# Конструкции вокруг точки Микеля

Пелишенко Михаил, 9 класс

ГБОУ Школа 2086

# Содержание

# 1 Введение

## Цель исследования

Целью работы является доказательство теоремы о существовании точки или окружности Микеля для $n$ прямых(точная формулировка основного результата приведена в разделах «Формулировка утверждения» и «Конструкция об инверсии»/«Утвеждение»). Также в этом проекте будет рассмотрен ряд задач, в которых так или иначе фигурирует точка Микеля. По ходу их доказательств будут продемонстрированы различные подходы к задачам, такие как: теорема Симсона, поворотная гомотетия, инверсия.

## Историческая справка

Огюст Микель — французский математик первой половины XIX века. Родился примерно в 1816 году, умер в 1851. В 1836 году Микель опубликовал в журнале Le Géometre доказательства теорем, сформулированных Якобом Штейнером (плодотворный швейарский математик известный также, например, по *Поризму Штейнера* и *Симметризации Штейнера*). Ранее доказательства нигде не предъявлялись.

# 2 Формулировка утверждения

## Определение

В рамках этого утверждения будем считать, что прямая является окружностью бесконечно большого радиуса, проходящей через бесконечно удалённую точку.

Теперь определим *окружность* или *точку Микеля* для набора из $n$ прямых общего положения в зависимости от чётности числа $n$ индуктивно по числу прямых в наборе.

Пусть дан набор набор из $n$ прямых общего положения.

Набору из двух прямых сопоставим их общую точку, набору из трёх — окружность, проходящую через три точки пересечения. Если $\ell_1$, $\ell_2$, $\ell_3$, $\ell_4$ — четыре прямые общего положения, то четыре окружности $S_i$, сопоставляемые четырём тройкам прямых, получаемых отбрасыванием прямой $\ell_i$, проходят через одну точку(см. раздел «Точка Микеля четырёх прямых»). В случае, когда $n = 5$ будет показано, что пять точек Микеля, сопоставленных всевозможным поднаборам из четырёх прямых, лежат на одной окружности, возможно бесконечно большого радиуса(см. раздел «Конструкции об инверсии»/«Теорема Микеля о пяти окружностях»). Теперь сформулируем утверждение для набора из сколь угодно большого числа прямых.

## Утверждение

Пусть $\ell_i$, $i = 1, \ldots, n$, где $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$ — $n$ прямых общего положения. Тогда, если $n$ нечётно, то $n$ точек Микеля $A_i$, соответствующих наборам прямых, получаемых отбрасыванием прямой $\ell_i$, лежат на одной окружности, возможно бесконечно большого радиуса, — *окружности Микеля $n$ прямых.* Иначе, если $n$ чётно, $n$ окружностей Микеля $S_i$, соответствующих наборам прямых, получаемых отбрасыванием прямой $\ell_i$, пересекаются в одной точке, возможно бесконечно удалённой, — *точке Микеля $n$ прямых.*

# 3 Базовые факты и теоремы

## Направленные углы

Направленным углом $\measuredangle(\ell_1, \ell_2)$ между прямыми $\ell_1$ и $\ell_2$ называют угол, на который надо повернуть прямую $\ell_1$ против часовой стрелки, чтобы получить прямую, параллельную $\ell_2$ . Значение направленного угла определено с точностью до $180°$. Определим $\measuredangle ABC$ как $\measuredangle(AB, BC)$. Основные свойства направленных углов:

- $\measuredangle(\ell_1, \ell_2) + \measuredangle(\ell_2, \ell_3) = \measuredangle(\ell_1, \ell_3)$; $\measuredangle ABO + \measuredangle OBC = \measuredangle ABC$;
- $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC \iff A, B, C, D$ лежат на одной окружности или прямой;

Через $(XYZ)$ обозначается описанная окружность треугольника $XYZ$ или прямая $XY$ в случае коллинеарности точек.

## Инструмент, требуемый для доказательства основного результата

**Инверсия**

Пусть на плоскости дана окружность $S$ с центром $O$ и радиусом $R$. Инверсией относительно окружности $S$ называют преобразование, переводящее произвольную точку $A$, отличную от $O$, в точку $A^*$, лежащую на луче $OA$, такую, что $OA^* = R^2/OA$.

Внутренность круга, ограниченного $S$, инверсия переводит во внешнюю область, поскольку из неравенства $OA < R$ следует $OA^* > R$, и наоборот, внешняя область отображается во внутреннюю. Заметим, что если точку $A$ выбирать всё ближе и ближе к центру инверсии, то длина $OA^*$ будет неограниченно возрастать, поэтому будем считать, что образом точки O является некая бесконечно удалённая точка.

Отметим, что инверсия является преобразованием-инволюцией, то есть преобразованием, обратным самому себе, потому что $OA^{**} = R^2/OA^* = OA$ и точка $A^{**}$ также принадлежит лучу $OA^*$, совпадающим с $OA$.

Заметим, что образом прямой, проходящей через центр инверсии, является сама эта прямая. В этом месте надо сделать оговорку, связанную с тем, что инверсия не является в строгом смысле слова преобразованием плоскости, так как точка $O$ никуда не переходит. Поэтому формально мы не имеем права говорить об «образе прямой, проходящей через точку $O$», а должны рассматривать объединение двух лучей, получающихся из прямой выбрасыванием точки $O$. Аналогично обстоит дело и с окружностями, содержащими точку $O$. Но, тем не менее, будем придерживаться этих нестрогих формулировок.

Сформулируем важнейшие свойства инверсии, применяемые в ходе проекта.

При инверсии с центром в точке $O$:

1. Прямая $\ell$, не содержащая $O$, переходит в окружность, проходящую через $O$;

2. Окружность, проходящая через $O$, переходит в прямую, не проходящую через центр инверсии;

3. Окружность, не проходящая через $O$, переходит в окружность, не проходящую через $O$;

Доказательства свойств смотрите в [1]

## Дополнение

- **Теорема Микеля**

  Пусть $ABC$ — треугольник с произвольными точками $A'$, $B'$ и $C'$ соответственно на сторонах(или на их продолжениях) BC, AC и AB. Опишем три окружности около треугольников $AB'C'$, $A'BC'$, и $A'B'C$. Теорема Микеля утверждает, что эти три окружности пересекутся в одной точке.

- **Теорема Симсона**

  Проекции точки $P$ на стороны треугольника лежат на одной прямой, *прямой Симсона*, тогда и только тогда, когда $P$ принадлежит его описанной окружности.

  Точки симметричные $P$ относительно прямых, содержащих стороны треугольника $ABC$, лежат на одной прямой, *прямой Штейнера*, тогда и только тогда, когда $P \in (ABC)$. Основновное свойство заключается в том, что все прямые Штейнера пересекаются в ортоцентре треугольника.

  Доказательство и подборку задач смотрите в [2].

- **Поворот**

  Фиксирована точка $O$ и мера угла $\alpha$. *Поворотом* с центром в точке $O$ на угол $\alpha$ против часовой стрелки является преобразование плоскости, при котором каждой точке $A$, отличной от $O$, сопоставляется $A_1$ такая, что $\measuredangle AOA_1 = \alpha$ и $OA = OA_1$. Точке $O$ сопоставляется она сама.

  Основным свойством является то, что направленный угол между прямой и её образом равен углу поворота.

- **Гомотетия**

  Фиксирована точка $O$ и $k \in \mathbb{R}, \neq 0$. Гомотетия с центром в точке $O$ и коэффицентом $k$ — это преобразование плоскости, которое каждой точке $A$ сопоставляет точку $A_1$ такую, что $\overrightarrow{OA_1} = k \times \overrightarrow{OA}$.

  Будем пользоваться тем, что образом всякой фигуры $F$ является фигура, подобная ей.

- **Поворотная гомотетия**

  Композицией гомотетии и поворота на не нулевой угол с одним центром называется *поворотная гомотетия*. Истинно, что отрезок отображается в отрезок, а направленный угол между прямой и её образом равен углу поворота.

О повороте и гомотетии можно прочитать в стандартном учебнике по геометрии, например в [3].

# 4 Точка Микеля четырёх прямых

Даны четыре прямые общего положения. При их пересечении образуется 4 треугольника. Тогда окружности, описанные около них пересекаются в одной точке — *точке Микеля* четырёх прямых.

Введём обозначения:

Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Лучи $AB$ и $DC$ пересекаются в точке $E$, а лучи $DA$ и $CB$ в $F$. Окружности описанные около треугольников $BCE$ и $BAF$ пересекаются в точках $B$ и $X$.

Доказать, что $CDFX$ и $ADEX$ — вписанные четырёхугольники.

## Доказательство 1

Заметим, что $\measuredangle BXC = \measuredangle BEC$ как вписанные, $\measuredangle BEC$ совпадает с $\measuredangle AED$, следовательно, $\measuredangle BXC = \measuredangle AED$. Четырёхугольник $BAFX$ вписанный, поэтому, $\measuredangle FXB = \measuredangle FAB = \measuredangle(FD, AE) = \measuredangle DAE$. Следовательно, $\measuredangle FXC = \measuredangle FXB + \measuredangle BXC = \measuredangle DAE + \measuredangle AED = \measuredangle ADE$, $\measuredangle ADE$ совпадает с $\measuredangle FDC$, поэтому $\measuredangle FXC = \measuredangle FDC$. Таким образом, $CDFX$ — вписанный четырёхугольник(так как $F, D, C$ не лежат на одной прямой). Аналогично, $DAXE$ — тоже вписанный четырёхугольник. Следовательно, окружности, описанные около треугольнков $EBC$, $FAB$, $EAD$ и $FCD$ пересекаются в одной точке — точке Микеля четырёх прямых.

## Доказательство 2

Пусть существует поворотная гомотетия с центром в точке $X$, переводящая отрезок $AD$ в $BC$ $(A \to B, D \to C)$. Тогда угол поворота равен ориентированному углу

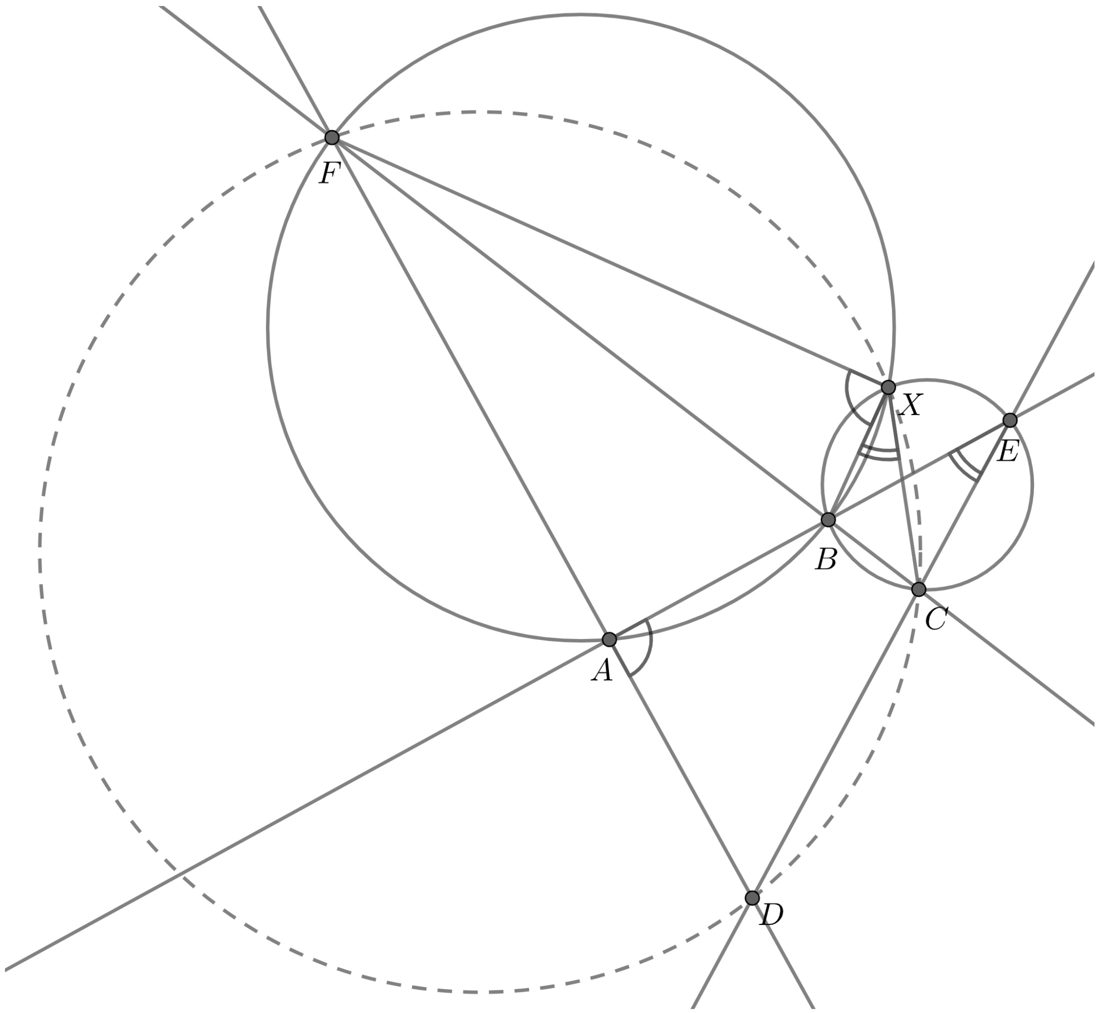


Рис. 1: Точка Микеля

между прямыми $DA$ и $CB$. То есть, $\measuredangle AXB = \measuredangle AFB$ и $\measuredangle DXC = \measuredangle DFC$. Следовательно, центром поворотной гомотетии(при предположении о его существовании) является одна из точек пересечения $(AFB)$ и $(DFC)$.

Если бы $X$ совпадала с $F$, то $\frac{FA}{FB} = \frac{FD}{FC}$, что бы свидетельствовало о подобии треугольников $FAB$ и $FDC$, то есть о параллельности прямых $AB$ и $DC$, но они пересекаются в точке $E$ по условию. Противоречие. Следовательно, если существует поворотная гомотетия, переводящая $A$ в $B$, $D$ в $C$, то её центр — точка пересечения окружностей $(AFB)$ и $(DFC)$, отличная от $F$; обозначим её за $X$. Проверим, что $\triangle XAD \sim \triangle XBC : \measuredangle XCB = \measuredangle XCF = \measuredangle XDF = \measuredangle XDA$, $\measuredangle XAF = \measuredangle XBF$, равносильно тому, что $\measuredangle XAD = \measuredangle XBC$. Поэтому, $\triangle XAD \sim \triangle XBC$, таким образом $X$ — центр поворотной гомотетии. Поскольку истинны соотношения $\frac{XA}{XD} = \frac{XB}{XC}$ и $\measuredangle AXB = \measuredangle DXC$, $\triangle XAB \sim \triangle XDC$. Следовательно, $X$, также, — центр поворотной гомотетии, переводящей $A$ в $D$, $B$ в $C$. Таким образом, $X$ принадлежит окружностям $(CEB)$ и $(DAE)$. Следовательно, $(CDF)$, $(ABF)$, $(AED)$ и $(BEC)$ пересекаются в одной точке — точке Микеля четырёх прямых.

# 5 Конструкции об инверсии

Пусть дан набор из $n$ прямых общего положения.

Набору из двух прямых сопоставим их общую точку, набору из трёх — окружность, проходящую через три точки пересечения. Если $\ell_1$, $\ell_2$, $\ell_3$, $\ell_4$ — четыре прямые общего положения, то четыре окружности $S_i$, сопоставляемые четырём тройкам прямых, получаемых отбрасыванием прямой $\ell_i$, проходят через одну точку(см. раздел «Точка Микеля четырёх прямых»). В случае, когда $n = 5$ будет показано, что пять точек Микеля, сопоставленных всевозможным поднаборам из четырёх прямых, лежат на одной окружности или прямой(см. раздел «Конструкции об инверсии»/«Теорема Микеля о пяти окружностях»). Теперь сформулируем утверждение для набора из сколь угодно большого числа прямых.

## Утверждение

Пусть $\ell_i, i = 1, \ldots, n$, где $n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$ — $n$ прямых общего положения. Тогда, если $n$ нечётно, то $n$ точек Микеля $A_i$, соответствующих наборам прямых, получаемых отбрасыванием прямой $\ell_i$, лежат на одной окружности — *окружности Микеля $n$ прямых*. Иначе, если $n$ чётно, $n$ окружностей Микеля $S_i$, соответствующих наборам прямых, получаемых отбрасыванием прямой $\ell_i$, содержат общую точку — *точку Микеля $n$ прямых*.

Для начала докажем несколько вспомогательных лемм.

## Лемма 1

Даны четыре окружности или прямые $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$. Точки пересечения $S_1$ и $S_2$ обозначим за $A_1$ и $A_2$, $S_2$ и $S_3$ — за $B_1$ и $B_2$, $S_3$ и $S_4$ — за $C_1$ и $C_2$, $S_4$ и $S_1$ — за $D_1$ и $D_2$. Докажите, что если $A_1$, $B_1$, $C_1$ и $D_1$ лежат на одной окружности или прямой $\ell$, то $A_2$, $B_2$, $C_2$ и $D_2$ тоже лежат на одной окружности.

**Доказательство 1**

Сделаем инверсию с центром в точке $A_1$. Образами $S_1$ и $S_2$ являются прямые $A_2^*D_1^*$ ($D_2^*$ ей принадлежит) и $A_2^*B_1^*$ ($B_2^*$ ей принадлежит). Образы точек $B_1$, $C_1$ и $D_1$ лежат на одной прямой. Образы $S_3$ и $S_4$ — окружности $(B_1^*B_2^*C_2^*C_1^*)$ и $(C_2^*C_1^*D_1^*D_2^*)$. Тогда, по теореме Микеля для треугольника $A_2^*D_1^*B_1^*$ и окружностей $S_3^*$, $S_4^*$ и $(A_2^*B_2^*D_2^*)$, $C_2^*$ принадлежит окружности $(A_2^*B_2^*D_2^*)$. Следовательно, прообразы лежали на одной окружности или прямой. Что и требовалось доказать.

**Доказательство 2**

Все переходы следуют из вписанности соответствующих четырёхугольников. $\measuredangle A_2B_2C_2 = \measuredangle A_2B_2B_1 + \measuredangle B_1B_2C_2 = \measuredangle A_2A_1B_1 + \measuredangle B_1C_1C_2 = \measuredangle \mathrm{A}_2A_1D_1 + \measuredangle D_1A_1B_1 + \measuredangle B_1C_1D_1 + \measuredangle D_1C_1C_2 = \measuredangle \mathrm{A}_2A_1D_1 + \measuredangle D_1C_1C_2 + (\measuredangle D_1A_1B_1 - \measuredangle D_1A_1B_1) = \measuredangle A_2D_2D_1 + \measuredangle D_1D_2C_2 =$

$= \measuredangle A_2D_2C_2$. Следовательно, $A_2$, $B_2$, $C_2$ и $D_2$ лежат на одной окружности или на одной прямой. Что и требовалось доказать.

## Теорема Микеля о пяти окружностях

Пусть $\ell_i$, $i = 1, \ldots, 5$ — пять прямых общего положения. Докажите, пять точек Микеля $X_i$, соответствующих наборам прямых, получаемых отбрасыванием прямой $\ell_i$, лежат на одной окружности или прямой.

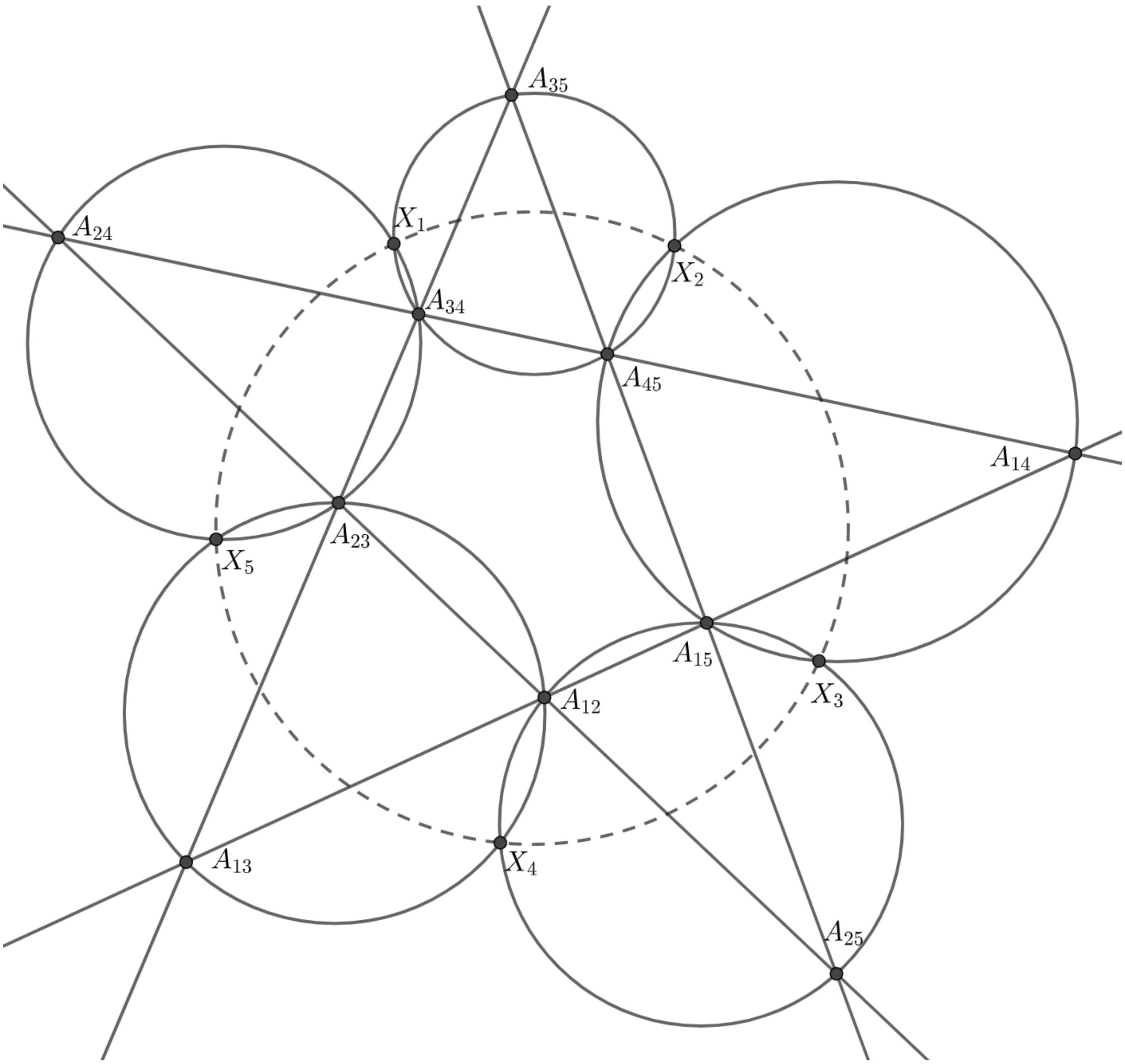


Рис. 2: Теорема Микеля о пяти окружностях

**Доказательство**

Обозначим точку пересечения прямых $\ell_i$ и $\ell_j$ через $A_{ij}$. Достаточно доказать, что $X_1$, $X_2$, $X_3$ и $X_4$ лежат на одной окружности или прямой. Рассматрим окружности $(X_1A_{35}X_2A_{45})$, $(X_2X_3A_{15}A_{45})$, $(X_3A_{15}X_4A_{25})$ и $(X_4X_1A_{35}A_{23}A_{25})$. Точки $A_{15}$ $A_{25}$, $A_{35}$, $A_{45}$ лежат на прямой $\ell_5$. Следовательно, по Лемме 1 точки $X_1$, $X_2$, $X_3$ и $X_4$ лежат на одной окружности или на одной прямой. Что и требовалось доказать.

## Лемма 2

Даны 4 окружности или прямые $S_1$, $S_2$, $S_3$ и $S_4$ таких, что все пересекаются в одной точке $M$. Если $S_i$ и $S_j$ имеют ровно одну общую точку, будем считать, что она кратная. Обозначим точки пересечения $S_i$ и $S_j$ через $A_{ij}$ и $M$. Утверждается, что $(A_{12}A_{13}A_{23})$, $(A_{12}A_{24}A_{14})$, $(A_{13}A_{34}A_{14})$ и $(A_{23}A_{24}A_{34})$ пересекаются в одной точке, возможно в бескоенечно далёкой.

**Доказательство**

Рассмотрим два случая:

- Какие-то две $S$-ки, пускай $S_1$, $S_2$, имеют ровно одну общую точку. Следовательно, $A_{12} = M$. Поэтому $(A_{12}A_{13}A_{23})$, $(A_{12}A_{24}A_{14})$ совпадают с $(MA_{13}A_{23})$, $(MA_{24}A_{14})$, то есть с $S_3$ и $S_4$ соответственно. Осталось заметить, что $S_3$, $S_4$, $(A_{13}A_{34}A_{14})$ и $(A_{23}A_{24}A_{34})$ пересекаются в одной точке — $A_{34}$.
- Для любых $i$ и $j$ при пересечении $S_i$ и $S_j$ образуется 2 общие точки. Сделаем инверсию в точке $M$. Тогда $S_1$, $S_2$, $S_3$ и $S_4$ перйдут в прямые общего положения. А $(A_{12}A_{13}A_{23})$, $(A_{12}A_{24}A_{14})$, $(A_{13}A_{34}A_{14})$ и $(A_{23}A_{24}A_{34})$ перейдут в окружности, описанные около четырёх треугольников, образованных при пересечении $S_1^*$, $S_2^*$, $S_3^*$ и $S_4^*$. Они пересекутся в одной точке — точке Микеля прямых $S_1^*$, $S_2^*$, $S_3^*$ и $S_4^*$. Таким образом, $(A_{12}A_{13}A_{23})$, $(A_{12}A_{24}A_{14})$, $(A_{13}A_{34}A_{14})$ и $(A_{23}A_{24}A_{34})$ тоже пересекутся в одной точке.

Что и требовалось доказать.

Перейдём непосредственно к доказательству задачи.

## Доказательство утверждения

$\triangleright$Докажем утверждение задачи по индукции по числу прямых $n$, отдельно рассматривая случай чётного и нечётного $n$.

**База** для $n$ равного 1, 2, 3, 4 и 5 уже доказана.

**Предположение**: для $n-1$, $n-2$, $n-3$ и $n-4$ утверждение верно.

**Переход:**

$\triangleright$1) Пусть $n$ нечётно. Обозначим через $A_i$ точку Микеля, соответствующую набору из $n-1$ прямой, получаемому отбрасыванием прямой $\ell_i$, а через $A_{ijk}$ — точку Микеля, соответствующую набору из $n-3$ прямых без прямых $\ell_i$, $\ell_j$ и $\ell_k$. Обозначим через $S_{ij}$ и $S_{ijkm}$ окружности Микеля, соответствующие наборам из $n-2$ и $n-4$ прямых, получаемых отбрасыванием прямых $\ell_i$, $\ell_j$ и $\ell_i$, $\ell_j$, $\ell_k$, $\ell_m$. Для того чтобы доказать, что $n$ точек $A_1$, $A_2$, ... , $A_n$ лежат на одной окружности, достаточно доказать, что любые четыре из них лежат на одной окружности. Докажем это для точек $A_1$, $A_2$, $A_3$ и $A_4$. Поскольку точки $A_i$ и $A_{ijk}$ лежат на $S_{ij}$, $S_{12}$ и $S_{23}$ пересекаются в точках $A_2$ и $A_{123}$, $S_{23}$ и $S_{34}$ — в $A_3$ и $A_{234}$, $S_{34}$ и $S_{41}$ — в $A_4$ и $A_{134}$, $S_{14}$ и $S_{12}$ — в $A_1$ и $A_{124}$. Точки $A_{123}$, $A_{234}$, $A_{134}$ и $A_{124}$ лежат на одной окружности или прямой — $S_{1234}$, поэтому, согласно Лемме 1, точки $A_1$, $A_2$, $A_3$ и $A_4$ лежат на одной окружности или прямой.$\triangleleft$

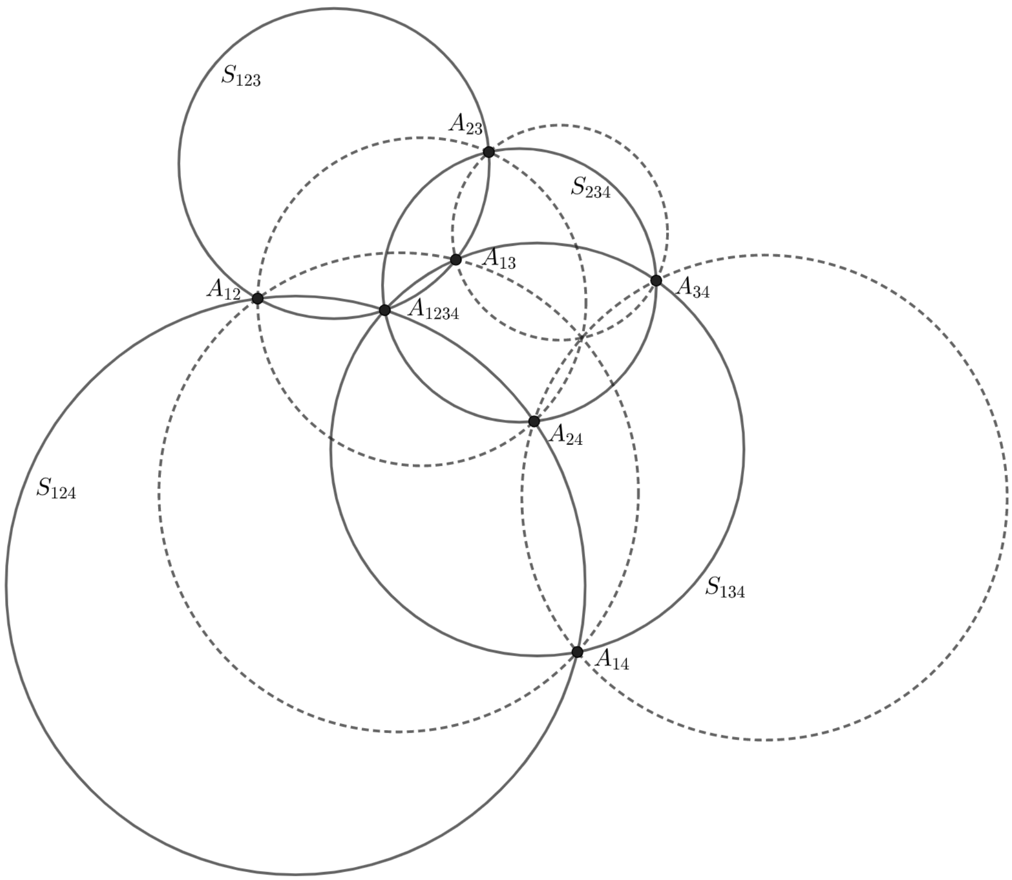


Рис. 3: Случай чётного n

$\triangleright$2)Пусть теперь $n$ четно. Введём обозначения: $S_i$, $A_{ij}$, $S_{ijk}$, $A_{ijkm}$ — окружности и точки Микеля, соответствующие наборам из $n-1$, $n-2$, $n-3$ и $n-4$ прямых соответственно. Для того чтобы доказать, что окружности $S_1$, $S_2$, ... , $S_n$ пересекаются в одной точке, достаточно показать, что любые 4 оркужности или прямые имеют общую точку. Докажем это, например, для $S_1$, $S_2$, $S_3$ и $S_4$. Из определения следует, что $S_{ijk}$ и $S_{ijl}$ пересекаются в точках $A_{ij}$ и $A_{ijkl}$, а точки $A_{ij}$, $A_{ik}$ и $A_{il}$ определяют $S_i$. Получаем, что $S_{123}$, $S_{124}$, $S_{134}$ и $S_{234}$ пересекаются в одной точке — $A_{1234}$. Поэтому, по Лемме 2, $(A_{12}A_{13}A_{14})$, $(A_{12}A_{23}A_{24})$, $(A_{13}A_{23}A_{34})$ и $A_{14}A_{24}A_{34}$, совпадающие с $S_1$, $S_2$,

$S_3$ и $S_4$ соответственно, пересекаются в одной точке.$\triangleleft$

База индукции доказана, переход доказан, следовательно, утверждение верно.$\triangleleft$

# 6 Конструкция о поворотной гомотетии

## Задача 1

Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ такой что, стороны $BC$ и $AD$ не параллельны. Пусть $E$ и $F$ — внутринние точки отрезков $BC$ и $AD$ такие, что $\frac{BE}{EC} = \frac{DF}{FA}$. Прямые $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $R$. Отрезок $EF$ пересекает диагонали $AC$ и $BD$ в точках $P$ и $Q$ соответственно. Рассмотрим треугольники $PQR$, получаемые для всех точек $E$ и $F$. Доказать, что все окружности, описанные около рассматриваемых треугольников, имеют общую точку, оличную от $R$.

**Решение**

Рассмотрим точку Микеля прямых $BC$, $AD$, $AC$ и $BD$ — точку $X$. Докажем, что все рассматриваемые окружности содержат $X$. Точка $X$ — центр поворотной гомотетии, переводящей $C$ в $A$, $B$ в $D$. Образом точки $E$ является $F$, так как истинно соотношение $\frac{BE}{EC} = \frac{DF}{FA}$. Поэтому, $X$ также является точкой Микеля прямых $EF$, $AC$, $BC$ и $AD$. Поэтому, четырёхугольник $PAFX$ вписанный. Аналогично получается вписанность $DXQF$. Следовательно, $X$ — точка Микеля прямых AC, $AD$, $BD$ и $EF$. Таким образом, $X \in (PQR)$. Следовательно, все окружности, описанные около рассматриваемых треугольников, содержат точку $X$.

# 7 Конструкции вокруг теоремы Симсона

## Задача 1

Докажите, что проекции точки Микеля четырёх прямых на них лежат на одной прямой.

**Доказательство**

Точка Микеля лежит на четырёх описанных окружностях образовавшихся треугольников. Следовательно, по теореме Симсона, её проекции на любые три из четырёх прямых лежат на одной прямой. Следовательно, все четыре проекции лежат на одной прямой(прямые Симсона точки Микеля для четырёх треугольников совпали).

## Задача 2. Прямая Обера

Рассмотрим черыре прямые общего положения. Тогда ортоцентры четырёх образованных ими треугольников лежат на одной прямой — прямой Обера.

**Доказательство**

Так как прямые Симсона точки Микеля для четырёх треугольников совпали, то и прямые Штейнера совпадут. Ортоцентр каждого из треугольников лежит на прямой

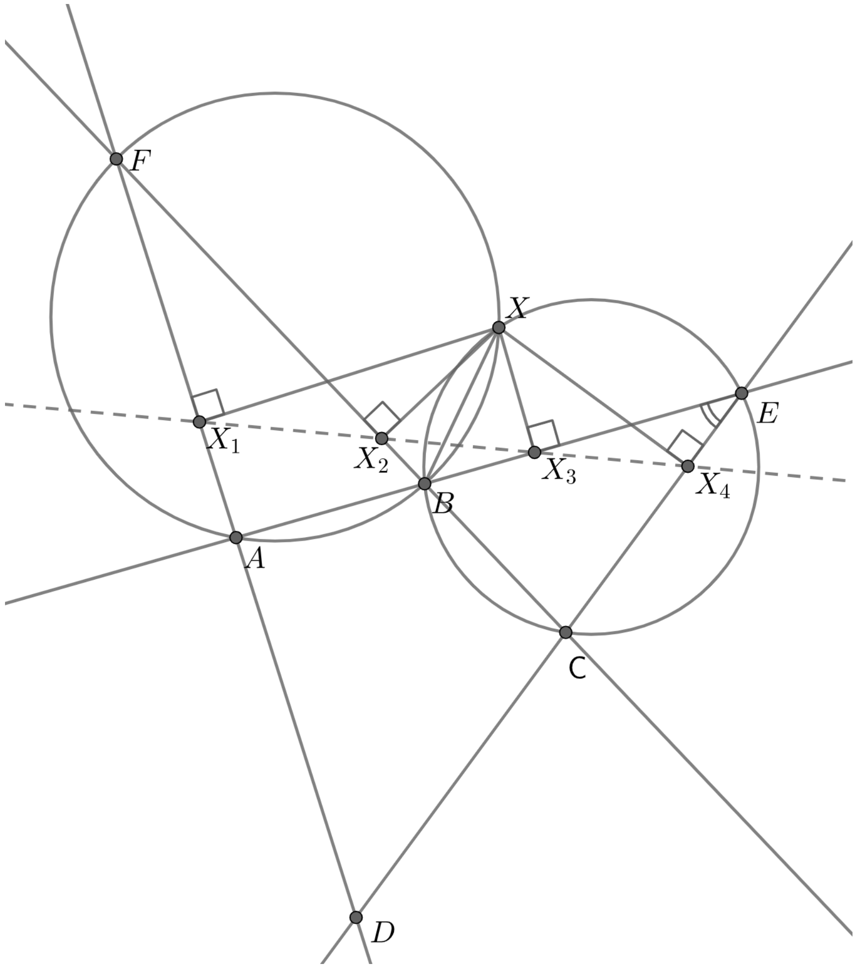


Рис. 4: Проекции точки Микеля

Штейнера соответствующего треугольника. Следовательно все ортоцентры лежат на одной прямой. Что и требовалось доказать.

## Задача 3

Четыре прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности, проходящеё через точку Микеля.

**Лемма**

Даны точки $A$, $B$, $C$ лежащие на одной пряой в указанном порядке и точка $X$ вне неё. $O_A$, $O_B$ и $O_C$ центры описанных окружностей около теругольников $BCX$, $ACX$ и $ABX$, лежат на окружности, проходящеё через $X$.

**Даказательство**

Проекции $X$ на $O_AO_B$, $O_AO_C$ и $O_BO_C$ — середины $XC$, $XB$ и $XA$ соответственно. Они лежат на одной прямой, так как точки A, $B$ и $C$ коллинеарны. Тогда по теореме

Симсона $X \in (O_A O_B O_C)$. Что и тебовалось доказать.

Вернёмся к решению задачи.

Будем пользоваться обозначенимя, что и при доказательстве существования точки Микеля четырёх прямых. Очевидно, что если доказать, что три из четырёх центров лежат на окружности, проходящей через точу Микеля, то все четыре лежат на этой окружноти.

Тогда, окружности $(ABF)$, $(AED)$ и $(DFC)$ совпадают с $(AXF)$, $(AXD)$ и $FXD$. Точки $F$, $A$ и $D$ лежат на одной прямой, $X$ вне неё. Следовательно, центры $(AXF)$, $(AXD)$ и $(FXD)$ лежат на окружности, проходящей через $X$ по лемме. Следовательно, центры $(ABF)$, $(AED)$ и $(DFC)$ лежат на окружности, проходящей через $X$. Следовательно, все четыре центра лежат на окружности, содержащей $X$. Что и требовалось доказать.

## Список литературы


[1] В. Уроев. Инверсия — «Квант», 1984, №5.

[2] Д. Швецов. От прямой Симсона до теоремы Дроз-Фарни — «Квант», 2009, №6.

[3] А. Мерзляк и В. Поляков — Геометрия, 9 класс.