Две равные вписанные окружности в прямоугольном треугольнике

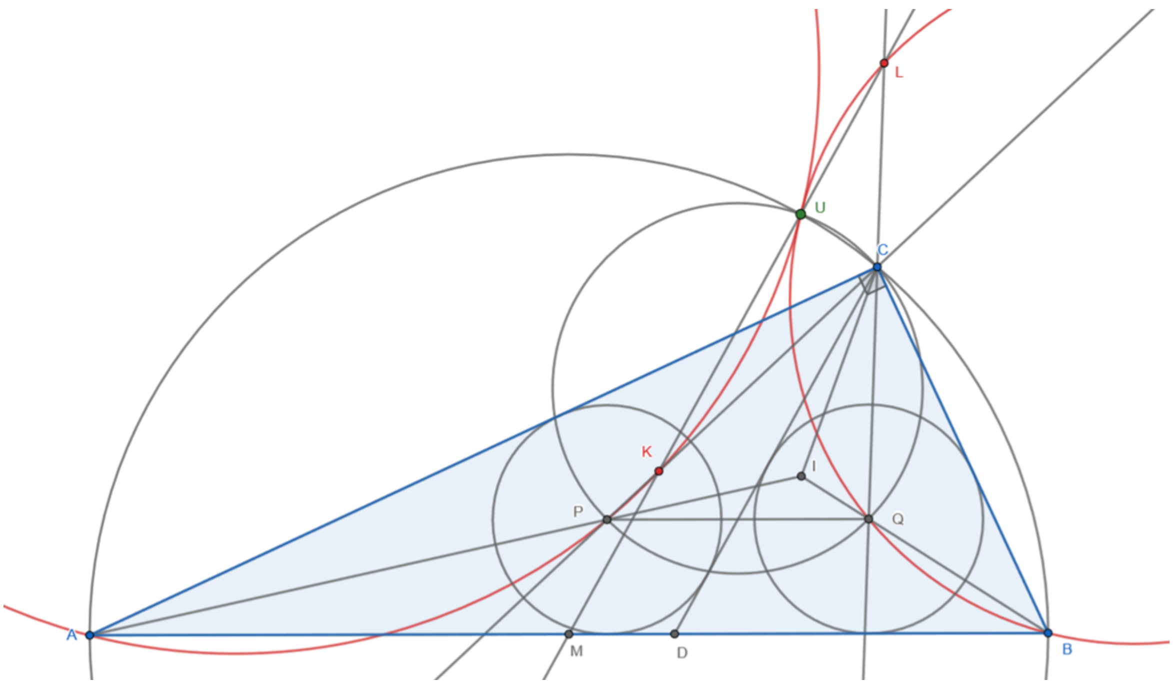
Комаров Сергей Сергеевич

СУНЦ МГУ

Теорема:

Точка D выбрана на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC так, что окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, имеют равные радиусы. Назовём их центры P и Q соответственно, а середину AB обозначим через M. Определим точки K и L как пересечение прямой, проходящей через M параллельно CD, с прямыми PC и QC соответственно. Обозначим точку пересечения, отличную от C, описанных окружностей $\triangle ABC$ и $\triangle PCQ$ через U. Тогда описанные окружности треугольников $\triangle AKP$ и $\triangle BQL$ касаются в точке U.

Лемма 6. *$APKU$ и $BQUL$ – вписанные четырёхугольники, описанные окружности которых касаются в точке U.*



Обозначение основных точек:

P и Q - центры окружностей, вписанных в треугольники $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ соответственно.

I - центр вписанной окржности тругольника $\triangle ABC$.

E – точка касания вписанной окружности $\triangle ABC$ с прямой AB.

F – середина PQ.

G – точка пересечения CI и прямой, симметричной CD относительно PQ.

T – точка пересечения прямой IE, прямой CD и окружности $PDEQ$.
U – точка пересечения прямой IE и описанной окружности треугольника $\triangle ABC$.
R – точка, в которую перешла C при гомотетии $H_I^{\frac{IP}{IA}}$.
Точки $A_1, A_2, ...A_i$, заключенные в круглые скобки, обозначают окружность, проходящую через точки $A_1, A_2, ...A_i$.
$J := IE \cap (PQC)$.
$X := CI \cap (ARB)$.
$Y := IE \cap (ARB)$.
$S := IE \cap (ABC)$.
$Z := CI \cap (ABC)$.
$N := IE \cap (ARB)$.
$K := MU \cap PC$.
$L := MU \cap QC$.
$W := CD \cap (PQCU)$.

Наметим план доказательства, разбив задачу на отдельные факты, которые сами по себе довольно интересны. В доказательстве леммы с номером n не могут использоваться леммы с номерами большими, чем n.

Лемма 1. *CD проходит через середину отрезка PQ и симметрично CI относительно биссектрисы угла $\angle PCQ$.*

Лемма 2. *F равноудалена от точек P, D, E, Q.* [1]

Лемма 3. *Прямая, проходящая через M параллельно CD, прямая IE и описанная окружность $\triangle ABC$ пересекаются в одной точке U.*

Лемма 4. *$PQCU$ – вписанный.*

Лемма 5. *I – ортоцентр треугольника $\triangle PUQ$, $\triangle APU \sim \triangle UQB$.*

Лемма 6 (основная теорема). *$APKU$ и $BQUL$ – вписанные четырёхугольники, описанные окружности которых касаются в точке U.*

Лемма 7. *Биссектриса угла $\angle AUB$ проходит через W, UG симметрична UA относительно UP и UG симметрична UB относительно UQ.*

Доказательство леммы 1

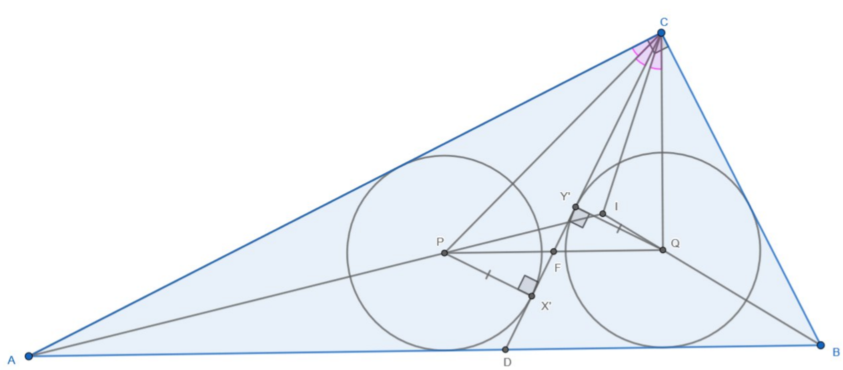


Рис. 1: К лемме 1 (1)

X' и Y' – точки касания вписанных окружностей с CD.
$F = CD \cap PQ$.

Утверждение 8. F – середина PQ.

CD – это общая внутренняя касательная к вписанным окружностям равного радиуса $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{PX'} = \text{QY' (как радиусы)} \\ \angle\text{PX'F} = \angle\text{FY'Q} = 90^\circ \\ \angle\text{PFX'} = \angle\text{Y'FQ (как вертикальные).} \end{cases} \Rightarrow \quad \triangle PX'F = \triangle QY'F \quad \Rightarrow \quad F \text{ – середина } PQ. \ \textbf{QED}$$

Утверждение 9. $\angle ICQ = \angle PCF$.

Заметим, что CP и CQ биссектрисы $\angle ACD$ и $\angle DCB \Rightarrow \angle PCQ = \dfrac{\angle ACB}{2} = 45^\circ = \angle ACI$ (т. к. CI – биссектриса $\angle ACB = 90^\circ$) $\Rightarrow \angle ACP = \angle ICQ$, а также $\angle ACP = \angle PCF$ (т. к. CP биссектриса угла $\angle ACD$) $\Rightarrow$ $\angle ICQ = \angle PCF$. **QED**

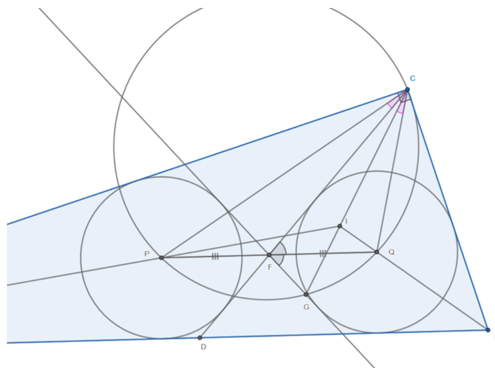


Рис. 2: К лемме 1 (2)

Из утверждений 8 и 9 следует, что CI – симедиана в $\triangle PCQ$, а CF – его медиана. **QED**

Известный факт № 1: Если отразить медиану относительно стороны, к которой она проведена, то она пересечет симедиану, проведённую к той же стороне, в точке на описанной окружности этого треугольника. (Эта точка будет являться отраженной точкой Шалтая. Она же дополняет вершины треугольника до гармонического четырехугольника).

Тогда отразим CD относительно PQ. Это будет вторая общая внутренняя касательная двух вписанных окружностей. (т. к. PQ линия центров) Назовём точку пересечения этой общей касательной с прямой CI – G. Она будет лежать на описанной окружности $\triangle PCQ$. (Известный факт №1)

Доказательство леммы 2

Доказательство этой леммы в общем случае и ещё много интересных фактов про две вписанные окружности, в том числе и доказательство того, что $CD^2 = AC \cdot CB$, приведены в статье.[1]

Я же напишу доказательство этой леммы здесь, чтобы не нарушать целостность рассуждений.

E – точка касания вписанной окружности $\triangle ABC$ с прямой AB. E' – точка пересечения прямой симметричной CD относительно PQ с AB. X'' и Y'' – точки касания вписанных окружностей $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ соответственно со стороной AB.

Заметим, что DP и DQ биссектрисы смежных углов $\Rightarrow \ \angle PDQ = 90^\circ \ \Rightarrow PF = FQ = DF$ (по лемме 1).

Известный факт № 2: В $\triangle ABC$ на стороне AB взята точка D. Общая внутренняя касательная, проведённая к вписанным окружностям $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$, отличная от CD, проходит через точку касания вписанной окружности $\triangle ABC$ со стороной AB. $\Rightarrow E = E'$

Очевидно, $X''PQY''$ – прямоугольник. Заметим, что при симметрии относительно серединного перпендикуляра к PQ : $F \to F, \ P \to Q, \ X'' \to Y''$, а так как в доказательстве известного факта №2 мы поняли, что $DX'' = EY''$, то и $D \to E \ \Rightarrow DF = FE \ \Rightarrow F$ равноудалена от точек P, D, E, Q. **QED**

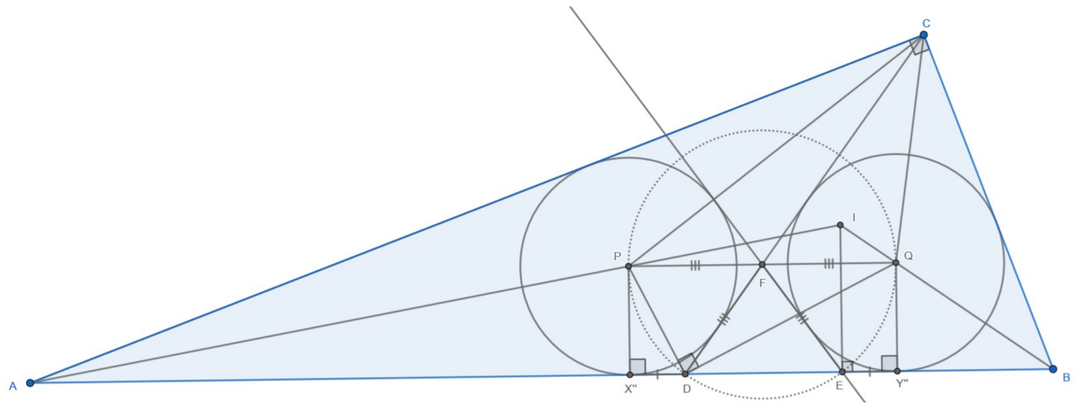


Рис. 3: К лемме 2

Доказательство леммы 3

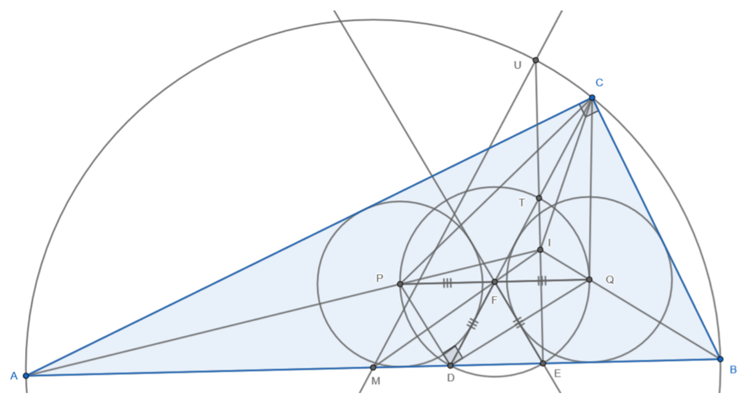


Рис. 4: К лемме 3

• Продлим IE до пересечения с CD до точки T. При симметрии относительно PQ : $IE \to IE$ (т. к. $IE \perp AB, PQ \parallel AB \ \Rightarrow IE \perp PQ$), $CD \to$ вторая общая касательная - FE. Тогда при обратной симметрии прямые CD и IE тоже пересекутся на окружности $PDEQ$. (т. к. PQ – диаметр этой окружности $\Rightarrow$ она переходит сама в себя). Значит, IE и CD пересекаются на окружности $PDEQ$ в точке T.

• Сделаем гомотетию с центром в I, переводящую $P \to A$, так как $PQ \parallel AB \Rightarrow \frac{IP}{IA} = \frac{IQ}{IB} = k \ \Rightarrow \ Q \to B$. Тогда при $H_I^k : PQ \ \to \ AB \ \Rightarrow F \ \to \ M \ \Rightarrow$ окружность $PDEQT \to$ окружность, описанную около $\triangle ABC$. (т. к. PQ и AB - диаметры соответственных окружностей). Пусть точка T при гомотетии H_I^k переходит в U. Тогда $U \in IE$ (т. к. прямая IE переходит сама в себя), $U \in$ окружности, описанной около $\triangle ABC$ (т. к. $T \in$ окружности $PDEQ$, которая переходит в окружность, описанную около $\triangle ABC$), а прямая $TF \parallel UM$ (т. к. при $H_I^k : TF \ \to \ UM) \Leftrightarrow CD \parallel UM$. **QED**

Доказательство леммы 4

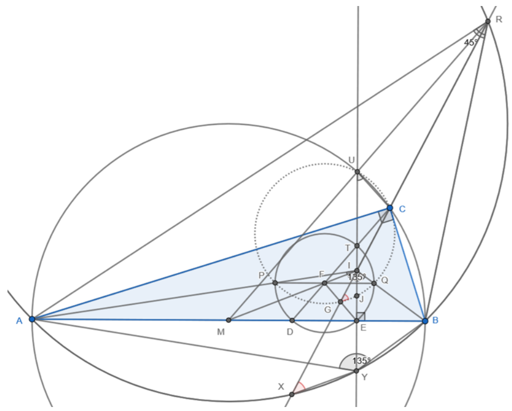


Рис. 5: К лемме 4 (1): равенство разноцветных углов не доказано.

$PQCU$ – вписанный $\Leftrightarrow$ $GJCU$ – вписанный $\Leftrightarrow$ $\angle CUI = \angle IGJ$. Пусть R – это точка, в которую перешла C при гомотетии H_I^k. Тогда при H_I^k $\triangle PCQ \ \rightarrow\ \triangle ARB \Rightarrow$ отрезок $CF \ \rightarrow$ отрезок RM, как медианы в соответсвенных треугольниках. Также описанная окружность $\triangle PCQ$ перешла в описанную окружность $\triangle ARB$, но $\angle PCQ = 45° \Rightarrow \angle ARB = 45°$.
(1) $\angle ARB = 45°$, а $ARBY$ – вписанный $\Rightarrow \angle AYB = 135°$.
(2) $\angle AIB = 90° + \dfrac{\angle ACB}{2} = 135°$
1), 2) $\Rightarrow$ окружности AIB и AYB симметричны относительно AB.
(3) $IE \perp AB$
1), 2), 3) $\Rightarrow IE = EY$ Тогда, так как при H_I^k окружность $PCQ \rightarrow$ окружность ARB, то $G \rightarrow X$, $J \rightarrow Y \Rightarrow \triangle GIJ \rightarrow \triangle XIY \Rightarrow \triangle GIJ \sim \triangle XIY \Rightarrow \angle IGJ = \angle IXY$.
Значит, $\angle CUI = \angle IGJ \Leftrightarrow \angle CUI = \angle IXY \Leftrightarrow XYCU$ **– вписанный, что мы и будем доказывать.**

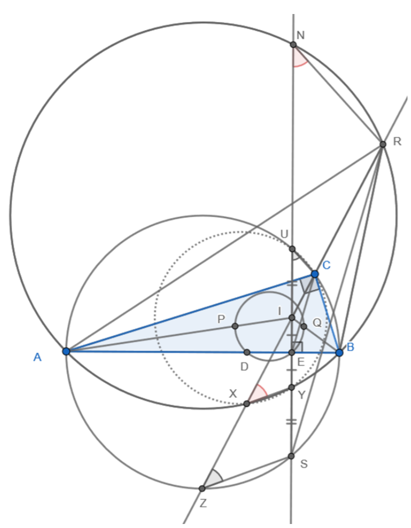


Рис. 6: К лемме 4 (2)

Так как при гомотетии H_I^k окружность $PDEQ \ \rightarrow$ окружность ABC, а $IE \ \rightarrow IE$, то $E \ \rightarrow\ S \Rightarrow$ отрезок $EC \ \rightarrow$ отрезок $RS \Rightarrow EC \parallel RS$.
По доказанному выше: $IE = EY = x, EU = ES$ (т. к. AB – диаметр окружности ABC, а $IE \perp AB$)

$\Rightarrow UI = YS = y$.
$XYCU$ – вписанный $\Leftrightarrow IY \cdot IU = IX \cdot IC \Leftrightarrow 2xy = IX \cdot IC$.
1) $IX \cdot IR = IN \cdot IY = 2x \cdot (y + UN)$ (степень точки I относительно окружности ARB)
2) $EC \| RS \Rightarrow \dfrac{IC}{IR} = \dfrac{IE}{IS} \Leftrightarrow \dfrac{IC}{IR} = \frac{x}{2x+y} \Leftrightarrow IR = \dfrac{IC \cdot (2x+y)}{x}$.
3) $EN \cdot EY = AE \cdot EB$ (степень точки E относительно окружности ARB), $EU \cdot ES = AE \cdot EB$ (степень точки E относительно окружности ACB) $\Rightarrow EN \cdot EY = EU \cdot ES \Leftrightarrow (x + y + UN) \cdot x = (x + y)^2 \Leftrightarrow x^2 + xy + x \cdot UN = x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow UN = \dfrac{y \cdot (x+y)}{x}$
1), 2) $\Rightarrow IX \cdot \dfrac{IC \cdot (2x+y)}{x} = 2x \cdot (y + UN)$, 3) $\Rightarrow IX \cdot \dfrac{IC \cdot (2x+y)}{x} = 2x \cdot (y + \dfrac{y \cdot (x+y)}{x}) \Leftrightarrow IX \cdot IC = \dfrac{2x^2y + 2xy \cdot (x+y)}{2x+y} = 2xy \Leftrightarrow PQCU$ – вписанный. **QED**

Доказательство леммы 5

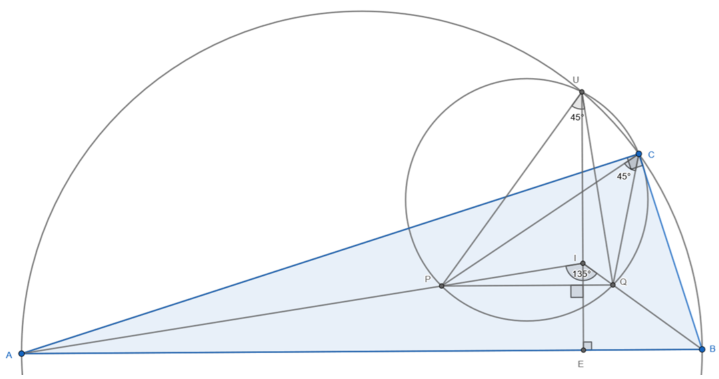


Рис. 7: К лемме 5 (1)

(1)$IE \perp PQ$ (см. Лемма 2)
(2)$\angle PIQ = 135°$ (см. Лемма 4)
(3)$\angle PCQ = 45° = \angle PUQ$ (т. к. PQCU – вписанный + Лемма 1)
Из 2) и 3) $\Rightarrow \angle PIQ + \angle PUQ = 180°$.
Также из 1) следует, что I – ортоцентр $\triangle PUQ$.
Здесь: $X = BQ \cap PU$, $Y = BQ \cap PU$.
Так как I – ортоцентр $\triangle PUQ$, то $BQ \perp PU \ \Rightarrow \angle UXQ = 90°, \angle XUQ = 45°$ (см. выше) $\ \Rightarrow \angle XQU = 45° \Rightarrow \angle UQB = 135°$, аналогично $\angle APU = 135°$.

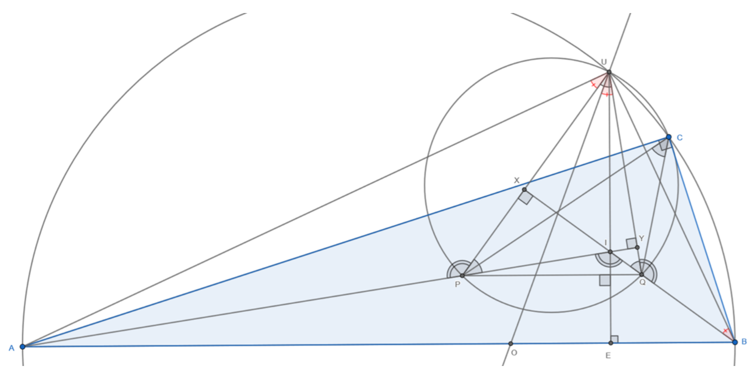


Рис. 8: К лемме 5 (2): две серые душки - 135°, одна серая душка - 45°

Проведем биссектрису UO в треугольнике ABU. Тогда $\angle AUO = \angle OUB = \dfrac{\angle AUB}{2} = 45°$ (т. к. AB - диаметр).
Как смежный $\angle UQB = 135°$ (1), а из суммы углов треугольника QBU: $\angle QBU + \angle QUB = 45°$, $OUB = 45° \ \Rightarrow \angle QBU = \angle OUQ$.
(*)***Заметим, что из равенства углов $\angle QBU = \angle OUQ$ следует касание описанной окружности $\triangle QUB$ и прямой UO (по теореме про угол между касательной и хордой). Аналогично описанная окружность $\triangle PUA$ касается UO. Значит окружности, описанные около треугольнкиов $\triangle QUB$ и $\triangle PUA$ касаются в точке U.***
$\angle PUQ = \angle AUO = 45° \Rightarrow \ \angle AUP = \angle OUQ = \angle QBU$ (2)
Из (1) и (2) видно, что $\triangle APU \sim \triangle UQB$. **QED**

Доказательство леммы 6

Будем доказывать, что $BQUL$ – вписанный. Для четырёхугольника $AKPU$ рассуждения аналогичны.

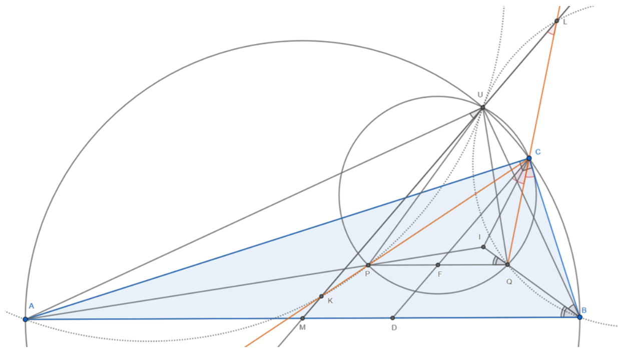


Рис. 9: К лемме 6: равенство разноцветных углов не доказано

$BQUL$ – вписанный $\Leftrightarrow \angle ULC = \angle UBQ$. Введём $\angle ABC = 2\beta, \angle DCB = 2\gamma$.
$MU \parallel CD$ (лемма 3) $\Rightarrow \angle ULQ = \angle DCQ = \angle QCB = \gamma$ (т. к. CQ – биссектриса $\angle DCB$)
(1) $\triangle APU \sim \triangle UQB$ (лемма 5) $\Rightarrow$ $\angle UBQ = \angle AUP = \angle AUC - \angle PUC$.
$AB \parallel PQ$ (см. Лемма 2) $\angle ABI = \angle PQI = \beta, \angle IQC = \angle QCB + \angle QBC = \gamma + \beta \Rightarrow \angle PQC = \gamma + 2\beta$
(2) $PQCU$ – вписанный (лемма 4) $\Rightarrow \angle PUC = 180° - \angle PQC = 180° - \gamma - 2\beta$.
(3) $AUCB$ – вписанный (лемма 3) $\Rightarrow \angle AUC = 180° - \angle ABC = 180° - 2\beta$.
Из (1), (2), (3) следует, что $\angle UBQ = 180° - 2\beta - (180° - \gamma - 2\beta) = \gamma = \angle ULQ \Rightarrow BQUL$– вписанный. Тогда из замечания (*) в лемме 5 следует, что окружности $APKU$ и $BQUL$ касаются в точке U. **QED**

Доказательство леммы 7

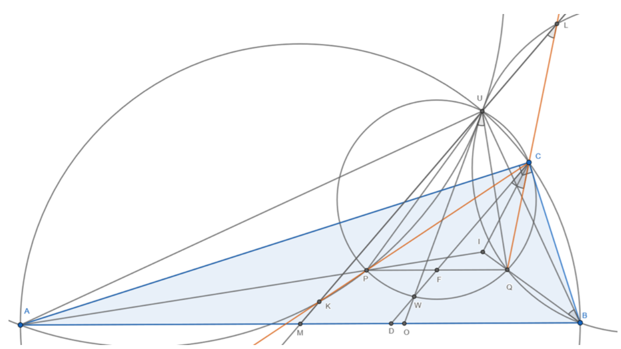


Рис. 10: К лемме 7 (1)

$W = CD \cap (PQCU)$.
Из замечания (*) в лемме 5 мы знаем, что окружности $APKU$ и $BQUL$ касаются биссектрисы $\angle AUB - UO$ $\Rightarrow \angle OUQ = \angle QBU, \angle QBU = \angle ULQ$ (т. к. $BQUL$ – вписанный по лемме 6), $\angle ULQ = \angle WCQ$ (т. к. $MU \parallel CD$ по лемме 3) $\Rightarrow \angle OUQ = \angle WCQ \Rightarrow UO$ проходит через W (т. к. $WQCU$ - вписанный). **QED**

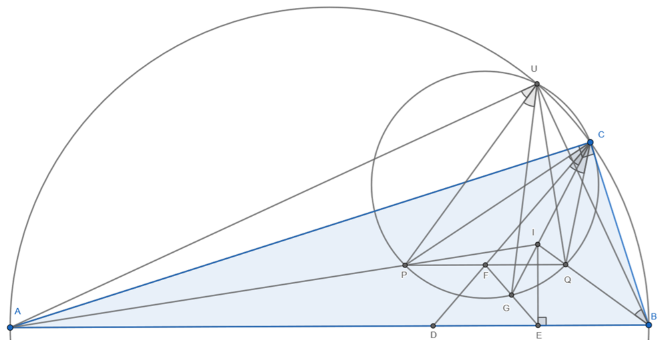


Рис. 11: К лемме 7 (2)

$\angle DCB = 2\gamma$.

В лемме 6 мы доказали, что $\angle UBQ = \gamma = \angle FCQ$, $\angle FCQ = \angle PCG$ (т. к. CF и CG симметричны относительно биссектрисы $\angle PCQ$ по лемме 1), $\angle PCG = \angle PUG$ ($PQCU$ – вписанный по лемме 4) $\Rightarrow$

(1) $\angle UBQ = \angle PUG$

(2) Из леммы 5 $\Rightarrow \triangle APU \sim \triangle UQB \;\Rightarrow\; \angle UBQ = \angle AUP$

Из 1), 2) следует, что $\angle AUP = \angle PUG \Rightarrow UG$ симметрична UA относительно UP. Аналогично доказывается, что UG симметрична UB относительно UQ. **QED**

Приложения:

Известный факт $\mathcal{N}^{\underline{o}}$ 1

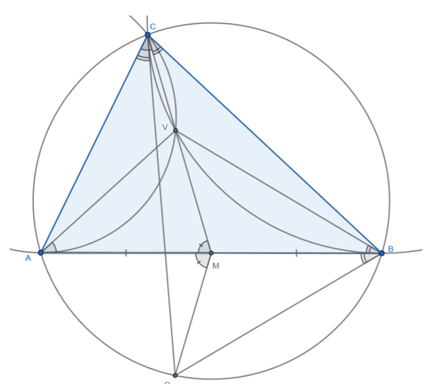


Рис. 12: К известному факту 1

Точка Шалтая (V) – пересечение двух окружностей, проходящих через вершину C треугольника ABC и касающихся прямой AB в точках A и B.

M – точка пересечения прямой CV и AB.

Т.к. VC - радикальная ось окружностей AVC и BCV: $AM^2 = MV \cdot MC = MB^2 \;\Rightarrow\; AM = MB \;\Rightarrow\; CM$ – медиана в $\triangle ABC$.

$\angle ACV = \angle VAB$ (по теореме про угол между касательной AB и хордой AV), аналогично $\angle VCB = \angle VBA \Rightarrow$ $\angle VBA + \angle VAB = \angle ACB$. Тогда $\boxed{\angle ACB + \angle AVB = 180^\circ}$.

Отразим V относительно AB и получим точку G. Тогда $\triangle AVB = \triangle AGB \Rightarrow \angle AVB = \angle AGB \Rightarrow \; \angle ACB + \angle AGB = 180^\circ \;\Rightarrow\; ACBG$ – вписанный $\Rightarrow \angle ACG = \angle ABG, \angle ABG = \angle ABV$ (т. к. $\triangle AVB = \triangle AGB$) $\Rightarrow \angle ACG = \angle ABV = \angle VCB \Rightarrow CG$ – симедиана (т. к. AV – медиана) $\Rightarrow$ симедиана и медиана, отраженная относительно AB, пересекаются на описанной окружности $\triangle ABC$. **QED**

Известный факт $N^o 2$

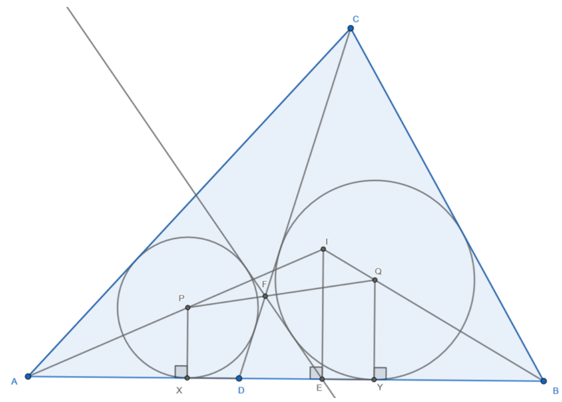


Рис. 13: К известному факту 2

E – точка касания вписанной окружности $\triangle ABC$ с прямой AB.
E' – точка пересечения прямой симметричной CD относительно PQ с AB.
$F = CD \cap PQ$
Обозначим $AC = b,\ CB = a,\ CD = d,\ AD = x,\ DB = y$
Вписанные окружности $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ являются вневписанными окружностями $\triangle DFE' \Rightarrow XE' = DY = \dfrac{P_{\triangle DFE'}}{2} \Rightarrow DX = \dfrac{P_{\triangle ADC} - b}{2} = \dfrac{x+d-b}{2} = E'Y \quad (1)$
$EY = EB - YB = \dfrac{P_{\triangle ABC} - b}{2} - \dfrac{P_{\triangle DCB} - d}{2} = \dfrac{x+y+a-b}{2} - \dfrac{a+y-d}{2} = \dfrac{x+d-b}{2} \quad (2)$
Из (1) и (2) $\Rightarrow\ E = E'$. **QED**

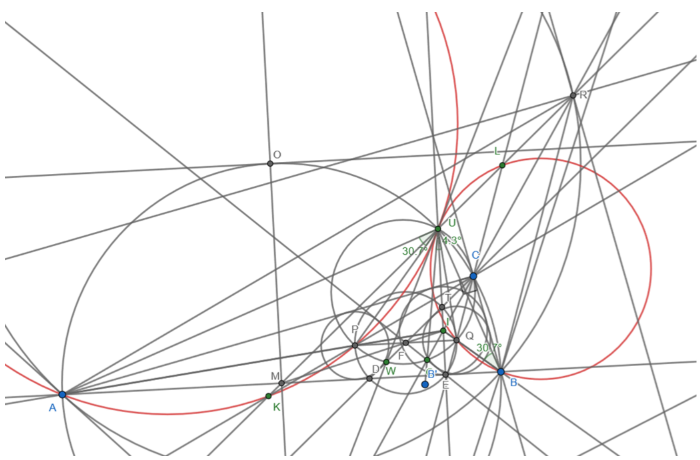


Рис. 14: Всё вместе: красота

Автор выражает благодарность А.Б. Скопенкову за внимание к работе и ценные указания, а также Ю.С. Симаковой за помощь в освоении LaTeX.

Список литературы

[1] А. Блинков, Ю. Блинков Две окружности в треугольнике, три окружности в треугольнике // КВАНТ 2012 №2