Функция, обратная к многочлену.

Пусть есть многочлен $P(x)$ хотя бы первой степени (на поле действительных чисел). Определим его обратную функцию $P^{-1}(y)$ как среднее арифметическое всех прообразов числа y относительно многочлена ($P^{-1}(y)$ определена на множестве значений P). Будем говорить, что многочлен $P(x)$ восстановим, если $P(x)$ – единственный многочлен, чья обратная функция – P^{-1}. Задача заключается в том, чтобы найти все восстановимые многочлены.

Приступим к решению задачи: разберём важный частный случай и поставим *ключевую гипотезу*.

Напомним, что область определения $P^{-1}(y)$ – это по условию множество значений $P(x)$. Поэтому по области определения $P^{-1}(y)$ можно понять, чётной или нечётной степени был $P(x)$: если область определения $P^{-1}(y)$ – луч, то $P(x)$ был чётной степени, если прямая – нечётной.

Мы будем называть многочлен $P(x)$ *хорошим*, если его старший коэффициент положителен. Понятно, что многочлен P восстановим тогда и только тогда, когда восстановим многочлен $-P$, поэтому работать мы будем без ограничения общности только с *хорошими* многочленами.

Найдём класс многочленов, которые невозможно восстановить по их обратной функции. Например, если многочлен $P(x)$ – чётная функция, то $P^{-1}(y)$ равно нулю на всей области определения, поэтому такой многочлен восстановить нельзя. Более того, если у графика многочлена P есть вертикальная ось симметрии, задающаяся формулой $x = x_0$, то тогда $P^{-1}(y) = x_0$ везде, где определено.

Итак, мы разобрали первый частный случай. А именно, если у графика многочлена есть вертикальная ось симметрии, то его восстановить нельзя (в том числе нельзя восстановить никакой квадратный трёхчлен). Моя гипотеза заключается в том, что все остальные многочлены восстановить можно.

<u>Ключевая гипотеза:</u> многочлен нельзя восстановить тогда и только тогда, когда у его графика есть вертикальная ось симметрии.

Разберём важнейший частный случай – докажем, что любой многочлен нечётной степени восстановить можно. Для этого введём понятие *критического числа* хорошего многочлена нечётной степени. Пусть дан хороший многочлен нечётной степени $P(x)$. Тогда его *критическое число* – наибольший прообраз наибольшей из координат его точек экстремума по оси Y (если точек экстремума нет, то критическим числом многочлена можно считать любое число). Например, у многочлена $2x^3 - 6x$ две точки экстремума – $(-1; 4)$ и $(1; -4)$. Из Y-координат этих двух точек наибольшая – 4, поэтому мы берём наибольший прообраз числа 4 – число 2. Итак, число 2 – *критическое* для многочлена $2x^3 - 6x$. У критического числа многочлена есть полезное свойство. Если k – критическое число многочлена $P(x)$, то любое $t > k$ – единственный прообраз числа $P(t)$. Более того, $\forall t > k\colon P^{-1}\big(P(t)\big) = t$.

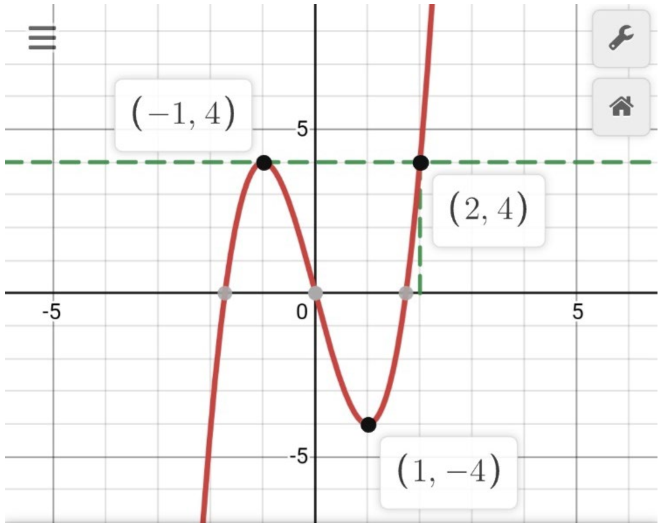

рис. 1 – график многочлена $2x^3 - 6x$.

Приступим к самому доказательству. Пусть некоторый многочлен нечётной степени $P(x)$ нельзя восстановить, то есть существует другой многочлен $Q(x)$ такой, что $P^{-1}(y) = Q^{-1}(y)\ \forall y$. Тогда, по ранее доказанному, $Q(x)$ тоже нечётной степени. Пусть большее из критических чисел многочленов P и Q – это k. Тогда $\forall t > k\colon P^{-1}\big(P(t)\big) = Q^{-1}\big(Q(t)\big) = t$. Поэтому мы знаем $P(k+1)$ – это такое единственное число, что P^{-1} от него – это $k+1$. Но $P^{-1}(y) = Q^{-1}(y)\ \forall y$, поэтому $P(k+1) = Q(k+1)$. Аналогично выведем, что $P(k+2) = Q(k+2)$, $P(k+3) = Q(k+3)$, и так далее. Получается, что многочлены P и Q совпадают в бесконечном количестве точек, значит, они равны, а это противоречит нашему изначальному предположению.

Мы получили разбор главного решённого частного случая.
<u>Теорема:</u> любой многочлен нечётной степени восстановить можно.

Что же делать с многочленами чётной степени? Их нельзя так просто приравнивать на ветвях. Но всё же у меня есть предчувствие, что по ветвям многочлен чётной степени восстановить тоже можно. Давайте поймём, из чего это может следовать. Для этого введём понятие *ветвей* многочлена чётной степени. Пусть число y лежит на ветвях многочлена P, если у него ровно два прообраза.

Пусть дано два многочлена чётной степени – P и Q – с одинаковой обратной функцией f. Пусть прообразы некоторого числа y относительно многочлена P – p_1 и p_2, относительно Q – q_1 и q_2 (таким образом, число y лежит на ветвях обоих многочленов). Тогда, по определению, $f(y) = \frac{p_1+p_2}{2} = \frac{q_1+q_2}{2}$. Пусть

$k_y = \frac{f(y)-q_1}{f(y)-p_1} = \frac{q_2-f(y)}{p_2-f(y)} = \frac{f(y)-q_2}{f(y)-p_2}$; тогда $q_i = \big(p_i - f(y)\big)k_y + f(y)$ и для $i=1$, и для $i=2$. Здесь k_y – это, как несложно увидеть, некоторая функция от y; чтобы это подчеркнуть, обозначим её как $g(y)$, и немного перепишем получившееся утверждение, обозначив наше число y за $P(x)$:
Если $P^{-1} = Q^{-1}$, то для всех x, для которых $P(x)$ на ветвях многочленов P и Q, верно утверждение $Q\left(\left(x - P^{-1}\big(P(x)\big)\right) \cdot g\big(P(x)\big) + P^{-1}\big(P(x)\big)\right) = P(x)$ для некоторой функции g.
Если переформулировать это утверждение, получится лемма, из которой следовала бы наша гипотеза:

<u>Лемма:</u> *для любого многочлена чётной степени канонической формы P, не являющегося чётной функцией, не существует многочлена $Q \neq P$, функции g и числа T таких, что:*

$$Q\left(\left(x - P^{-1}\big(P(x)\big)\right) \cdot g\big(P(x)\big) + P^{-1}\big(P(x)\big)\right) = P(x)\ \forall x\colon T \leq |x|$$

Как доказывать эту лемму, мне неизвестно. Поэтому следует вначале рассмотреть простейший из ещё нерешённых случаев задачи – многочлены четвёртой степени. Для простоты дальнейших вычислений я буду рассматривать только многочлены вида $x^4 + px^2 + qx$, потому что для любого многочлена P четвёртой степени существует «сдвиг» $Q(x) = P(x-t) + c$, где многочлен Q ровно нашего вида. Также мы потребуем $q \neq 0$, потому что для $q = 0$ этот многочлен – чётная функция. Пусть дано число y на ветвях нашего многочлена. Найдём $P^{-1}(y)$ с точностью до знака. Для этого нужно найти сумму действительных прообразов числа y, поэтому нам следует начать решать уравнение $x^4 + px^2 + qx = y$. Возьмём за $f(y)$ некоторую функцию, мы позже определим, какую, и преобразуем уравнение до $\big(x^2 + f(y)\big)^2 + x^2\big(p - 2f(y)\big) + qx - f(y)^2 - y = 0$. Теперь понятно, каким должен быть $f(y)$ – таким, чтобы выражение $-\big(x^2\big(p-2f(y)\big) + qx - f(y)^2 - y\big)$ было полным квадратом, а член при x^2 не был нулевым. Запишем это:

$$-\big(x^2\big(p-2f(y)\big) + qx - f(y)^2 - y\big) = (2f(y) - p)\big(x + g(y)\big)^2$$
$$x^2\big(p-2f(y)\big) + qx - f(y)^2 - y = \big(p - 2f(y)\big)\big(x + g(y)\big)^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{q}{p - 2f(y)} = 2g(y) \\ -\dfrac{f(y)^2 + y}{p - 2f(y)} = g(y)^2 \end{cases}$$
$$-\frac{f(y)^2 + y}{p - 2f(y)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{q^2}{\big(p - 2f(y)\big)^2}$$
$$f(y)^2 + y = \frac{q^2}{8f(y) - 4p}$$

$$4\big(p-2f(y)\big)\big(f(y)^2+y\big)+q^2=0$$

Предыдущая строка – кубическое уравнение относительно $f(y)$ (при любых параметрах, потому что коэффициент при $f(y)^3$ равен -8). Значит, у него есть действительное решение. При этом это решение, как несложно убедиться, удовлетворяет нашему требованию $p-2f(y)\neq 0$ – как раз потому, что $q\neq 0$.

Убедившись в существовании подходящего $f(y)$, продолжим решать исходное уравнение:

$$\big(x^2+f(y)\big)^2-\big(p-2f(y)\big)\big(x+g(y)\big)^2=0$$

Поскольку y на ветвях многочлена, у него есть прообразы, поэтому $p>2f(y)$:

$$\left[\begin{aligned} &x^2+f(y)-\sqrt{p-2f(y)}\big(x+g(y)\big)=0\\ &x^2+f(y)+\sqrt{p-2f(y)}\big(x+g(y)\big)=0\end{aligned}\right.$$

Поскольку y на ветвях многочлена, прообразов ровно 2, и по теореме Виета мы находим их сумму, $\pm\sqrt{p-2f(y)}$, но мы не знаем, какого знака. Мы получили важный вывод:

$$\Big(P(x)=x^4+px^2+q\wedge 4\big(p-2f(y)\big)\big(f(y)^2+y\big)+q^2=0\Big)\Rightarrow P^{-1}(y)=\pm\frac{\sqrt{p-2f(y)}}{2}$$

Возможно, получится подобрать такие p и $q\neq 0$, чтобы уравнение, определяющее $f(y)$, имело простое и короткое решение. Проблема в том, что простое и короткое решение должно существовать для всех y, но при этом числа p и q должны быть константами, никак не зависящими от y. Мне такие p и q подобрать не удалось, но для удобства дальнейшего подбора выпишу сюда это уравнение в упрощённом виде:

$$8x^3-4px^2+8xy-4py-q^2=0$$

Примечания:

- Условие задачи можно дополнить так, чтобы все наши рассуждения остались верными. А именно, можно пытаться восстановить многочлен, зная не только его обратную функцию, но и его степень. Эта задача тоже, пожалуй, достойна рассмотрения.
- Размышляя над леммой, я придумал две новых, по-моему, интересных задачи:
  a) *Для каких многочленов P нет таких многочленов Q_1 и Q_2 хотя бы второй степени, что $P(x)=Q_1\big(Q_2(x)\big)\forall x$?*
  b) *Существуют ли такие различные многочлены Q_1, Q_2, P_1, P_2 – все хотя бы второй степени – что $Q_1\big(Q_2(x)\big)=P_1\big(P_2(x)\big)\forall x$?*

- Среднее арифметическое *комплексных* прообразов y относительно многочлена P канонической формы равно 0; но иногда бывает, что в многочлене, например, 4[ой] степени, у какого-то числа 4 действительных прообраза (это значит, что все прообразы действительные). Тогда P^{-1} от этого числа будет равен нулю. Ниже приведены для иллюстрации графики функций $y = P(x)$ (чёрным) и $x = P^{-1}(y)$ (голубым) для $P(x) = x^4 - 3x^2 + x$.