

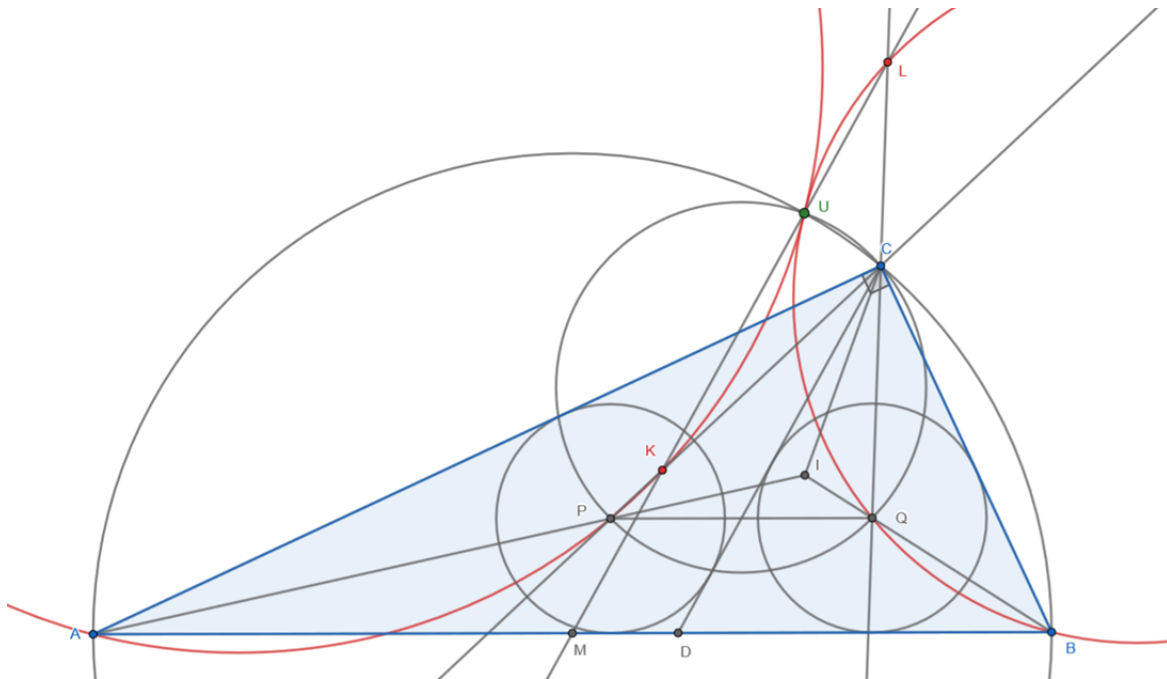
Две равные вписанные окружности в прямоугольном треугольнике

Комаров Сергей Сергеевич

СУНЦ МГУ

Теорема:

Точка D выбрана на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC так, что окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD , имеют равные радиусы. Назовём их центры P и Q соответственно, а середину AB обозначим через M . Определим точки K и L как пересечение прямой, проходящей через M параллельно CD , с прямыми PC и QC соответственно. Обозначим точку пересечения, отличную от C , описанных окружностей $\triangle ABC$ и $\triangle PCQ$ через U . Тогда описанные окружности $\triangle AKP$ и $\triangle BQL$ касаются в точке U .



Обозначение основных точек:

P и Q - центры окружностей, вписанных в треугольники $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ соответственно.

I - центр вписанной окружности треугольника $\triangle ABC$.

E - точка касания вписанной окружности $\triangle ABC$ с прямой AB .

F - середина PQ .

G - точка пересечения CI и прямой симметричной CD относительно PQ .

T – точка пересечения прямой IE , прямой CD и окружности $PDEQ$ (далее окружность обозначают $(PDEQ)$).

U – точка пересечения прямой IE и описанной окружности $\triangle ABC$.

R – точка, в которую перешла C при гомотетии $H_I^{\frac{IP}{IA}}$

$$J = IE \cap (PQC).$$

$$X = CI \cap (ARB).$$

$$Y = IE \cap (ARB).$$

$$S = IE \cap (ABC).$$

$$Z = CI \cap (ABC).$$

$$N = IE \cap (ARB).$$

$$K = MU \cap PC.$$

$$L = MU \cap QC.$$

$$W = CD \cap (PQCU).$$

Наметим план доказательства, разбив задачу на отдельные факты, которые сами по себе довольно интересны. В скобках указаны обозначения, которые понадобятся для доказательства данной леммы.

Лемма 1. CD проходит через середину PQ и симметрично CI относительно биссектрисы $\angle PCQ$. (F, G)

Лемма 2. F равноудалена от точек P, D, E, Q . (E) [1]

Лемма 3. Прямая проходящая через M параллельно CD , прямая IE и описанная окружность $\triangle ABC$ пересекаются в одной точке U . (T, U)

Лемма 4. $PQCU$ – вписанный. (J, X, Y, S, Z, N)

Лемма 5. I – ортоцентр $\triangle PUQ$, $\triangle APU \sim \triangle UQB$.

Лемма 6 (основная теорема). $APKU$ и $BQUL$ – вписанные четырёхугольники, описанные окружности которых касаются в точке U . (K, L)

Лемма 7. Биссектриса $\angle AUB$ проходит через W , UG симметрична UA относительно UP и UG симметрична UB относительно UQ . (W)

Лемма 1

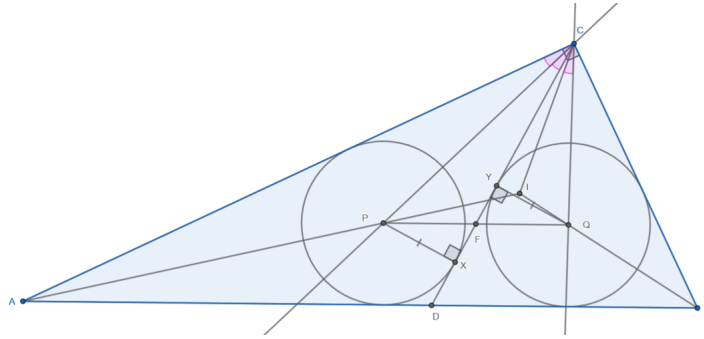


Рис. 1: К лемме 1 (1)

X и Y – точки касания вписанных окружностей с CD .

$F = CD \cap PQ$.

• CD – это общая внутренняя касательная к вписанным окружностям равного радиуса \Rightarrow

$$\begin{cases} PX = QY \text{ (как радиусы)} \\ \angle PXF = \angle FYQ = 90^\circ \\ \angle PFX = \angle YFQ \text{ (как вертикальные).} \end{cases} \Rightarrow \triangle PXF = \triangle QYF \Rightarrow F \text{ – середина } PQ.$$

• Заметим, что CP и CQ биссектрисы $\angle ACD$ и $\angle DCB \Rightarrow \angle PCQ = \frac{\angle ACB}{2} = 45^\circ = \angle ACI$ (т. к. CI –

биссектриса $\angle ACB = 90^\circ \Rightarrow \angle ACP = \angle ICQ$, а также $\angle ACP = \angle PCF$ (т. к. CP биссектриса $\angle ACD$) $\Rightarrow \angle ICQ = \angle PCF$. **QED**

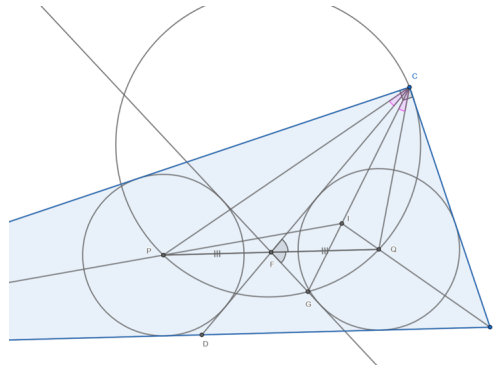


Рис. 2: К лемме 1 (2)

Из первых двух пунктов: CI – симедиана в $\triangle PCQ$, а CF – его медиана. **QED**

Известный факт № 1: Если отразить медиану относительно стороны, к которой она проведена, то она пересечет симедиану, проведённую к той же стороне, в точке на описанной окружности этого треугольника. (Эта точка будет являться отраженной точкой Шалтая. Она же дополняет вершины треугольника до гармонического четырехугольника).

Тогда отразим CD относительно PQ . Это будет вторая общая внутренняя касательная двух вписанных окружностей. (т. к. PQ линия центров) Назовём точку пересечения этой общей касательной с прямой CI – G . Она будет лежать на описанной окружности $\triangle PCQ$. (Известный факт №1)

Лемма 2

Доказательство этой леммы в общем случае и ещё много интересных фактов про две вписанные окружности, в том числе и доказательство того, что $CD^2 = AC \cdot CB$, приведены в статье.[1]

Я же напишу доказательство этой леммы здесь, чтобы не нарушать целостность рассуждений.

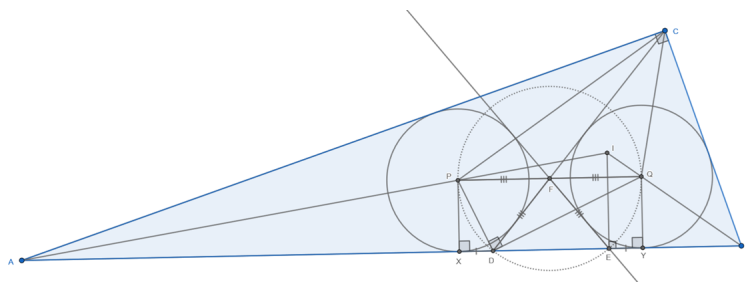


Рис. 3: К лемме 2

E – точка касания вписанной окружности $\triangle ABC$ с прямой AB . E' – точка пересечения прямой симметричной CD относительно PQ с AB . X и Y – точки касания вписанных окружностей $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ соответственно со стороной AB .

Заметим, что DP и DQ биссектрисы смежных углов $\Rightarrow \angle PDQ = 90^\circ \Rightarrow PF = FQ = DF$.

Известный факт № 2: В $\triangle ABC$ на стороне AB взята точка D . Общая внутренняя касательная, проведённая к вписанным окружностям $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$, отличная от CD , проходит через точку касания вписанной окружности $\triangle ABC$ со стороной AB . $\Rightarrow E = E'$

Очевидно, $XPQY$ – прямоугольник. Заметим, что при симметрии относительно серединного перпендикуляра

к $PQ : F \rightarrow F, P \rightarrow Q, X \rightarrow Y$, а так как в доказательстве известного факта №2 мы поняли, что $DX = EY$, то и $D \rightarrow E \Rightarrow DF = FE \Rightarrow F$ равноудалена от точек P, D, E, Q . **QED**

Лемма 3

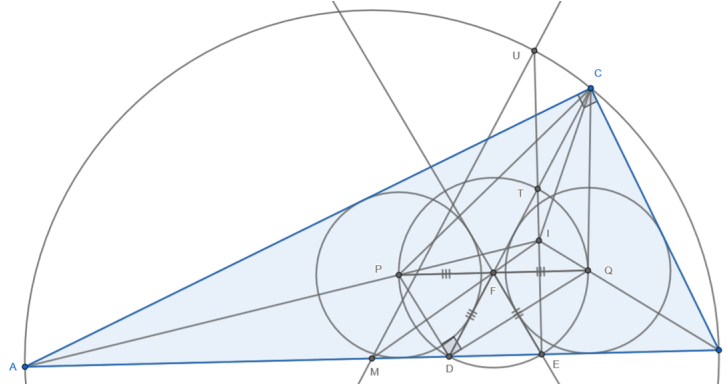


Рис. 4: К лемме 3

- Продлим IE до пересечения с CD до точки T . При симметрии относительно $PQ : IE \rightarrow IE$ (т. к. $IE \perp AB, PQ \parallel AB \Rightarrow IE \perp PQ$), $CD \rightarrow$ вторая общая касательная - FE . Тогда при обратной симметрии прямые CD и IE тоже пересекутся на окружности $PDEQ$. (т. к. PQ - диаметр этой окружности \Rightarrow она переходит сама в себя). Значит, IE и CD пересекаются на окружности $PDEQ$ в точке T .

- Сделаем гомотегию с центром в I , переводящую $P \rightarrow A$, так как $PQ \parallel AB \Rightarrow \frac{IP}{IA} = \frac{IQ}{IB} = k \Rightarrow Q \rightarrow B$. Тогда при $H_I^k : PQ \rightarrow AB \Rightarrow F \rightarrow M \Rightarrow$ окружность $PDEQT \rightarrow$ окружность, описанную около $\triangle ABC$. (т. к. PQ и AB - диаметры соответственных окружностей). Пусть точка T при гомотегии H_I^k переходит в U . Тогда $U \in IE$ (т. к. прямая IE переходит сама в себя), $U \in$ окружности, описанной около $\triangle ABC$ (т. к. $T \in$ окружности $PDEQ$, которая переходит в окружность, описанную около $\triangle ABC$), а прямая $TF \parallel UM$ (т. к. при $H_I^k : TF \rightarrow UM$) $\Leftrightarrow CD \parallel UM$. **QED**

Лемма 4

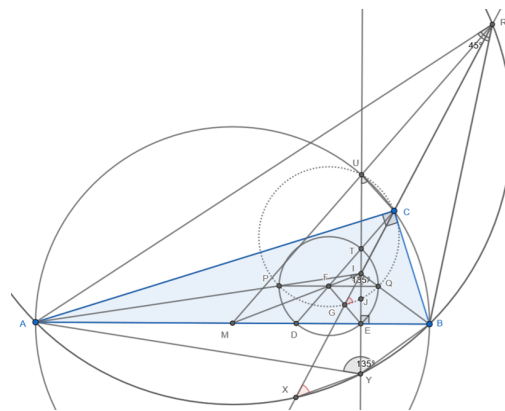


Рис. 5: К лемме 4 (1): равенство разноцветных углов не доказано.

$PQCU$ - вписанный $\Leftrightarrow GJCU$ - вписанный $\Leftrightarrow \angle CUI = \angle IGJ$. Пусть R - это точка, в которую перешла C при гомотегии H_I^k . Тогда при $H_I^k \triangle PCQ \rightarrow \triangle ARB \Rightarrow$ отрезок $CF \rightarrow$ отрезок RM , как медианы в соответственных треугольниках. Также описанная окружность $\triangle PCQ$ перешла в описанную окружность

$\triangle ARB$, но $\angle PCQ = 45^\circ \Rightarrow \angle ARB = 45^\circ$.

(1) $\angle ARB = 45^\circ$, а $ARBY$ – вписанный $\Rightarrow \angle AYB = 135^\circ$.

(2) $\angle AIB = 90^\circ + \frac{\angle ACB}{2} = 135^\circ$

1), 2) \Rightarrow окружности AIB и AYB симметричны относительно AB .

(3) $IE \perp AB$

1), 2), 3) $\Rightarrow IE = EY$ Тогда, так как при H_I^k окружность $PCQ \rightarrow$ окружность ARB , то $G \rightarrow X, J \rightarrow Y \Rightarrow \triangle GIJ \rightarrow \triangle XIY \Rightarrow \triangle GIJ \sim \triangle XIY \Rightarrow \angle IGJ = \angle IXY$.

Значит, $\angle CUI = \angle IGJ \Leftrightarrow \angle CUI = \angle IXY \Leftrightarrow XYCU$ – вписанный, что мы и будем доказывать.

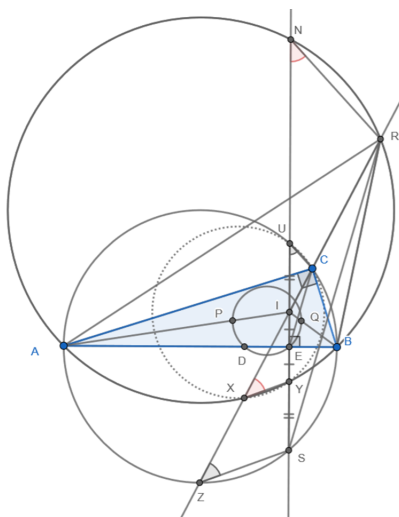


Рис. 6: К лемме 4 (2)

Так как при гомотетии H_I^k окружность $PDEQ \rightarrow$ окружность ABC , а $IE \rightarrow IE$, то $E \rightarrow S \Rightarrow$ отрезок $EC \rightarrow$ отрезок $RS \Rightarrow EC \parallel RS$.

По доказанному выше: $IE = EY = x, EU = ES$ (т. к. AB – диаметр окружности ABC , а $IE \perp AB$) $\Rightarrow UI = YS = y$.

$XYCU$ – вписанный $\Leftrightarrow IY \cdot IU = IX \cdot IC \Leftrightarrow 2xy = IX \cdot IC$.

1) $IX \cdot IR = IN \cdot IY = 2x \cdot (y + UN)$ (степень точки I относительно окружности ARB)

2) $EC \parallel RS \Rightarrow \frac{IC}{IR} = \frac{IE}{IS} \Leftrightarrow \frac{IC}{IR} = \frac{x}{2x+y} \Leftrightarrow IR = \frac{IC \cdot (2x+y)}{x}$.

3) $EN \cdot EY = AE \cdot EB$ (степень точки E относительно окружности ARB), $EU \cdot ES = AE \cdot EB$ (степень точки E относительно окружности ACB) $\Rightarrow EN \cdot EY = EU \cdot ES \Leftrightarrow (x+y+UN) \cdot x = (x+y)^2 \Leftrightarrow x^2 + xy + x \cdot UN = x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow UN = \frac{y \cdot (x+y)}{x}$

1), 2) $\Rightarrow IX \cdot \frac{IC \cdot (2x+y)}{x} = 2x \cdot (y + UN)$, 3) $\Rightarrow IX \cdot \frac{IC \cdot (2x+y)}{x} = 2x \cdot (y + \frac{y \cdot (x+y)}{x}) \Leftrightarrow IX \cdot IC = \frac{2x^2y + 2xy \cdot (x+y)}{2x+y} = 2xy \Leftrightarrow PQCU$ – вписанный. **QED**

Лемма 5

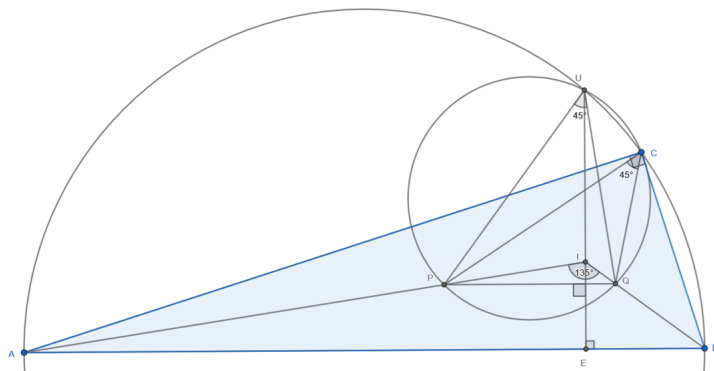


Рис. 7: К лемме 5 (1)

(1) $IE \perp PQ$ (см. Лемма 2)

(2) $\angle PIQ = 135^\circ$ (см. Лемма 4)

(3) $\angle PCQ = 45^\circ = \angle PUQ$ (т. к. $PQCU$ – вписанный + Лемма 1)

Из 2) и 3) $\Rightarrow \angle PIQ + \angle PUQ = 180^\circ$.

Также из 1) следует, что I – ортоцентр $\triangle PUQ$.

Здесь: $X = BQ \cap PU$, $Y = BQ \cap PU$.

Так как I – ортоцентр $\triangle PUQ$, то $BQ \perp PU \Rightarrow \angle UXQ = 90^\circ$, $\angle XUQ = 45^\circ$ (см. выше) $\Rightarrow \angle XQU = 45^\circ \Rightarrow \angle UQB = 135^\circ$, аналогично $\angle APU = 135^\circ$.

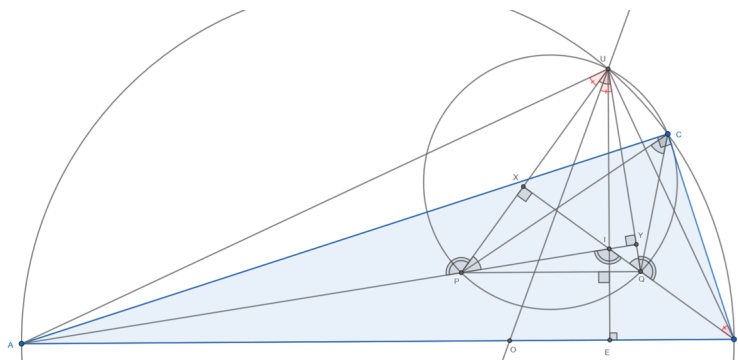


Рис. 8: К лемме 5 (2): две серые дугки - 135° , одна серая дугка - 45°

Проведем биссектрису UO в треугольнике ABU . Тогда $\angle AUO = \angle OUB = \frac{\angle AUB}{2} = 45^\circ$ (т. к. AB – диаметр).

Как смежный $\angle UQB = 135^\circ$ (1), а из суммы углов треугольника QBU : $\angle QBU + \angle QUB = 45^\circ$, $OUB = 45^\circ \Rightarrow \angle QBU = \angle OUQ$.

(*) *Заметим, что из равенства углов $\angle QBU = \angle OUQ$ следует касание описанной окружности $\triangle QUB$ и прямой UO (по теореме про угол между касательной и хордой). Аналогично описанная окружность $\triangle PUA$ касается UO . Значит окружности, описанные около треугольников $\triangle QUB$ и $\triangle PUA$ касаются в точке U .*

$\angle PUQ = \angle AUO = 45^\circ \Rightarrow \angle AUP = \angle OUQ = \angle QBU$ (2)

Из (1) и (2) видно, что $\triangle APU \sim \triangle UQB$. **QED**

Лемма 6

Будем доказывать, что $BQUL$ – вписанный. Для четырёхугольника $AKPU$ рассуждения аналогичны.

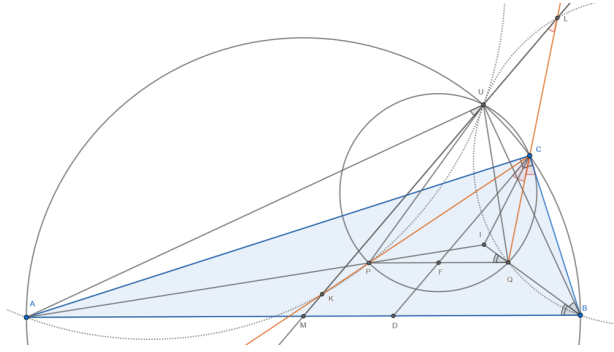


Рис. 9: К лемме 6: равенство разноцветных углов не доказано

$BQUL$ – вписанный $\Leftrightarrow \angle ULC = \angle UBQ$. Введём $\angle ABC = 2\beta$, $\angle DCB = 2\gamma$.

$MU \parallel CD$ (лемма 3) $\Rightarrow \angle ULQ = \angle DCQ = \angle QCB = \gamma$ (т. к. CQ – биссектриса $\angle DCB$)

(1) $\triangle APU \sim \triangle UQB$ (лемма 5) $\Rightarrow \angle UBQ = \angle AUP = \angle AUC - \angle PUC$.

$AB \parallel PQ$ (см. Лемма 2) $\angle ABI = \angle PQI = \beta$, $\angle IQC = \angle QCB + \angle QBC = \gamma + \beta \Rightarrow \angle PQC = \gamma + 2\beta$

(2) $PQCU$ – вписанный (лемма 4) $\Rightarrow \angle PUC = 180^\circ - \angle PQC = 180^\circ - \gamma - 2\beta$.

(3) $AUCB$ – вписанный (лемма 3) $\Rightarrow \angle AUC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 2\beta$.

Из (1), (2), (3) следует, что $\angle UBQ = 180^\circ - 2\beta - (180^\circ - \gamma - 2\beta) = \gamma = \angle ULQ \Rightarrow BQUL$ – вписанный. Тогда из замечания (*) в лемме 5 следует, что окружности $APKU$ и $BQUL$ касаются в точке U . **QED**

Лемма 7

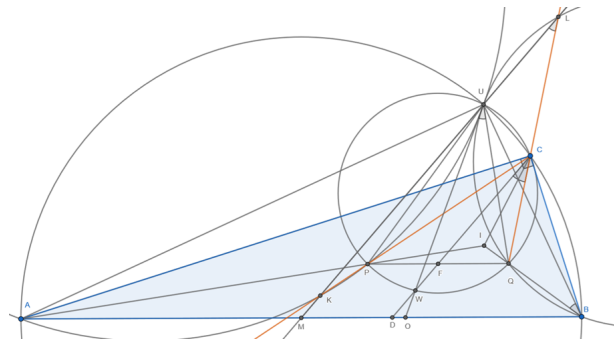


Рис. 10: К лемме 7 (1)

$W = CD \cap (PQCU)$.

Из замечания (*) в лемме 5 мы знаем, что окружности $APKU$ и $BQUL$ касаются биссектрисы $\angle AUB$ – UO $\Rightarrow \angle OUQ = \angle QBU$, $\angle QBU = \angle ULQ$ (т. к. $BQUL$ – вписанный по лемме 6), $\angle ULQ = \angle WCQ$ (т. к. $MU \parallel CD$ по лемме 3) $\Rightarrow \angle OUQ = \angle WCQ \Rightarrow UO$ проходит через W (т. к. $WQCU$ – вписанный). **QED**

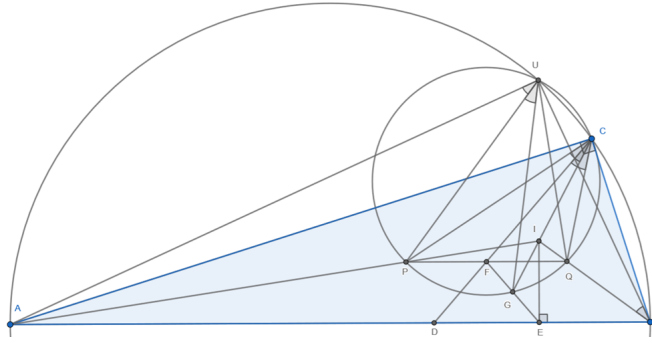


Рис. 11: К лемме 7 (2)

$$\angle DCB = 2\gamma.$$

В лемме 6 мы доказали, что $\angle UBQ = \gamma = \angle FCQ$, $\angle FCQ = \angle PCG$ (т. к. CF и CG симметричны относительно биссектрисы $\angle PCQ$ по лемме 1), $\angle PCG = \angle PUG$ ($PQCU$ – вписанный по лемме 4) \Rightarrow

$$(1) \angle UBQ = \angle PUG$$

$$(2) \text{ Из леммы 5 } \Rightarrow \triangle APU \sim \triangle UQB \Rightarrow \angle UBQ = \angle AUP$$

Из 1), 2) следует, что $\angle AUP = \angle PUG \Rightarrow UG$ симметрична UA относительно UP . Аналогично доказывается, что UG симметрична UB относительно UQ . **QED**

Приложения:

Известный факт № 1

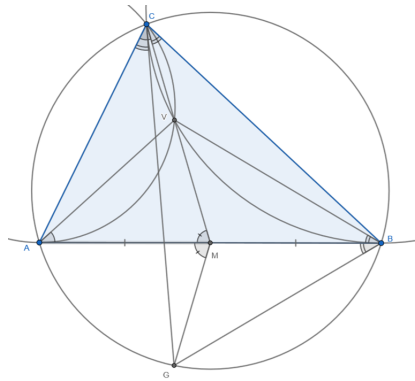


Рис. 12: К известному факту 1

Точка Шалтая (V) – пересечение двух окружностей, проходящих через вершину C треугольника ABC и касающихся прямой AB в точках A и B .

M – точка пересечения прямой CV и AB .

Т.к. VC – радикальная ось окружностей AVC и BCV : $AM^2 = MV \cdot MC = MB^2 \Rightarrow AM = MB \Rightarrow CM$ – медиана в $\triangle ABC$.

$\angle ACV = \angle VAB$ (по теореме про угол между касательной AB и хордой AV), аналогично $\angle VCB = \angle VBA \Rightarrow \angle VBA + \angle VAB = \angle ACB$. Тогда $\boxed{\angle ACB + \angle AVB = 180^\circ}$.

Отразим V относительно AB и получим точку G . Тогда $\triangle AVB = \triangle AGB \Rightarrow \angle AVB = \angle AGB \Rightarrow \angle ACB + \angle AGB = 180^\circ \Rightarrow ACBG$ – вписанный $\Rightarrow \angle ACG = \angle ABG, \angle ABG = \angle ABV$ (т. к. $\triangle AVB = \triangle AGB$) $\Rightarrow \angle ACG = \angle ABV = \angle VCB \Rightarrow CG$ – симедиана (т. к. AV – медиана) \Rightarrow симедиана и медиана, отраженная относительно AB , пересекаются на описанной окружности $\triangle ABC$. **QED**

Известный факт №2

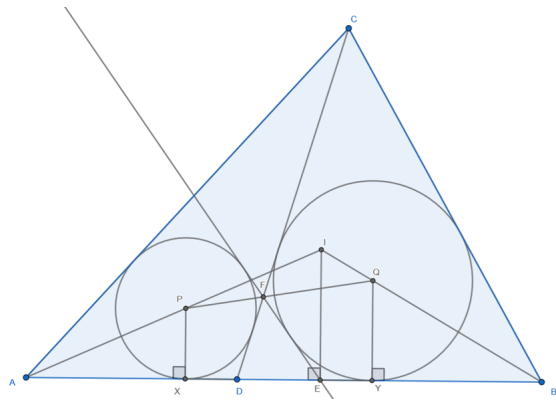


Рис. 13: К известному факту 2

E – точка касания вписанной окружности $\triangle ABC$ с прямой AB .
 E' – точка пересечения прямой симметричной CD относительно PQ с AB .
 $F = CD \cap PQ$
 Обозначим $AC = b$, $CB = a$, $CD = d$, $AD = x$, $DB = y$
 Вписанные окружности $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ являются вневписанными окружностями $\triangle DFE' \Rightarrow XE' = DY = \frac{P_{\triangle DFE'}}{2} \Rightarrow DX = \frac{P_{\triangle ADC} - b}{2} = \frac{x + d - b}{2} = E'Y$ (1)
 $EY = EB - YB = \frac{P_{\triangle ABC} - b}{2} - \frac{P_{\triangle DCB} - d}{2} = \frac{x + y + a - b}{2} - \frac{a + y - d}{2} = \frac{x + d - b}{2}$ (2)
 Из (1) и (2) $\Rightarrow E = E'$. **QED**

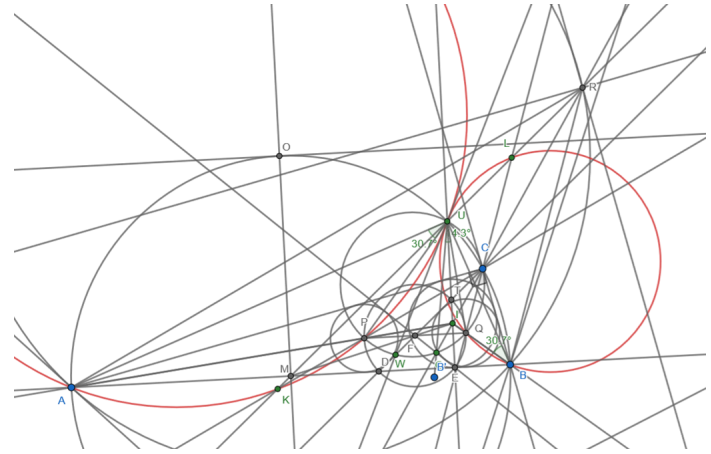


Рис. 14: Всё вместе: красота

Список литературы

- [1] А. Блинков, Ю. Блинков Две окружности в треугольнике, три окружности в треугольнике // КВАНТ
2012 №2