Многоугольники и теорема Жордана

Я. Большикова, Ф. Васильева, В. Печникова

март-октябрь 2022

Аннотация

В этой статье мы формально определим что такое многоугольник, обсудим некотрые свойства многоугольников и докажем теорему Жордана для ломаной на плоскости.

Этот текст является результатом работы на уроке "мат. специализация" в школе 179.

1 Введение

Определение 1. Подмножества плоскости X и Y называются *гомеомрфными*, если существует непрерывное взаимно однозначное отоброжение $f : X \to Y$, причём обратное отображение $f^{-1} : X \to Y$ тоже непрерывно.

Мы будем обращаться с понятием непрерывности в большой степени неформально (см. [2]). Тем не менее, для всех отображений, которые мы в дальнейшем строим, непрерывность может быть легко обоснована формально (см., например, [1]).

Следующее утверждение — наш основной результат:

Теорема 1 (Жордан)**.** *Любой многоугольник делит плоскость на 2 части, при этом одна часть гомеоморфна диску, а вторая гомеоморфна плоскости с выколотой точкой.*

Но, прежде чем доказать Теорему Жордана, нам нужно определить, что такое многоугольник и т. д.

2 Точки внутри и снаружи многоугольника

Определение 2. *Ломаной на плоскости* мы будем называть последовательность точек $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$ (называемых *вершинами* ломаной) и отрезков $A_0A_1,\ A_1A_2, \dots,\ A_{n-1}A_n$ (называемых *рёбрами* ломаной), такиих что соседние отрезки не лежат на одной прямой.

Ломаная называется *несамопересекающейся*, если её звенья пересекаются только в вершинах и в каждой вершине пересекается не более двух звеньев.

Ломаная называется *замкнутой*, если A_0 и A_n совпадают.

Определение 3. Многоугольником будем называть замкнутую несамопересекающюся ломаную.

Определение 4. Точка B находится *внутри многоугольника*, если любой луч, выходящий из B, пересекает рёбра ломаной нечётное количество раз. При этом, если луч проходит через вершину (или через ребро) и рёбра выходящие из этой вершины (или из концов этого ребра) находятся с одной стороны относительно луча, то считаем за 0 пересечений, а если с одной стороны, то за 1.

Точка C находится *снаружи многоугольника*, если любой луч из C пересекает рёбра чётное количество раз.

Предложение 1. *Точка плоскости, не лежащая на ломаной, находиться либо внутри, либо снаружи многоугольника.*

Доказательство. Возьмём точку A, не лежащую на ломаной. Проведём из этой точки два луча k и l. Тогда чётность пересечения k и l с ломаной будет одинаковой.

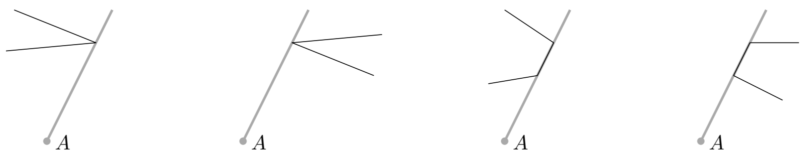

Рис. 1: Четыре случая, когда меняется количество точек пересечения

Действительно, будем двигать луч от положения k к положению l. Количество точек пересечений многоугольника и луча не будет меняться, за исключением четырёх случаев, когда мы натыкаемся на угол или ребро ломаной и сходим с них (см. рисунок 1). В этих случаях чётность количества точек пересечения луча и ломаной не меняется (см. рисунки 2 и 3). $\square$

Лемма 1. *Если две точки X и Y можно соединить отрезком, не пересекающим ломаную, то X и Y находятся либо внутри, либо снаружи.*

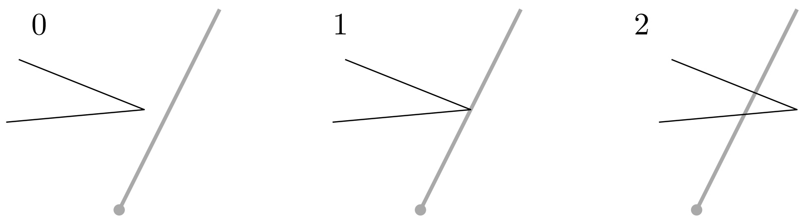

Рис. 2: Пересечение с углом

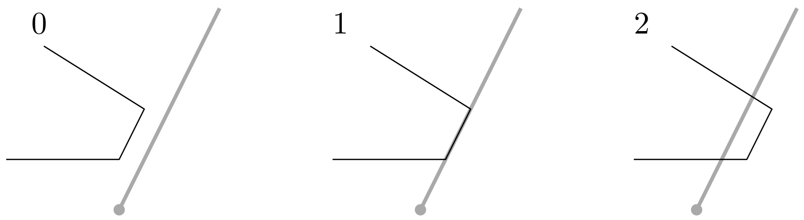

Рис. 3: Пересечение с ребром

Доказательство. Проведём луч a, который начинается в X и проходит через Y. Тогда у него будет столько же пересечений с ломаной, как и у луча, выходящего из Y и сонаправленного лучу a. $\square$

Лемма 2. *Любые две точки N и M внутри или любые две точки снаружи можно соединить ломаной, которая не пересекает многоугольник.*

Доказательство. Пусть для определённости M и N находятся внутри многоугольника (для точек снаружи рассуждение аналогично).

Проводим из точек отрезки к ближайшим рёбрам многоугольника, но не соединяем их с ним. От отрезка, выходящего из M, будем “идти” вдоль рёбер многоугольника. По лемме 1 на каждом шаге пути мы остаёмся внутри многоугольника.

Когда мы дойдём до отрезка из точки N, мы будем с той же стороны от соответствующего ребра многоугольника, что и N — в противном случае луч, проведённый через точку N, и сонаправленный ему луч из точки N имеют разную чётность пересечений с многоугольником.

Нам остаётся дойти до N по отрезку, что завершает доказательство. $\square$

3 Разбиение на треугольники

В дальнейшем мы будем мерять углы в многоугольнике *с внутренней стороны* многоугольника.

Лемма 3. *В любом многоугольнике есть угол, меньший* $180°$.

Доказательство. Берём прямую a вне многоугольника и двигаем её в его сторону. Когда прямая a натыкается на многоугольник, то она натыкается либо на угол? который в этом случае не может быть больше $180°$, либо на ребро, в этом случае углы при этом ребре меньше $180°$ $\square$

Лемма 4. *В любом многоугольнике, кроме треугольника, можно провести диагональ, лежащую внутри него.*

Доказательство. Берём угол в многоугольнике, меньший $180°$ с вершиной A. Обозначим через B и C вершины старон угла A. Пусть нельзя провести диагональ между B и C.

Будем вести прямую x от A параллельно отрезку BC. Первоое, на что натыкается пямая x внутри угла, будет либо угол, из вершины ктого можно провести диагональ к вершине A, либо ребро, к вершинам которого также можно будет провести диагональ. $\square$

Лемма 5. *При разбиении многоуголтъника* Σ *диаганалью на два многоугольника* Σ_1 *и* Σ_2*, точки внут* Σ *(кроме этой диогонали) лежат либо внутри* Σ_1*, либо внутри* Σ_2.

Доказательство. Предположим, что это не так. Возьмём точку A внутри Σ, которая лежит одновременно внутри Σ_1 и Σ_2, либо одновременно снаружи. Мы можем дойти из A до точки A' рядом с диагональю, не пересекая Σ и саму диагональ. Тогда по лемме 1 точка A' также лежит внутри Σ и одновременно внутри Σ_1 и Σ_2, либо одновременно снаружи.

Проведём из A' луч k через диогональ. Он пересекает многоугольники Σ_1 и Σ_2 одинаковое по чётности количество раз. Обозначим их n и m. Получается, что k пересекает Σ всего $n + m - 2$ раза (мы вычитаем 2, поскольку пересечение k с диагональю посчитано дважды). Полученная сумма чётна, откуда выходит противоречие. $\square$

Предложение 2. *Любой многоугольник можно разделить на треугольники* $n - 3$ *диагоналями.*

Доказательство. База: треугольник разбит на треугольники (достаточно провести 0 диагоналей).

Шаг: пусть все многоугольники с количеством вершин меньше n можно разбить на треугольники. В многоугольнике с n вершинами можно провести диагональ, разбивающую многоугольник на 2 многоугольника с меньшим количеством вершин, а их мы можем разбить на треугольники по предположению индукции. Если в одном из них k вершин, то в другом вершин $n - k + 2$. Значит, всего диагоналей будет проведено $1 + (k - 3) + (n - k + 2 - 3) = n - 3$.

Отметим, что по лемме 5 диагонали, проведённые в предположении индукции, будут лежать внутри исходного многоугольника. Эти диагонали не пересекаются также вследствие леммы 5. □

Следующее утверждение мы считаем общеизвестным.

Лемма 6. *Любые $n - 3$ непересекающихся диагонали в выпуклом n-угольнике делят его на треугольники.* □

Лемма 7. *Внутренность произвольного многоугольника гомеоморфна внутренности вписанноого многоугольника.*

Доказательство. Берём многоугольник Σ с n вершинам и делим его на треугольники (по предложению 2). Нумеруем вершины Σ по кругу. Берём окружность и вписанный в неё n-угольник Σ'. Нумеруем вершины Σ' по кругу. Соеденим вершины Σ' с теми же номерами, которые были соединены в Σ.

Отрезки соединения не пересекают друг друга. Действительно, диаганаль AB делит Σ на 2 многоугольника. Вершины от номера A до номера B по часовой пренадлежат одному многоугольнику, а вершины от номера B до номера A по часовой — другому. Следовотельно, точки от номера A до номера B по часовой и от номера B до номера A по часовой (не считая A и B) не соединяются, ведь диагональ, лежащая внутри первого многоугольника, не поподает внутрь второго многоугольника, а их внутренности не пересекаются по лемме 5.

По лемме 6 в итоге Σ' разбивается на треугольники. Треугольник ABC из Σ отображаем в треугольник $A'B'C'$ из Σ' афинным преобразованием (сторона AB отображается в $A'B'$ линейно). Так же делаем с остальными треугольниками. Это задаёт гомеоморфизм внутренностей Σ и Σ'. □

4 Докозательство теоремы Жордана

Предложение 3. *Многоугольник делит плоскость на две части, одна из них (внутренность многоугольника) гомеоморфна диску.*

Доказательство. Зададим отображение внутренности вписанного многоугольника в диск. Назовём центр его окружности O. Проведём любой радиус OA персекающий многоугольник в точке B. Растяним отрезок OA в OB. Таким образом отобразим все точки. □

Лемма 8. *При разбиении многоугольника на треугольники в предложении 2 найдётся треугольник с двумя сторонами, являющимися ребрами многоугольника.*

Доказательство. Пусть мы провели диагональ в Σ. Выберем одну из частей, на которые Σ делится этойдиагональю. Далее, при разбиении этой части диогональю выберем меньшую часть, только 1 ребро которой является диагональю, а остальные — рёбрами Σ. Будем делать так при проведении каждой новой диагонали. Часть, полученная в конце этого процесса — и есть требуемый треугольник. □

Предложение 4. *Точки вне многоугольника образуют множество гомеоморфное плоскости с выколотой точкой.*

Доказательство. Докажем утверждние индукцией по числу вершин многоугольника.

База: плоскость с выколотым треугольником гомеоморфна поскости с выколотой точкой.

Шаг: пусть после выкалывания внутренности любого многоугольника с $n-1$ вершиной оставшаяся часть плоскости гомеоморфна плоскости с выколотой точкой.

Проведём в данном n-угольнике Σ диагонали, разбиивающие его внутренность на треугольники. Возьмём треугольник ABC из леммы 8 (сторона AC является диагональю). Обозначим Σ без вершины B через Σ'.

Зададим гомеоморфизм из плоскости без внутренности Σ в плоскость без внутренности Σ'. Для этого выберем точку O вне Σ рядом с точкой B так, что B лежит внутри треугольника AOB. Для каждой точки E на AC обозначим через F пересечение OE и сторон AB и BC. Растянем отрезок OF до отрезка OE. Это задаёт гомеоморфизм четырёхугольника $AOCB$ и треугольника AOC. Точки плоскости вне AOC пусть переходят в себя.

Построенный гомеоморфизм сводит утверждение предложения для многоугольника Σ к предположению индукции. □

Благодарности

Мы блогодарны нашему научному руководителю, Андрею Рябичеву, за помощь в редоктировании текста, научные консультации и картинки.

Так же мы блогодарны Константину Щербокову за помощь в поиске неточностей.

Список литературы

[1] Виро, Иванов, Нецветаев, Харламов. *Элементарная топология*

[2] Прасолов. *Наглядная топология*