Окружностное пространство и Теорема Кези

Алексей Суворов*

Введение

Основной ценностью данной работы, на взгляд автора, является идея сопоставления окружностям на плоскости (и не только на плоскости) точек некоторого специального ***окружностного*** пространства, которое будет описано ниже, так, чтобы различные свойства и явления, связанные с окружностями, переписывались в терминах этого пространства. Таким образом мы сможем работать с окружностями, как с точками, и применять к ним соответствующие методы.

Примером применения этой идеи является основной результат данной работы — альтернативное доказательство теоремы, эквивалентной теореме Кези, в одну сторону.

Поскольку данный текст подготовлен непосредственно для участия в Московской Математической Конференции Школьников, автор не успел оформить некоторые факты, которые могут быть даже интереснее, чем приведённый результат, например, теорема Кези в обратную сторону и несколько её обобщений.

О существовании этих фактов, а также о других возможных применениях идеи перехода в окружностное пространство автор позволил себе порассуждать в разделе «Некоторые дополнительные идеи».

Формулировка основного результата работы

Сформулируем оригинальную теорему Кези.

*ГБОУ «Школа 2007, фмш», преподаватели Прокопенко Д.В и Буланкина В.В.

Теорема Кези. Четыре окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ касаются одинаковым образом некоторой окружности Ω, если и только если существует расстановка знаков, при которой выполняется следующее равенство.

$$\pm L_{12}L_{34} \pm L_{23}L_{14} \pm L_{13}L_{24} = 0,$$

где L_{ij} — длина общей внешней касательной к ω_i и ω_j.

Также известны формулировки для случаев, когда одни окружности касаются внутренним, а другие внешним образом.

Для доказательства нам потребуется перейти от плоскости (чтобы не было путаницы назовем её ***исходной***) к трёхмерному пространству. Сопоставим окружностям исходной плоскости точки некоторого трёхмерного пространства, которое назовём ***окружностным***.

Окружности с координатами центра (x, y) и радиусом r сопоставим точку (x, y, r). Будем использовать понятие окружности отрицательного радиуса: окружность с радиусом $-r$ ничем геометрически не отличается от окружности с радиусом r, но двум таким окружностям сопоставляются разные точки окружностного пространства.

Точкам исходной плоскости также сопоставим точки окружностного пространства, как окружностям нулевого радиуса.

На окружностном пространстве определим скалярное произведение

$$\overrightarrow{v_1}(x_1, y_1, z_1) \times \overrightarrow{v_2}(x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2.$$

И расстояние: $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{\overrightarrow{v}^2}$ (корень из отрицательного числа откладываем по мнимой оси вверх. Здесь и далее квадратный корень из действительного числа определён однозначно).

Назовём Г-***касающимися*** окружности исходной плоскости, касающиеся внутренним образом, если у них радиусы одного знака, и касающиеся внешним образом, если у них радиусы разных знаков.

Назовём Г-***касательной*** к двум окружностям исходной плоскости расстояние между соответствующими точками окружностного пространства. Мы предполагаем, что для Г-касательной к двум окружностям выполняется следующая гипотеза (она будет доказана далее).

Гипотеза. Длина Г-касательной к двум окружностям равна их общей касательной (внутренней, если радиусы одного знака, и внешней в противном случае).

Также мы сформулируем гипотезы, позволяющие установить для окружностного пространства соответствие гомотетий, соответствие инверсий и сохранение двойных отношений. После чего мы сможем сформулировать и предъявить набросок доказательства основного результата — гипотезу, которая, предположительно, эквивалентна теореме Кези в одну сторону.

Основная гипотеза (теорема Кези в нашей формулировке, в одну сторону). Если четыре окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ Г-касаются некоторой окружности Ω, то существует расстановка знаков, при которой выполняется следующее равенство.

$$\pm L_{12}L_{34} \pm L_{23}L_{14} \pm L_{13}L_{24} = 0,$$

где L_{ij} — длина общей Г-касательной к ω_i и ω_j.

Наброски доказательств вспомогательных фактов

Гипотеза о Г-касательной

Гипотеза. Длина Г-касательной к двум окружностям равна их общей касательной (внутренней, если радиусы одного знака, и внешней в противном случае).

Доказательство. [1]

Покажем, что длина Г-касательной L к двум окружностям равна длине соответствующей обычной касательной.

Пусть есть точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда соответствующие окружности имеют центры $O_1(x_1, y_1)$ и $O_2(x_2, y_2)$.

Тогда

$$O_1O_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2;$$

по теореме Пифагора

$$L^2 = O_1O_2^2 - (z_1 - z_2)^2;$$

$$L^2 = O_1O_2^2 - (z_1 - z_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 = \overrightarrow{A_1A_2}^2;$$

$$L = \sqrt{A_1A_2^2} = A_1A_2.$$

Длина касательной L равна расстоянию между соответствующими точками, то есть Г-касательной. □

Доказательство для комплексных касательных приводить не будем.

[1] Здесь и далее это следует понимать как «набросок доказательства»

Соответствие гомотетий

Гомотетия на окружностном пространстве определяется так же как и обычная гомотетия, то есть гомотетией с центром O и коэффициентом k называется преобразование, которое каждую точку A переводит в такую точку A', что $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{kOA}$.

Гомотетии на исходной плоскости с центром (x, y) ставим в соответствие гомотетию на окружностном пространстве с центром $(x, y, 0)$ и таким же коэффициентом.

Гипотеза о соответствии гомотетий. Если окружность u исходной плоскости при гомотетии переходит в w, то на окружностном пространстве точка U (соответствующая u) при соответствующей гомотетии переходит в точку W (соответствующую w).

Доказательство. Пусть, для удобства записи, центр гомотетии (0,0,0).

Гомотетия с коэффициентом k переведёт окружность с центром (x, y) и радиусом z в окружность с центром (kx, ky) и радиусом kz. Соответствующая ей гомотетия переведёт точку (x, y, z) в (kx, ky, kz). □

Соответствие инверсий

Инверсией на окружностном пространстве с центром в точке O и радиусом R назовём преобразование такое, которое переводит точку M в точку N такую, что $\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON} = R^2$ и $\overrightarrow{OM}$ коллинеарно $\overrightarrow{ON}$. Точки могут «перепрыгивать» через O. Куда переходят точки на нулевом расстоянии, нам не важно.

Поставим в соответствие инверсии на исходной плоскости с центром (x, y) инверсию на окружностном пространстве с центром $(x, y, 0)$ и таким же радиусом.

Гипотеза о соответствии инверсий. Если при инверсии на исходной плоскости окружность w перешла в окружность u, то при соответственной инверсии на окружностном пространстве точка W (соответствующая w) перейдёт в точку U (соответствующую u).

Доказательство. Пусть при некоторой инверсии окружность u перешла в себя. Степень центра относительно u равна R^2 То есть $x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 = R^2$. Заметим, что $OU^2 = x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 = R^2$. Значит U при инверсии также перейдёт в себя.

Здесь есть неприятный частный случай, когда центр инверсии совпадает с центром окружности.

Если это не так, представим нашу инверсию как композицию инверсии сохраняющей u, и гомотетии. Понятно, что сохраняющая инверсия ничего не изменит, а гомотетия сохранит соответствие. $\square$

Гипотеза о длине инверсного отрезка. Пусть при инверсии с центром O и радиусом R точки X, Y перешли в X', Y'. Тогда выполняется следующее равенство: $X'Y' = \pm\dfrac{R^2}{OY \cdot OX} \cdot XY$, где O — центр, X', Y' — образы X, Y.

Доказательство.

$$\overrightarrow{X'Y'}^2 = (\overrightarrow{OY'} - \overrightarrow{OX'})^2 = (\overrightarrow{OY} \cdot \frac{R^2}{OY^2} - \overrightarrow{OX} \cdot \frac{R^2}{OX^2})^2 =$$

$$= (\frac{R^2}{OY \cdot OX})^2 \cdot (\overrightarrow{OY} \cdot \frac{OX}{OY} - \overrightarrow{OX} \cdot \frac{OY}{OX})^2 =$$

$$= (\frac{R^2}{OY \cdot OX})^2 \cdot (OY^2 \cdot \frac{OX^2}{OY^2} + OX^2 \cdot \frac{OY^2}{OX^2} - 2\overrightarrow{OY} \times \overrightarrow{OX}) =$$

$$= \frac{R^2}{OY \cdot OX}^2 \cdot (OY^2 + OX^2 - 2\overrightarrow{OY} \times \overrightarrow{OX}) =$$

$$= \frac{R^2}{OY \cdot OX}^2 \cdot (\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX})^2 =$$

$$= \left(\frac{R^2}{OY \cdot OX}\right)^2 \cdot XY^2.$$

$$X'Y' = \pm\frac{R^2}{OY \cdot OX} \cdot XY.$$

$\square$

Сохранение двойных отношений

Гипотеза о сохранении модулей двойных отношений. Модуль двойного отношения, то есть выражение следующего вида

$$\left|\frac{A_1A_2 \cdot A_3A_4}{A_1A_3 \cdot A_2A_4}\right|$$

при инверсии не меняется.

Доказательство. Пусть при инверсии на окружностном пространстве с центром O и радиусом R точки A_1, A_2, A_3, A_4 перешли в A_1', A_2', A_3', A_4' соответственно. Тогда (без учёта знака)

$$\frac{A_1'A_2' \cdot A_3'A_4'}{A_1'A_3' \cdot A_2'A_4'} = \frac{A_1A_2 \cdot \dfrac{R^2}{OA_1 \cdot OA_2} \cdot A_3A_4 \cdot \dfrac{R^2}{OA_3 \cdot OA_4}}{A_1A_3 \cdot \dfrac{R^2}{OA_1 \cdot OA_3} \cdot A_2A_4 \cdot \dfrac{R^2}{OA_2 \cdot OA_4}} =$$

$$= \frac{A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot \dfrac{R^4}{OA_1 \cdot OA_2 \cdot OA_3 \cdot OA_4}}{A_1A_3 \cdot A_2A_4 \cdot \dfrac{R^4}{OA_1 \cdot OA_2 \cdot OA_3 \cdot OA_4}} = \frac{A_1A_2 \cdot A_3A_4}{A_1A_3 \cdot A_2A_4}$$

□

Наброски доказательства основной гипотезы

Ввиду установленных выше соответствий мы можем начать доказывать Основную гипотезу.

Основная гипотеза. Если четыре окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ Г-касаются некоторой окружности Ω, то существует расстановка знаков, при которой выполняется следующее равенство.

$$\pm L_{12}L_{34} \pm L_{23}L_{14} \pm L_{13}L_{24} = 0,$$

где L_{ij} — длина общей Г-касательной к ω_i и ω_j.

Доказательство.

1. Заметим, что отношение $\dfrac{L_{12}L_{34}}{L_{13}L_{24}}$ (и другие аналогично вида) не меняется по модулю при инверсии, т.к. оно равно двойному отношению соответствующих этим окружностям точек, которое не изменится при соответствующей инверсии.

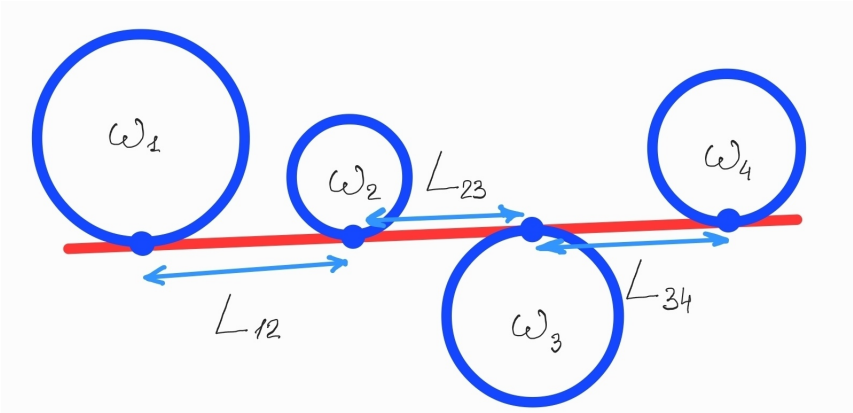
2. Заметим, что, так как отношения между слагаемыми при инверсии по модулю не меняются, равенство $\pm L_{12}L_{34} \pm L_{23}L_{14} \pm L_{13}L_{24} = 0$ при инверсии сохранится(возможно с изменением знаков).

3. Сделаем инверсию в точке, лежащей на Ω и не совпадающей с точками касания.

4. Тогда окружности $\omega_1', \omega_2', \omega_3', \omega_4'$ будут касаться прямой L, в которую перешла Ω при инверсии.

5. Заметим, что окружности одного знака будут касаться L с одной стороны (так как касались Ω с одной стороны), а окружности разных знаков — с разных сторон. Значит, для любой пары окружностей L будет общей Г-касательной, и $L'_{12}, L'_{23}, L'_{34}, L'_{13}, L'_{24}, L'_{14}$ будут длинами отрезков между точками касания окружностей с прямой L.

6. Пусть без ограничения общности расположение точек касания как на чертеже.



7. Из этого получаем равенства:

$$L'_{12} + L'_{23} = L'_{13};$$

$$L'_{23} + L'_{34} = L'_{24};$$

$$L'_{12} + L'_{23} + L'_{34} = L'_{14}.$$

8. $L'_{12}L'_{34} + L'_{23}L'_{14} = L'_{12}L'_{34} + L'_{23}(L'_{12} + L'_{23} + L'_{34}) =$

$$= L'_{12}L'_{34} + L'_{23}L'_{12} + L'_{23}L'_{23} + L'_{23}L'_{34} = (L'_{12} + L'_{23})(L'_{23} + L'_{34}) = L'_{13}L'_{24}.$$

Мы доказали, что $L'_{12}L'_{34} + L'_{23}L'_{14} - L'_{13}L'_{24} = 0$.

9. Значит, так как это равенство при инверсии сохраняется,

$\pm L_{12}L_{34} \pm L_{23}L_{14} \pm L_{13}L_{24} = 0$ при некоторой расстановке знаков.

Гипотеза доказана.

$\square$

Некоторые дополнительные идеи

Список фактов, которые автор предположительно умеет доказывать, но не успел оформить.

1. Теорема Кези в обратную сторону: четыре окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ касаются одинаковым образом некоторой окружности Ω, если существует расстановка знаков, при которой выполняется следующее равенство.

$$\pm L_{12}L_{34} \pm L_{23}L_{14} \pm L_{13}L_{24} = 0,$$

   где L_{ij} — длина общей внешней касательной к ω_i и ω_j.

2. Обобщение теоремы Кези на большее число окружностей. Точной формулировки самой теоремы и непосредственно равенства в данном тексте приведено не будет.

Некоторые рассуждения об остальных идеях.

Есть предположение, что с помощью данного метода можно попробовать получить альтернативные доказательства ряда фактов вокруг теорем Птолемея и Фурмана.