Наименьшее количество рёбер, достаточное для гамильтоновости графа

Федянин Максим

Простым графом называем граф без кратных ребер и петель.
Два ребра графа называем ***смежными***, если они имеют общую вершину.
Граф называем ***связным***, если для любых двух его вершин существует упорядоченный набор рёбер, любые два последовательных ребра которого смежны, первое ребро которого содержит одну выбранную вершину, а последнее - другую.
Путь из одной вершины графа в другую – упорядоченный набор вершин, в которой каждая вершина соединена со следующей ребром.
Путь в графе — последовательность вершин, в которой каждая вершина соединена со следующей ребром ***Цикл*** – путь из одной вершины графа в неё же саму.
Граф с конечным числом вершин называем ***гамильтоновым***, если он содержит цикл, проходящий по всем вершинам без повторения вершин.
Два простых графа называем ***изоморфными***, если существует взаимнооднозначное соответствие множеств их вершин, при котором вершины одного графа соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины другого графа соединены ребром.
Две вершины графа называем ***смежными***, если их пара – ребро графа.
Степень вершины графа (неориентированного) с конечным числом рёбер – число таких рёбер, в которые эта вершина входит как в пару вершин.
1. Если в простом графе на n вершинах число рёбер $\geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$, то такой граф связен.
2. Существует и единственный с точностью до изоморфизма простой несвязный граф на n вершинах с числом рёбер $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, и, следовательно, оценка из пункта 1 неуменьшаема.
3. Если в простом графе на n вершинах число рёбер $\geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$, то такой граф гамильтонов.
4. Существует негамильтонов граф на n вершинах с $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ ребрами, и, следовательно, оценка из пункта 3 неуменьшаема.
5. (Гипотеза) $\forall n \geq 6$ существует единственный с точностью до изоморфизма простой негамильтонов граф с n вершинами и $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ рёбрами.
Замечание: для $n = 5$ есть два неизоморфных негамильтоновых простых графа (см. рисунок), для $n = 2, 3, 4$ утверждение верно
6. (Гипотеза) В простом графе на n вершинах с числом рёбер $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ и вершиной степени 2 ($\forall n > 2$ такой граф существует и единственный с точностью до изоморфизма) число гамильтоновых циклов наименьшее и равно $(n-3)!$

1. Доказательство :
предположим обратное, тогда в графе можно выделить 2 подграфа на $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ и на $n - k$ вершинах так, что ни из какой вершины одного нельзя

попасть ни в какую вершину другого.
Тогда все рёбра графа – рёбра этих подграфов и только они, а значит всего в графе $\leq \frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ рёбер.
Найдём максимальное значение функции $f(x) = \frac{x(x-1)}{2} + \frac{(n-x)(n-x-1)}{2}$ при $x \in [1, \frac{n}{2}]$ $f(x) = x^2 - nx + \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = (x - \frac{1}{2}n)^2 + \frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n$, – при x = 1 таким образом, наибольшее число рёбер всего графа $\leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, но, по условию, оно больше этого числа хотя бы на 1 – противоречие, значит граф связен.
QED
2. Доказательство :
так как граф несвязный, то в нём можно выделить два подграфа на $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ и на $n-k$ вершинах так, что ни из какой вершины одного нельзя попасть ни в какую вершину другого. Заметим теперь, что максимум введённой в доказательстве (1.) функции $f(x)$ на отрезке $[1, fracn2]$ достигается при $x = 1$ и равен $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, то есть в исходном графе выделен подграф с одной (изолированной) вершиной ($:= A_1$) и полный подграф на $n-1$ вершинах ($:= A_2, ..., A_n$) Очевидно, соответствие $A_i \to B_i$, B_1 – изолированная вершина другого несвязного графа из условия, является изоморфизмом (всего $(n-1)!$ различных изоморфизмов).
QED
3. Доказательство :
Согласно теореме Оре[1], если в простом графе на n вершинах сумма степеней любых двух несмежных вершин $\geq n$, то граф гамильтонов.
Для графа из условия удалено $\leq n-3$ рёбер из соответствующего полного графа на этих вершинах. Выберем пару таких несмежных вершин, сумма степеней которых минимальна, например, когда все $n-3$ удалённых из соответствующего полного графа рёбер содержат одну из вершин выбранной пары. Тогда сумма их степеней $\geq (n-1) + (n-1) - (n-4) - 2$ (сумма полных степеней без количества отсутствующих $n-4$ рёбер, содержащих не более одной из вершин выбранной пары, и без вклада ребра, образованного самими выбранными вершинами), то есть n, значит, граф удовлетворяет теореме Оре, и, следовательно, гамильтонов.
QED
(замечание: т.к. получилось ровно n, то при уменьшении числа рёбер простого связного графа с числа $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ на 1 условие теоремы Оре нарушается)
4. Доказательство :
Рассмотрим полный граф на $n-1$ вершинах и присоединённую к одной из его вершин n-ую вершину. Построен пример негамильтонова графа на n вершинах с числом рёбер $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$. QED

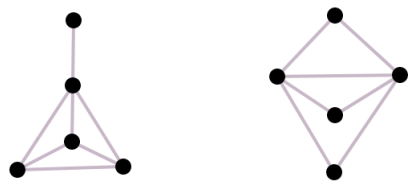

рисунок к замечанию к гипотезе 5

[1] Oystein Ore "Note on Hamilton circuits 1960