой.

Доказательство

Обозначим прямые: l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 . Обозначим точку пересечения прямых l_i и l_j через A_{ij} , а точку Микеля всех прямых, кроме l_i , через X_i . Достаточно доказать, что X_1, X_2, X_3 и X_4 лежат на одной окружности или прямой. Рассмотрим окружности $(X_1A_{35}X_2A_{45}), (X_2X_3A_{15}A_{45}), (X_3A_{15}X_4A_{25})$ и $(X_4X_1A_{35}A_{23}A_{25})$. Точки $A_{15}, A_{25}, A_{35}, A_{45}$ лежат на прямой l_5 . По Лемме 1 точки X_1, X_2, X_3 и X_4 лежат на одной окружности или на одной прямой.

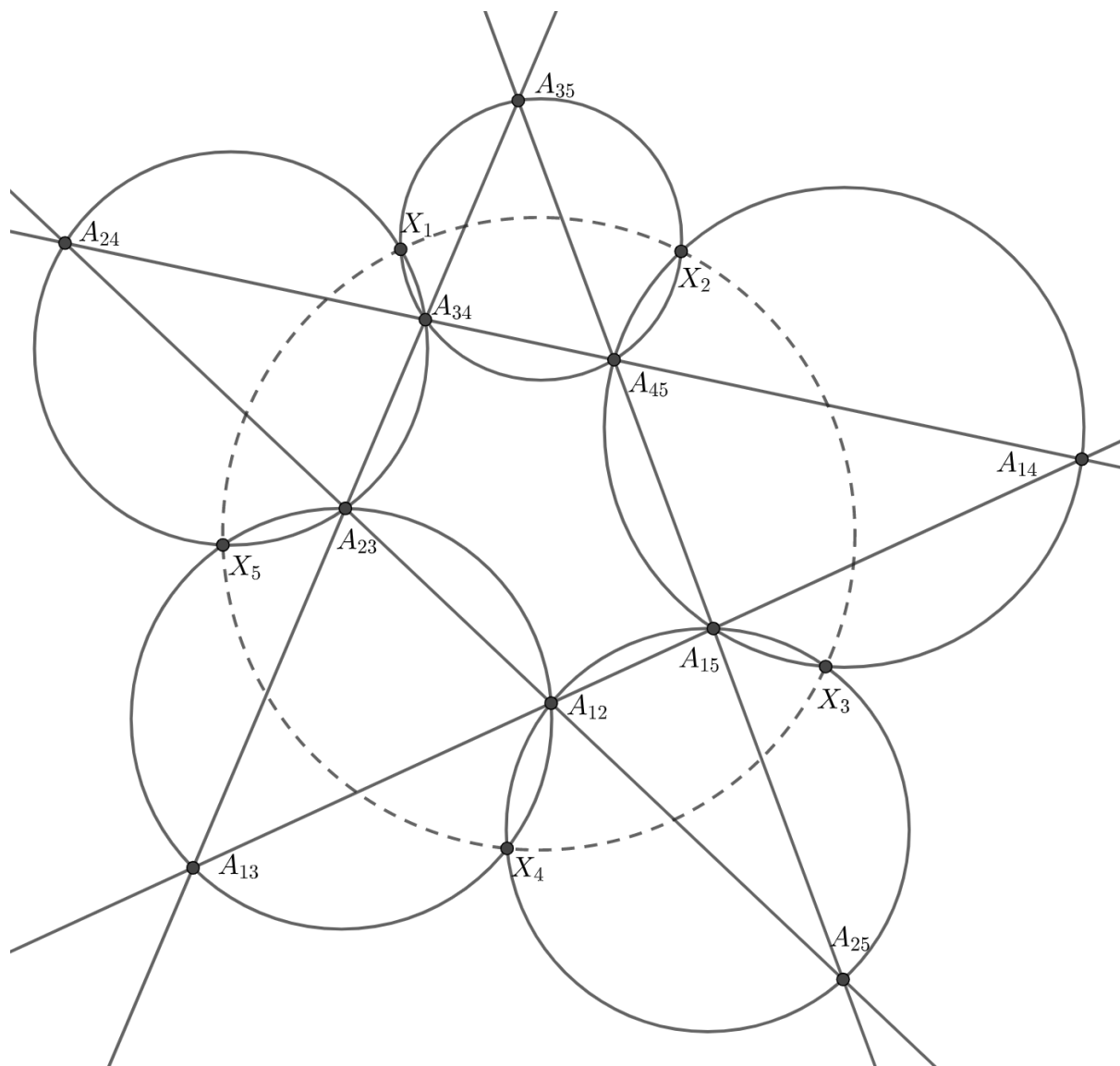


Рис. 2: Теорема Микеля о пяти окружностях

Основная задача

Рассмотрим n прямых общего положения. В случае, когда $n = 4$, мы доказали существование точки Микеля, когда $n = 5$ показано, что пять точек Микеля лежат на одной окружности или прямой. Оказывается, что эту цепочку утверждений можно продолжить, поставив в соответствие каждому набору из n прямых общего положения точку при четном n и окружность или прямую при нечетном n , так, что n окружностей/прямых (точек), соответствующих наборам из $n - 1$ прямых, проходят через эту точку (лежат на этой окружности или прямой).

Докажем утверждение задачи по индукции по числу прямых n , отдельно рассматривая случай чётного и нечётного n .

База для n равного 4 и 5 уже доказана. Двум прямым сопоставим их точку пересечения, трём – окружность, описанную около треугольника, образованного ими.

Предположение: для $n - 1$, $n - 2$, $n - 3$ и $n - 4$ утверждение верно.

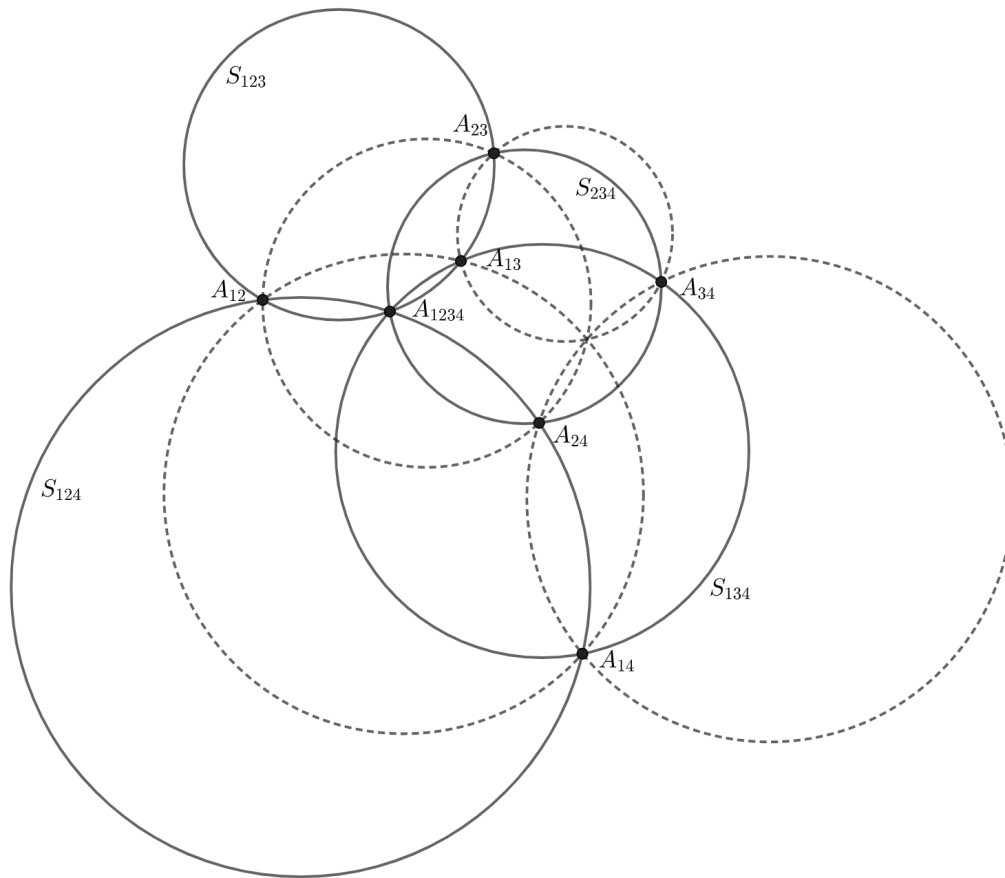


Рис. 3: Случай чётного n

Переход:

1) Пусть n нечётно. Обозначим через A_i точку, соответствующую набору из $n - 1$ прямой, получаемому отбрасыванием прямой l_i , а через A_{ijk} – точку, соответствующую набору из $n - 3$ прямых без прямых l_i, l_j и l_k . Обозначим через S_{ij} и S_{ijklm} окружности или прямые, соответствующие наборам из $n - 2$ и $n - 4$ прямых, получаемых отбрасыванием прямых l_i, l_j и l_i, l_j, l_k, l_m . Для того чтобы доказать, что n точек A_1, A_2, \dots, A_n лежат на одной окружности или прямой, достаточно доказать, что любые четыре из них лежат на одной окружности(или прямой). Докажем это для точек A_1, A_2, A_3 и A_4 . Поскольку точки A_i и A_{ijk} лежат на S_{ij} , S_{12} и S_{23} пересекаются в точках A_2 и A_{123} , S_{23} и S_{34} – в A_3 и A_{234} , S_{34} и S_{41} – в A_4 и A_{134} , S_{14}

и S_{12} — в A_1 и A_{124} . Точки A_{123} , A_{234} , A_{134} и A_{124} лежат на одной окружности или прямой — S_{1234} , поэтому, согласно Лемме 1, точки A_1 , A_2 , A_3 и A_4 лежат на одной окружности или прямой. Что и требовалось доказать.

2) Пусть теперь n чётно. Введём обозначения: S_i , A_{ij} , S_{ijk} , A_{ijklm} — окружности или прямые и точки, соответствующие наборам из $n-1$, $n-2$, $n-3$ и $n-4$ прямых соответственно. Для того чтобы доказать, что окружности S_1, S_2, \dots, S_n пересекаются в одной точке, достаточно показать, что любые 4 окружности или прямые имеют общую точку. Докажем это, например, для S_1, S_2, S_3 и S_4 . Из определения следует, что S_{ijk} и S_{ijl} пересекаются в точках A_{ij} и A_{ijkl} , а точки A_{ij} , A_{ik} и A_{il} определяют S_i . Получаем, что S_{123} , S_{124} , S_{134} и S_{234} пересекаются в одной точке — A_{1234} . Поэтому, по Лемме 2, $(A_{12}A_{13}A_{14})$, $(A_{12}A_{23}A_{24})$, $(A_{13}A_{23}A_{34})$ и $A_{14}A_{24}A_{34}$, совпадающие с S_1, S_2, S_3 и S_4 соответственно, пересекаются в одной точке. Что и требовалось доказать.

База индукции доказана, переход доказан, следовательно, утверждение верно.

5 Конструкция о поворотной гомотетии

Задача 1

Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ такой что, стороны BC и AD не параллельны. Пусть E и F — внутренние точки отрезков BC и AD такие, что $\frac{BE}{EC} = \frac{DF}{FA}$. Прямые AC и BD пересекаются в точке R . Отрезок EF пересекает диагонали AC и BD в точках P и Q соответственно. Рассмотрим треугольники PQR , получаемые для всех точек E и F . Доказать, что все окружности, описанные около рассматриваемых треугольников, имеют общую точку, отличную от R .

Решение

Рассмотрим точку Микеля прямых BC , AD , AC и BD — точку X . Докажем, что все рассматриваемые окружности содержат X . Точка X — центр поворотной гомотетии, переводящей C в A , B в D . Образом точки E является F , так как $\frac{BE}{EC} = \frac{DF}{FA}$. Поэтому, X также является точкой Микеля прямых EF , AC , BC и AD . Поэтому, четырёхугольник $PAFX$ вписанный. Аналогично получается вписанность $DXQF$. Следовательно, X — точка Микеля прямых AC , AD , BD и EF . Таким образом, $X \in (PQR)$. Следовательно, все окружности, описанные около рассматриваемых треугольников, содержат точку X .

6 Конструкции вокруг теоремы Симсона

Задача 1

Докажите, что проекции точки Микеля четырёх прямых на них лежат на одной прямой.

Доказательство

Точка Микеля лежит на четырёх описанных окружностях образовавшихся треугольников. Следовательно, по теореме Симсона, её проекции на любые три из четырёх прямых лежат на одной прямой. Следовательно, все четыре проекции лежат на одной прямой (прямые Симсона точки Микеля для четырёх треугольников совпали).

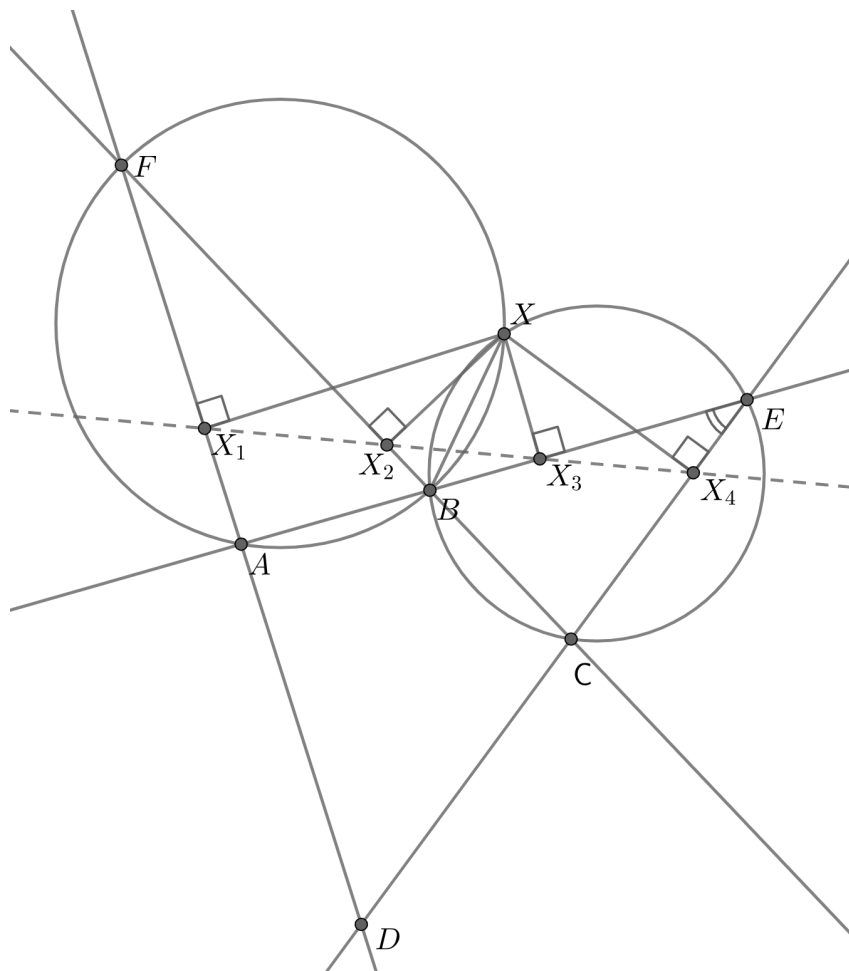


Рис. 4: Проекции точки Микеля

Задача 2. Прямая Обера

Рассмотрим четыре прямые общего положения. Тогда ортоцентры четырёх образованных ими треугольников лежат на одной прямой – прямой Обера.

Доказательство

Так как прямые Симсона точки Микеля для четырёх треугольников совпали, то и прямые Штейнера совпадут. Ортоцентр каждого из треугольников лежит на прямой Штейнера соответствующего треугольника. Следовательно все ортоцентры лежат на одной прямой. Что и требовалось доказать.

Задача 3

Четыре прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности, проходящей через точку Микеля.

Лемма

Даны точки A, B, C лежащие на одной прямой в указанном порядке и точка X вне неё. O_A, O_B и O_C центры описанных окружностей около треугольников BCX, ACX и ABX , лежат на окружности, проходящей через X .

Доказательство

Проекция X на O_AO_B, O_AO_C и O_BO_C — середины XC, XB и XA соответственно. Они лежат на одной прямой, так как точки A, B и C коллинеарны. Тогда по теореме Симсона $X \in (O_AO_BO_C)$. Что и требовалось доказать.

Вернёмся к решению задачи. Будем пользоваться обозначениями, что и при доказательстве существования точки Микеля. Очевидно, что если доказать, что три из четырёх центров лежат на окружности, проходящей через точку Микеля, то все четыре лежат на этой окружности.

Тогда, окружности $(ABF), (AED)$ и (DFC) совпадают с $(AXF), (AXD)$ и FXD . Точки F, A и D лежат на одной прямой, X вне неё. Следовательно, центры $(AXF), (AXD)$ и (FXD) лежат на окружности, проходящей через X по лемме. Следовательно, центры $(ABF), (AED)$ и (DFC) лежат на окружности, проходящей через X . Следовательно, все четыре центра лежат на окружности, содержащей X . Что и требовалось доказать.

Список литературы

- [1] В. Уроев. Инверсия — «Квант», 1984, №5.
- [2] Д. Швецов. От прямой Симсона до теоремы Дроз-Фарни — «Квант», 2009, №6.
- [3] А. Мерзляк и В. Поляков — Геометрия, 9 класс.