Трехмерное пространство с одной мнимой координатой и Теорема Кези

Пусть есть плоскость B, и на ней множество окружностей. Введём трехмерное пространство A, причем не совсем обычное: у каждой точки три координаты: две (x и y) – действительные числа, а третья – z - мнимое число.

Также введем декартовы (x и y) координаты и на плоскости B.

Теперь сопоставим каждой окружности на пространстве B с координатами центра (x,y) и радиусом r точку на пространстве A с координатами (x,y,ir).

(где i – мнимая единица).

Главным свойством этого преобразования является следующее:

Основная лемма:
Длина общей внешней касательной к двум окружностям на B равна длине отрезка между точками A, соответствующими этим окружностям.

Т.к. пусть $x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, r_2$ – координаты центров и радиусы соответствующих окружностей.

Тогда квадрат длины внешней касательной :

$l = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 - (r_1-r_2)^2 =$

$= (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (ir_1-ir_2)^2 =$

$= (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2$ что есть расстояние между точками пространства A, соответствующего этим окружностям.

Также определим инверсию на пространстве A:

Инверсией в с центром в точке O и радиусом R называется преобразование такое, которое переводит точку M, находящуюся на ненулевом расстоянии от O(точки, находящиеся на нулевом расстоянии, будут переходить в бесконечно удаленные, но строгое определение для них будет дано не здесь), в точку N такую, что N лежит на луче OM и $OM*ON = R^2$.

Назовем инверсию с центром O_2 на пространстве A соответственной инверсии с центром O_1 на плоскости B, если первые две координаты O_2 совпадают с координатами O_1, третья координата O_2 равна 0, и радиусы этих инверсий равны.

Несложно заметить, что если при инверсии на плоскости B окружность w перешла в окружность u, то при соответственной инверсии на пространстве А W перейдет в U.(где U и W – точки А, сопоставленные окружностям u и w)

Силу этой идеи можно наглядно продемонстрировать , например, на следующей задаче:

Теорема Кези

Формулировка: Если четыре окружности w_1,w_2,w_3,w_4 касаются внешним образом окружности W в указанном порядке, то выполняется следующее равенство:
$L_{12} * L_{34} + L_{23}*L_{14} = L_{13}*L_{24}$
Где L_{12} – длина общей внешней касательной к w_1 и w_2, Остальные аналогично.

Доказательство:

1) Лемма: пусть есть точка O, находящаяся вне четырех данных окружностей. Тогда при инверсии относительно O отношения $L_{12}*L_{34}$ / $L_{13}*L_{24}$ и $L_{23}*L_{14}$ / $L_{13}*L_{24}$ не изменятся.

1.1) Введем декартову систему координат с началом координат в точке O.

1.2) Введем трехмерное пространство А с двумя действительными и одной мнимой координатами.
1.3) Сопоставим окружностям w1,w2,w3,w4 точки A1,A2,A3,A4 пространства А, так что первые две координаты точки равны координатам центра соответствующей окружности, а третья равна радиусу соответствующей окружности, домноженному на i.
1.4) Заметим, что длины общих внешних касательных по основной лемме равны расстояниям между соответствующими точками.
1.5) Т.о: $(L_{12}*L_{34})/(L_{13}*L_{24}) = (A_1A_2 * A_1A_2) / (A_1A_2 * A_1A_2)$
1.6) Пусть мы сделали инверсию на пространстве В, переводящую w1 в w1' и т.д. Тогда соответственная инверсия на А переводит
A1 в A1', A2 в A2', A3 в A3', A4 в A4', где A1' – образ окружности w1',и т.д.
1.7) Т.е мы свели утверждение леммы к тому, что отношение
$(A_1A_2 * A_1A_2) / (A_1A_2 * A_1A_2)$
при инверсии не меняется.

1.8) Заметим, что треугольники OA_1A_2 и $OA_2'A_1'$ подобны по двум сторонам и углу между ними, а значит $A_1'A_2'/A_1A_2$ равно коэффициенту подобия этих треугольников (а коэффициент подобия этих треугольников по известному свойству инверсии равен квадрату радиуса инверсии деленному на произведение OA_1 и OA_2)

(Более строго это можно доказать можно расписать через скалярное произведение:

обозначим векторы OA_1 и OA_2 как v_1 и v_2 , а OA_1' и OA_2' как v'_1 и v'_2

$(A_1'A_2'/ A_1A_2)^2 = (v_1'-v_2')^2/ (v_1 -v_2)^2 =$

$= (v_1'^2 + v_2'^2 – 2^* v_1'^* v_2') /(v_1^2 + v_2^2 – 2^* v_1^* v_2) =$

$= ((v_1*(R/ v_1)^2)^2 + (v_2*(R/ v_2)^2)^2 –$

$- \; 2*(v_1*(R/ v_1)^2)^* (v_2*(R/ v_2)^2))/ (v_1^2 + v_2^2 – 2^* v_1^* v_2)$

$= (R/ v_1)^2 *(R/ v_2)^2 *(v_1^2 + v_2^2 – 2^* v_1^* v_2)/ (v_1^2 + v_2^2 – 2^* v_1^* v_2) =$

$= (R/ v_1)^2 *(R/ v_2)^2$

$= (R/ OA_1)^2 *(R/ OA_2)^2$

$A_1'A_2'/ A_1A_2 =R^2/(OA_1*OA_2)$)

1.9) Т.е $A_1'A_2' = A_1A_2 * R/(OA_1 * OA_2)^{0.5}$

1.10) $A_1'A_2'* A_3'A_4' =$

$=(A_1A_2 * R/(OA_1 * OA_2)^{0.5})*(A_3A_4 * R/(OA_3 * OA_4)^{0.5}) =$

$A_1A_2* A_3A_4 * R^2 / (OA_1*OA_2*OA_3*OA_4)^{0.5}$

Обозначим $S = R^2 / (OA_1*OA_2*OA_3*OA_4)^{0.5}$

1.11) Аналогично пункту 1.10:

$A_1'A_2' * A_3'A_4' = A_1A_2 * A_3A_4 * S$

$A_2'A_3' * A_1'A_4' = A_2A_3 * A_1A_4 * S$

$A_1'A_3' * A_2'A_4' = A_1A_3 * A_2A_4 * S$

1.12) Из пункта 1.11 получаем:

$A_1'A_2' * A_3'A_4' / (A_1'A_3' * A_2'A_4') =$

$= A_1A_2 * A_3A_4 * S / (A_1A_3 * A_2A_4 * S)$

$= A_1A_2 * A_3A_4 / (A_1A_3 * A_2A_4)$

Т.е $(A_1A_2 * A_3A_4) / (A_1A_3 * A_2A_4)$

при инверсии не меняется, что, как мы уже показали, равносильно условию леммы

1.13) Лемма 1 доказана.

2)Заметим, что , так как отношения $L_{12} * L_{34} / L_{13} * L_{24}$ и $L_{23} * L_{14} / L_{13} * L_{24}$ не меняются при инверсии, равенство

$L_{12} * L_{34} + L_{23} * L_{14} = L_{13} * L_{24}$

при инверсии сохранится.

3)Сделаем инверсию в точке, лежащей на W и не совпадающей с точками касания.

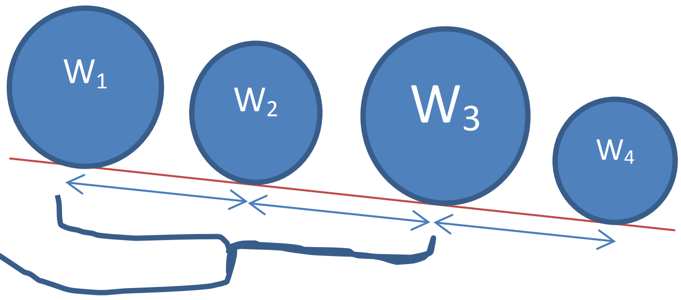
4)Тогда окружности w_1', w_2', w_3', w_4' будут касаться прямой L, в которую перешла W при инверсии.

5)Из этого получаем равенства:

$L_{12}' + L_{23}' = L_{13}'$

$L_{23}' + L_{34}' = L_{24}'$

$L_{12}' + L_{23}' + L_{34}' = L_{14}'$



6)$L_{12}'* L_{34}'+ L_{23}'*L_{14}' = L_{12}' * L_{34}' + L_{23}'*(L_{12}' +L_{23}'+L_{34}') =$

$= L_{12}' * L_{34}' + L_{23}'*L_{12}' + L_{23}'*L_{23}'+ L_{23}'*L_{34}'$

$=(L_{12}'+ L_{23}')*(L_{23}' + L_{34}') = L_{13}'*L_{24}'$

Мы доказали , что $L_{12}'* L_{34}'+ L_{23}'*L_{14}' = L_{13}'*L_{24}'$.

7)Значит, $L_{12} * L_{34} + L_{23}*L_{14} = L_{13}*L_{24}$,

Т.к. это равенство при инверсии сохраняется.

Теорема Кези доказана. Ч.Т.Д.