

Функция, обратная к многочлену.

Пусть есть многочлен $P(x)$ хотя бы первой степени (на поле действительных чисел). Определим его обратную функцию $P^{-1}(y)$ как среднее арифметическое всех прообразов числа y относительно многочлена ($P^{-1}(y)$ определена на множестве значений P). Задача такова: какие многочлены $P(x)$ можно восстановить, зная обратную функцию $P^{-1}(y)$?

Приступим к решению задачи: разберём важный частный случай и поставим *ключевую гипотезу*.

Напомним, что область определения $P^{-1}(y)$ – это по условию множество значений $P(x)$. Поэтому по области определения $P^{-1}(y)$ можно понять, чётной или нечётной степени был $P(x)$: если область определения $P^{-1}(y)$ – луч, то $P(x)$ был чётной степени, если прямая – нечётной.

Пусть дан многочлен $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$. Тогда его *вторым коэффициентом* мы будем называть число a_{n-1} . *Хорошим* мы будем называть многочлен $P(x)$, если $a_n > 0$. Понятно, что многочлен P восстановим тогда и только тогда, когда восстановим многочлен $-P$, поэтому работать мы будем без ограничения общности только с *хорошими* многочленами.

Введём определение *канонической формы многочлена*. Пусть дан многочлен $P(t)$. Тогда его канонической формой будем называть многочлен $Q(x) = P(t - t_0)$ для такого t_0 , что в многочлене Q *второй коэффициент* нулевой. Несложно доказать, что такая замена переменной всегда существует и единственна. Очевидно, что *любой сдвиг графика многочлена не влияет на его восстановимость*; в частности, $P(x)$ можно восстановить по $P^{-1}(y)$ тогда и только тогда, когда $Q(x) = P(x + x_0)$ можно восстановить по $Q^{-1}(y)$, где x_0 – некоторая константа. Поэтому мы без ограничения общности будем рассматривать только многочлены в канонической форме. Используя это, найдём класс многочленов, которые невозможно восстановить по их обратной функции.

Например, если многочлен $P(x)$ – чётная функция, то $P^{-1}(y)$ равно нулю на всей области определения, поэтому такой многочлен восстановить нельзя. Несложно доказать, что многочлен является чётной функцией тогда и только тогда, когда у него все коэффициенты при x, x^3, x^5, \dots нулевые (в том числе многочлен должен быть чётной степени). А какие многочлены чётной степени – сдвинутые чётные функции, то есть такие, чей график симметричен относительно некоторой вертикальной оси? При некотором горизонтальном сдвиге он должен превращаться в чётную функцию, и в том числе должен становиться нулевым *второй коэффициент*. Но единственный такой сдвиг – приведение многочлена к канонической форме. Поэтому многочлен является

сдвинутой чётной функцией тогда и только тогда, когда в его канонической форме все коэффициенты при нечётных степенях нулевые.

Итак, мы разобрали первый частный случай. А именно, если у канонической формы многочлена все коэффициенты при нечётных степенях нулевые, то его восстановить нельзя (в том числе нельзя восстановить никакой квадратный трёхчлен). Моя гипотеза заключается в том, что все остальные многочлены восстановить можно.

Ключевая гипотеза: *многочлен нельзя восстановить тогда и только тогда, когда в его канонической форме все коэффициенты при нечётных степенях нулевые.*

Разберём важнейший частный случай – докажем, что любой многочлен нечётной степени восстановить можно. Для этого введём понятие *критического числа* хорошего многочлена нечётной степени. Пусть дан хороший многочлен нечётной степени $P(x)$. Тогда его *критическое число* – наибольший прообраз наибольшей из координат его точек экстремума по оси Y (если точек экстремума нет, то критическим числом многочлена можно считать любое число). Например, у многочлена $2x^3 - 6x$ две точки экстремума – $(-1; 4)$ и $(1; -4)$. Из Y -координат этих двух точек наибольшая – 4, поэтому мы берём наибольший прообраз числа 4 – число 2. Итак, число 2 – *критическое* для многочлена $2x^3 - 6x$. У критического числа многочлена есть полезное свойство. Если k – критическое число многочлена $P(x)$, то любое $t > k$ – единственный прообраз числа $P(t)$. Более того, $\forall t > k: P^{-1}(P(t)) = t$.

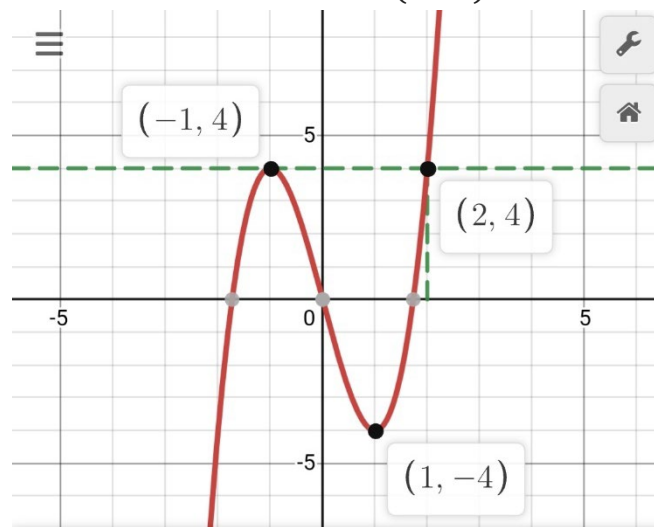


рис. 1 – график многочлена $2x^3 - 6x$.

Приступим к самому доказательству. Пусть некоторый многочлен нечётной степени $P(x)$ нельзя восстановить, то есть существует другой многочлен $Q(x)$ такой, что $P^{-1}(y) = Q^{-1}(y) \forall y$. Тогда, по ранее доказанному, $Q(x)$ тоже нечётной степени. Пусть большее из критических чисел многочленов P и Q – это k . Тогда $\forall t > k: P^{-1}(P(t)) = Q^{-1}(Q(t)) = t$. Поэтому мы знаем $P(k + 1)$ – это такое

единственное число, что P^{-1} от него – это $k + 1$. Но $P^{-1}(y) = Q^{-1}(y) \forall y$, поэтому $P(k + 1) = Q(k + 1)$. Аналогично выведем, что $P(k + 2) = Q(k + 2)$, $P(k + 3) = Q(k + 3)$, и так далее. Получается, что многочлены P и Q совпадают в бесконечном количестве точек, значит, они равны, а это противоречит нашему изначальному предположению.

Мы получили разбор главного решённого частного случая.

Теорема: любой многочлен нечётной степени восстановить можно.

Что же делать с многочленами чётной степени? Их нельзя так просто приравнять на ветвях. Но всё же у меня есть предчувствие, что по ветвям многочлен чётной степени восстановить тоже можно. Давайте поймём, из чего это может следовать. Для этого введём понятие *ветвей* многочлена чётной степени. Пусть число y лежит на ветвях многочлена P , если у него ровно два прообраза.

Пусть дано два многочлена чётной степени – P и Q – с одинаковой обратной функцией – f . Пусть прообразы некоторого числа y относительно многочлена P – p_1 и p_2 , относительно Q – q_1 и q_2 (таким образом, число y лежит на ветвях обоих многочленов). Тогда, по определению, $f(y) = \frac{p_1+p_2}{2} = \frac{q_1+q_2}{2}$. Пусть

$k_y = \frac{f(y)-q_1}{f(y)-p_1} = \frac{q_2-f(y)}{p_2-f(y)} = \frac{f(y)-q_2}{f(y)-p_2}$; тогда $q_i = (p_i - f(y))k_y + f(y)$ и для $i = 1$, и для $i = 2$. Здесь k_y – это, как несложно увидеть, некоторая функция от y ; чтобы это подчеркнуть, обозначим её как $g(y)$, и немного перепишем получившееся утверждение, обозначив наше число y за $P(x)$:

Если $P^{-1} = Q^{-1}$, то для всех x , для которых $P(x)$ на ветвях многочленов P и Q , верно утверждение $Q\left(\left(x - P^{-1}(P(x))\right) \cdot g(P(x)) + P^{-1}(P(x))\right) = P(x)$ для некоторой функции g .

Если переформулировать это утверждение, получится лемма, из которой следует наша гипотеза:

Лемма: для любого многочлена чётной степени канонической формы P , не являющегося чётной функцией, не существует многочлена $Q \neq P$, функции g и числа T таких, что:

$$Q\left(\left(x - P^{-1}(P(x))\right) \cdot g(P(x)) + P^{-1}(P(x))\right) = P(x) \forall x: T \leq |x|$$

Как доказывать эту лемму, мне неизвестно. Поэтому следует вначале рассмотреть простейший из ещё нерешённых случаев задачи – многочлены четвёртой степени. Для простоты дальнейших вычислений я буду рассматривать только многочлены вида $x^4 + px^2 + qx$, то есть многочлены в канонической форме, дополнительно сдвинутые, чтобы свободный член стал нулевым. Также мы потребуем $q \neq 0$, потому что для $q = 0$ этот многочлен – чётная функция. Пусть дано число y на ветвях нашего многочлена. Найдём

$P^{-1}(y)$ с точностью до знака. Для этого нужно найти сумму действительных прообразов числа y , поэтому нам следует начать решать уравнение $x^4 + px^2 + qx = y$. Возьмём за $f(y)$ некоторую функцию, мы позже определим, какую, и преобразуем уравнение до $(x^2 + f(y))^2 + x^2(p - 2f(y)) + qx - f(y)^2 - y = 0$. Теперь понятно, каким должен быть $f(y)$ – таким, чтобы выражение $-(x^2(p - 2f(y)) + qx - f(y)^2 - y)$ было полным квадратом, а член при x^2 не был нулевым. Запишем это:

$$\begin{aligned} -(x^2(p - 2f(y)) + qx - f(y)^2 - y) &= (2f(y) - p)(x + g(y))^2 \\ x^2(p - 2f(y)) + qx - f(y)^2 - y &= (p - 2f(y))(x + g(y))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{q}{p - 2f(y)} = 2g(y) \\ -\frac{f(y)^2 + y}{p - 2f(y)} = g(y)^2 \end{cases}$$

$$-\frac{f(y)^2 + y}{p - 2f(y)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{q^2}{(p - 2f(y))^2}$$

$$f(y)^2 + y = \frac{q^2}{8f(y) - 4p}$$

$$4(p - 2f(y))(f(y)^2 + y) + q^2 = 0$$

Предыдущая строка – кубическое уравнение относительно $f(y)$ (при любых параметрах, потому что коэффициент при $f(y)^3$ равен -8). Значит, у него есть действительное решение. При этом это решение, как несложно убедиться, удовлетворяет нашему требованию $p - 2f(y) \neq 0$ – как раз потому, что $q \neq 0$.

Убедившись в существовании подходящего $f(y)$, продолжим решать исходное уравнение:

$$(x^2 + f(y))^2 - (p - 2f(y))(x + g(y))^2 = 0$$

Поскольку y на ветвях многочлена, у него есть прообразы, поэтому $p > 2f(y)$:

$$\begin{cases} x^2 + f(y) - \sqrt{p - 2f(y)}(x + g(y)) = 0 \\ x^2 + f(y) + \sqrt{p - 2f(y)}(x + g(y)) = 0 \end{cases}$$

Поскольку y на ветвях многочлена, прообразов ровно 2, и по теореме Виета мы находим их сумму, $\pm\sqrt{p - 2f(y)}$, но мы не знаем, какого знака. Мы получили важный вывод:

$$(P(x) = x^4 + px^2 + q \wedge 4(p - 2f(y))(f(y)^2 + y) + q^2 = 0) \Rightarrow P^{-1}(y) = \pm \frac{\sqrt{p - 2f(y)}}{2}$$

Возможно, получится подобрать такие p и $q \neq 0$, чтобы уравнение, определяющее $f(y)$, имело простое и короткое решение. Проблема в том, что простое и короткое решение должно существовать для всех y , но при этом числа p и q должны быть константами, никак не зависящими от y . Мне такие p и q подобрать не удалось, но для удобства дальнейшего подбора выпишу сюда это уравнение в упрощённом виде:

$$8x^3 - 4px^2 + 8xy - 4py - q^2 = 0$$

Примечания:

- Условие задачи можно дополнить так, чтобы все наши рассуждения остались верными. А именно, можно пытаться восстановить многочлен, зная не только его обратную функцию, но и его степень. Эта задача тоже, пожалуй, достойна рассмотрения.
- Размышляя над леммой, я придумал две новых, по-моему, интересных задачи:
 - а) Для каких многочленов P нет таких многочленов Q_1 и Q_2 хотя бы второй степени, что $P(x) = Q_1(Q_2(x)) \forall x$?
 - б) Существуют ли такие многочлены Q_1, Q_2, P_1, P_2 – все хотя бы второй степени – что $Q_1(Q_2(x)) = P_1(P_2(x)) \forall x$?
- Среднее арифметическое комплексных прообразов y относительно многочлена P канонической формы равно 0; но иногда бывает, что в многочлене, например, 4^{ой} степени, у какого-то числа 4 действительных прообраза (это значит, что все прообразы действительные). Тогда P^{-1} от этого числа будет равен нулю. Ниже приведены для иллюстрации графики функций $y = P(x)$ (чёрным) и $x = P^{-1}(y)$ (голубым) для $P(x) = x^4 - 3x^2 + x$.

