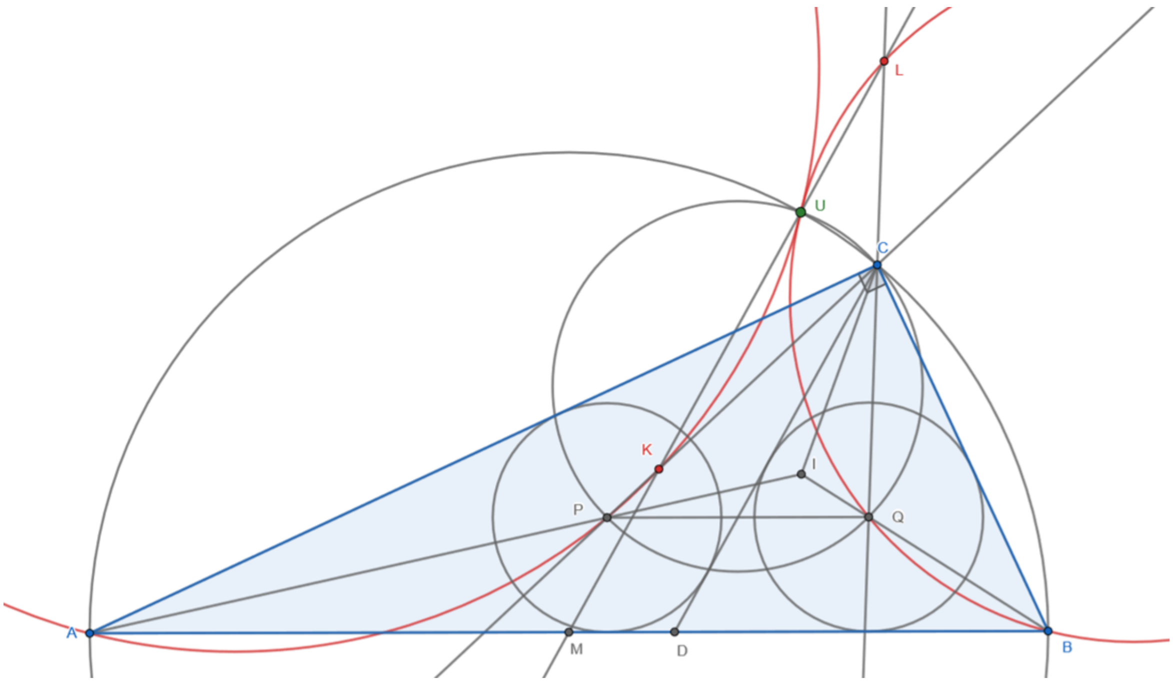
Две равные вписанные окружности в прямоугольном треугольнике

Комаров Сергей Сергеевич

СУНЦ МГУ

Теорема:

Точка D выбрана на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC так, что окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, имеют равные радиусы. Назовём центры этих окружностей P и Q соответственно, а середину AB обозначим через M. Определим точки K и L как пересечения прямой, проходящей через M параллельно CD, с прямыми PC и QC соответственно. Обозначим точку пересечения, отличную от C, описанных окружностей треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle PCQ$ через U. Тогда описанные окружности треугольников $\triangle AKP$ и $\triangle BQL$ касаются в точке U.



Обозначение основных точек:

I - центр вписанной окржности тругольника $\triangle ABC$.
E – точка касания вписанной окружности $\triangle ABC$ с прямой AB.
F – середина PQ.
G – точка пересечения CI и прямой, симметричной CD относительно PQ.
T – точка пересечения прямой IE, прямой CD и окружности $PDEQ$.
U' – точка пересечения прямой IE и описанной окружности треугольника $\triangle ABC$.
R – точка, в которую перешла C при гомотетии $H_I^{\frac{IP}{IA}}$.
Окружность, проходящая через точки $A_1, A_2 \ldots, A_n$ обозначим $(A_1A_2 \ldots A_n)$.
$J := IE \cap (PQC)$.
$X := CI \cap (ARB)$.
$Y := IE \cap (ARB)$.
$S := IE \cap (ABC)$.
$Z := CI \cap (ABC)$.
$N := IE \cap (ARB)$.
$W := CD \cap (PQCU)$.

Наметим план доказательства, разбив задачу на отдельные факты, которые сами по себе довольно интересны. В доказательстве леммы с номером n не используются леммы с но-

мерами большими, чем n.

Лемма 1.

Лемма 1.1. *Прямая CD проходит через середину отрезка PQ.*

Лемма 1.2. *CD симметрична CI относительно биссектрисы угла $\angle PCQ$.*

Лемма 1.3. *Прямая, симметричная CD относительно PQ, персекает CI на описанной окружности треугольника $\triangle PCQ$.*

Лемма 2. *Точка F равноудалена от точек P, D, E, Q.* [1]

Лемма 3. *Прямая, проходящая через M параллельно CD, прямая IE и описанная окружность треугольника $\triangle ABC$ пересекаются в одной точке U'.*

Лемма 4. *Четырёхугольник $PQCU'$ – вписанный. $\Rightarrow U' = U$.*

Лемма 5. *Точка I – ортоцентр треугольника $\triangle PUQ$; $\triangle APU \sim \triangle UQB$.*

Основная теорема. *$APKU$ и $BQUL$ – вписанные четырёхугольники, описанные окружности которых касаются в точке U.*

Доказательство леммы 1

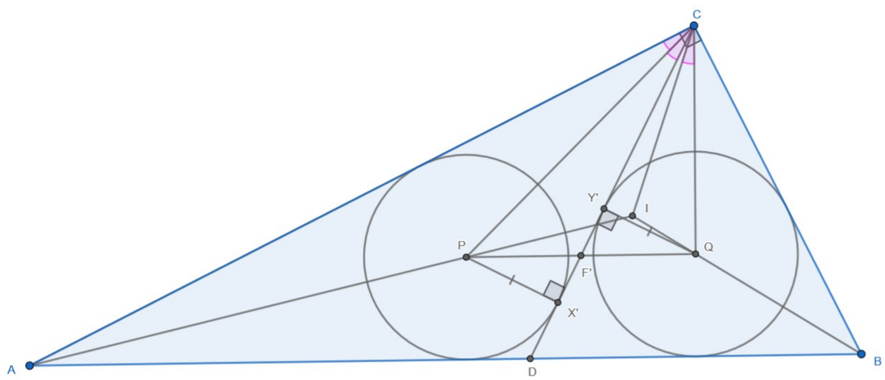


Рис. 1: К утверждениям 1.2 и 1.3

Доказательство леммы 1.1.

Определим X' и Y' как точки касания вписанных окружностей с CD.

Определим $F' = CD \cap PQ$.

Докажем, что F' - это середина PQ.

CD – это общая внутренняя касательная к вписанным окружностям равного радиуса $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{PX'} = \text{QY' (как радиусы)} \\ \angle\text{PX'F'} = \angle\text{F'Y'Q} = 90^\circ \\ \angle\text{PF'X'} = \angle\text{Y'F'Q (как вертикальные).} \end{cases} \Rightarrow \quad \triangle PX'F' = \triangle QY'F' \quad \Rightarrow \quad F' \text{ – середина } PQ. \ \textbf{QED}$$

Доказательство леммы 1.2.

Для этого докажем, что $\angle ICQ = \angle PCF$.

Заметим, что CP и CQ биссектрисы $\angle ACD$ и $\angle DCB \Rightarrow \angle PCQ = \dfrac{\angle ACB}{2} = 45^\circ = \angle ACI$ (т. к. CI – биссектриса $\angle ACB = 90^\circ$) $\Rightarrow \angle ACP = \angle ICQ$, а также $\angle ACP = \angle PCF$ (т. к. CP биссектриса угла $\angle ACD$) $\Rightarrow \angle ICQ = \angle PCF$. **QED**

Докозательство леммы 1.3.

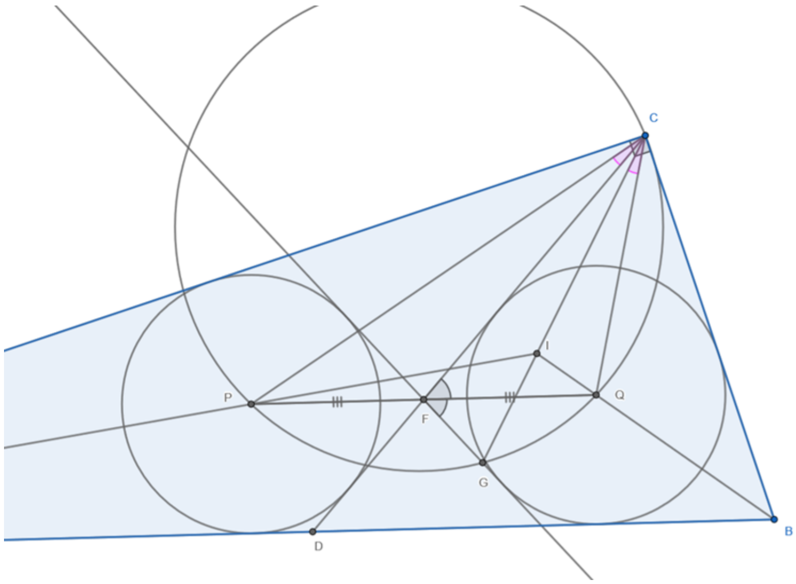


Рис. 2: К лемме 1.3

Из лемм 1.1 и 1.2 следует, что CI – симедиана в $\triangle PCQ$, а CF – его медиана.
Отразим CD относительно PQ. Это будет вторая общая внутренняя касательная двух вписанных окружностей. (т. к. PQ линия центров) Обозначим точку пересечения этой общей касательной с прямой CI – G. Тогда, применив факт №1 для треугольника $\triangle PCQ$, получим, что G будет лежать на описанной окружности треугольника $\triangle PCQ$. **QED**

Факт №1. *Если отразить медиану относительно стороны, к которой она проведена, то она пересечет симедиану, проведённую к той же стороне, в точке на описанной окружности этого треугольника. (Эта точка будет являться отраженной точкой Шалтая. Она же дополняет вершины треугольника до гармонического четырехугольника).*
Доказательство факта №1

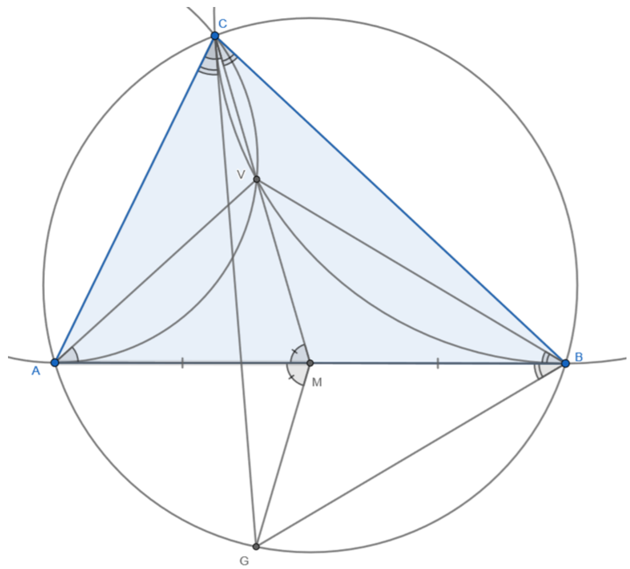


Рис. 3: К известному факту 1

В доказательстве факта №1 используются только те точки, которые определены в доказательстве или формулировке факта №1. (Эти определения не относятся к основным леммам)
$\triangle ABC$ - произвольный треугольник.
Определим точку Шалтая V как пересечение двух окружностей, проходящих через вершину C треугольника ABC и касающихся прямой AB в точках A и B.
Определим M как точкау пересечения прямых CV и AB.
Т.к. VC - радикальная ось окружностей AVC и BCV: $AM^2 = MV \cdot MC = MB^2 \Rightarrow AM = MB \Rightarrow CM$ – медиана в $\triangle ABC$.
$\angle ACV = \angle VAB$ (по теореме про угол между касательной AB и хордой AV), аналогично $\angle VCB = \angle VBA \Rightarrow \angle VBA + \angle VAB = \angle ACB$. Тогда $\boxed{\angle ACB + \angle AVB = 180^\circ}$.
Отразим V относительно AB и получим точку G. Тогда $\triangle AVB = \triangle AGB \Rightarrow \angle AVB = \angle AGB \Rightarrow \angle ACB + \angle AGB = 180^\circ \Rightarrow ACBG$ – вписанный $\Rightarrow \angle ACG = \angle ABG, \angle ABG = \angle ABV$ (т. к. $\triangle AVB = \triangle AGB$) $\Rightarrow \angle ACG = \angle ABV = \angle VCB \Rightarrow CG$ – симедиана (т. к. AV – медиана) $\Rightarrow$ симедиана и медиана, отраженная относительно AB, пересекаются на описанной окружности $\triangle ABC$. **QED**

Доказательство леммы 2

Доказательство этой леммы в общем случае и ещё много интересных фактов про две вписанные окружности, в том числе и доказательство того, что $CD^2 = AC \cdot CB$, приведены в статье.[1]
Я же напишу доказательство этой леммы здесь, чтобы не нарушать целостность рассуждений.

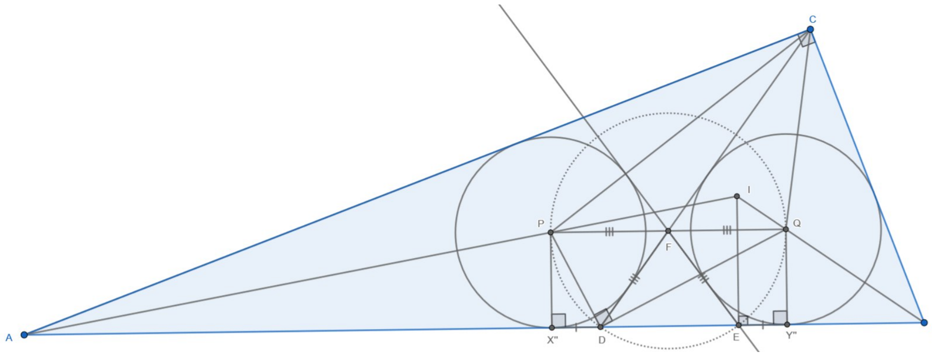


Рис. 4: К лемме 2

Определим E' как точку пересечения прямой симметричной CD относительно PQ с AB.
Определим X'' и Y'' как точки касания вписанных окружностей $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ соответственно со стороной AB.
Заметим, что DP и DQ биссектрисы смежных углов $\Rightarrow\ \angle PDQ = 90^\circ\ \Rightarrow PF = FQ = DF$ (по лемме 1). Применив факт №2 для $\triangle ABC$, получим, что $E = E'$. Очевидно, $X''PQY''$ – прямоугольник. Заметим, что при симметрии относительно серединного перпендикуляра к $PQ : F \to F,\ P \to Q,\ X'' \to Y''$, а также из факта №2 мы знаем, что $DX'' = EY''$ значит и $D \to E\ \Rightarrow DF = FE\ \Rightarrow F$ равноудалена от точек P, D, E, Q. **QED**

Факт №2. *В $\triangle ABC$ на стороне AB взята точка D. Общая внутренняя касательная, проведённая к вписанным окружностям треугольников $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$, отличная от CD, проходит через точку касания вписанной окружности $\triangle ABC$ со стороной AB.*

Доказательство факта №2

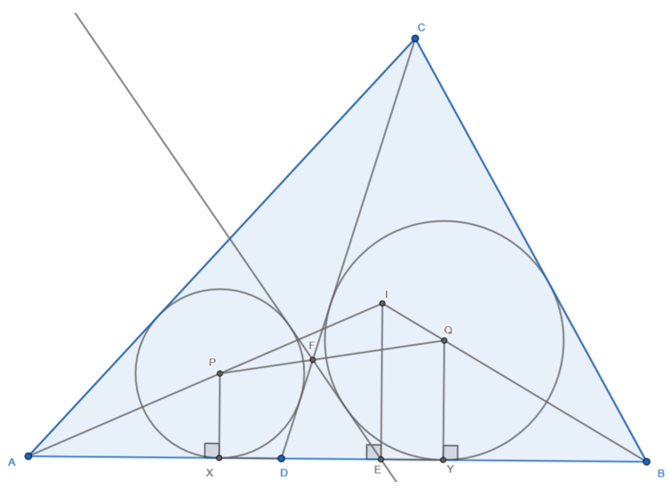


Рис. 5: К известному факту 2

В доказательстве факта №2 используются только те точки, которые определены в доказательстве или формулировке факта №2. (Эти определения не относятся к основным леммам) Определим P и Q как центры вписанных окружностей треугольников $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$
Определим E как точку касания вписанной окружности $\triangle ABC$ с прямой AB.
Определим E' как точку пересечения прямой симметричной CD относительно PQ с AB.

Определим $F = CD \cap PQ$
Определим X и Y как точки касания вписанных окружностей треугольников $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ соответственно со стороной AB.
Обозначим $AC = b,\ CB = a,\ CD = d,\ AD = x,\ DB = y$.
Вписанные окружности $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ являются вневписанными окружностями $\triangle DFE' \Rightarrow XE' = DY = \dfrac{P_{\triangle DFE'}}{2} \Rightarrow DX = \dfrac{P_{\triangle ADC} - b}{2} = \dfrac{x+d-b}{2} = E'Y \quad (1)$
$EY = EB - YB = \dfrac{P_{\triangle ABC} - b}{2} - \dfrac{P_{\triangle DCB} - d}{2} = \dfrac{x+y+a-b}{2} - \dfrac{a+y-d}{2} = \dfrac{x+d-b}{2} \quad (2)$
Из (1) и (2) $\Rightarrow\ E = E'$. **QED**

Доказательство леммы 3

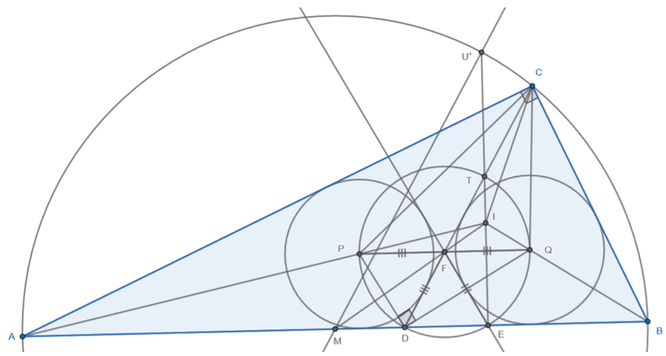


Рис. 6: К лемме 3

• Продлим IE до пересечения с CD до точки T. При симметрии относительно $PQ : IE \to IE$ (т. к. $IE \perp AB, PQ \parallel AB\ \Rightarrow IE \perp PQ$), $CD \to$ вторая общая касательная - FE. Тогда при обратной симметрии прямые CD и IE тоже пересекутся на окружности $PDEQ$. (т. к. PQ – диаметр этой окружности $\Rightarrow$ она переходит сама в себя). Значит, IE и CD пересекаются на окружности $PDEQ$ в точке T.

• Сделаем гомотетию с центром в I, переводящую $P \to A$, так как $PQ \parallel AB \Rightarrow \frac{IP}{IA} = \frac{IQ}{IB} = k\ \Rightarrow\ Q \to B$. Тогда при $H_I^k : PQ\ \to\ AB\ \Rightarrow F\ \to\ M\ \Rightarrow$ окружность $PDEQT \to$ окружность, описанную около $\triangle ABC$. (т. к. PQ и AB - диаметры соответственных окружностей). Пусть точка T при гомотетии H_I^k переходит в U''. Тогда $U'' \in IE$ (т. к. прямая IE переходит сама в себя), $U'' \in$ окружности, описанной около $\triangle ABC$ (т. к. $T \in$ окружности $PDEQ$, которая переходит в окружность, описанную около $\triangle ABC$) $\Rightarrow U'' = U'$. Прямая $TF \parallel U'M$ (т. к. при $H_I^k : TF\ \to\ U'M$) $\Leftrightarrow CD \parallel U'M$. **QED**

Доказательство леммы 4

Из леммы 1.3 $\Rightarrow G$ лежит на описанной окружности треугольника $\triangle PCQ$. Тогда $PQCU'$ – вписанный $\Leftrightarrow GJCU'$ – вписанный $\Leftrightarrow \angle CU'I = \angle IGJ$. Пусть R – это точка, в которую перешла C при гомотетии H_I^k(гомотетия из леммы 3). Тогда при $H_I^k\ \triangle PCQ\ \ \to\ \ \triangle ARB \Rightarrow$ отрезок $CF\ \ \to$ отрезок RM, как медианы в соответсвенных треугольниках. Также описанная окружность $\triangle PCQ$ перешла в описанную окружность $\triangle ARB$, но $\angle PCQ = 45° \Rightarrow \angle ARB = 45°$.
(1) $\angle ARB = 45°$, а $ARBY$ – вписанный $\Rightarrow \angle AYB = 135°$.
(2) $\angle AIB = 90° + \dfrac{\angle ACB}{2} = 135°$
1), 2) $\Rightarrow$ окружности AIB и AYB симметричны относительно AB.

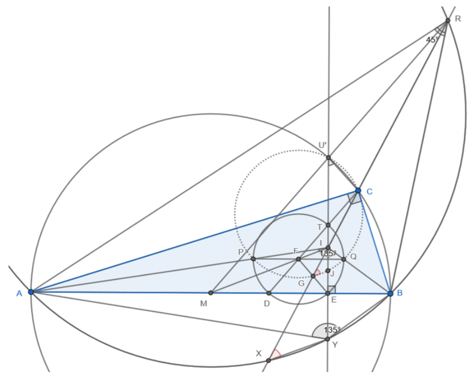


Рис. 7: К лемме 4 (1): равенство разноцветных углов не доказано.

(3) $IE \perp AB$
1), 2), 3) $\Rightarrow IE = EY$ Тогда, так как при H_I^k окружность $PCQ \rightarrow$ окружность ARB, то $G \rightarrow X$, $J \rightarrow Y \Rightarrow \triangle GIJ \rightarrow \triangle XIY \Rightarrow \triangle GIJ \sim \triangle XIY \Rightarrow \angle IGJ = \angle IXY$.
Значит, $\angle CU'I = \angle IGJ \Leftrightarrow \angle CU'I = \angle IXY \Leftrightarrow XYCU'$ – вписанный, что мы и будем доказывать.

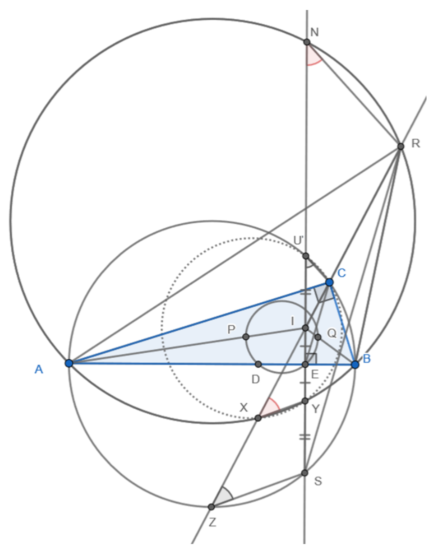


Рис. 8: К лемме 4 (2)

Так как при гомотетии H_I^k окружность $PDEQ \to$ окружность ABC, а $IE \to IE$, то $E \to S \Rightarrow$ отрезок $EC \to$ отрезок $RS \Rightarrow EC \parallel RS$.
По доказанному выше: $IE = EY = x, EU' = ES$ (т. к. AB – диаметр окружности ABC, а $IE \perp AB$) $\Rightarrow U'I = YS = y$.
$XYCU'$ – вписанный $\Leftrightarrow IY \cdot IU' = IX \cdot IC \Leftrightarrow 2xy = IX \cdot IC$.
1) $IX \cdot IR = IN \cdot IY = 2x \cdot (y + U'N)$ (степень точки I относительно окружности ARB)
2) $EC \| RS \Rightarrow \dfrac{IC}{IR} = \dfrac{IE}{IS} \Leftrightarrow \dfrac{IC}{IR} = \frac{x}{2x+y} \Leftrightarrow IR = \dfrac{IC \cdot (2x+y)}{x}$.
3) $EN \cdot EY = AE \cdot EB$ (степень точки E относительно окружности ARB), $EU' \cdot ES = AE \cdot EB$ (степень точки E относительно окружности ACB) $\Rightarrow EN \cdot EY = EU' \cdot ES \Leftrightarrow (x + y + U'N) \cdot x = (x+y)^2 \Leftrightarrow x^2 + xy + x \cdot U'N = x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow U'N = \dfrac{y \cdot (x+y)}{x}$
1), 2) $\Rightarrow IX \cdot \dfrac{IC \cdot (2x+y)}{x} = 2x \cdot (y + U'N)$, 3) $\Rightarrow IX \cdot \dfrac{IC \cdot (2x+y)}{x} = 2x \cdot (y + \dfrac{y \cdot (x+y)}{x}) \Leftrightarrow IX \cdot IC = \dfrac{2x^2 y + 2xy \cdot (x+y)}{2x+y} = 2xy \Leftrightarrow PQCU'$ – вписанный. $\Rightarrow U' = U$. **QED**

Доказательство леммы 5

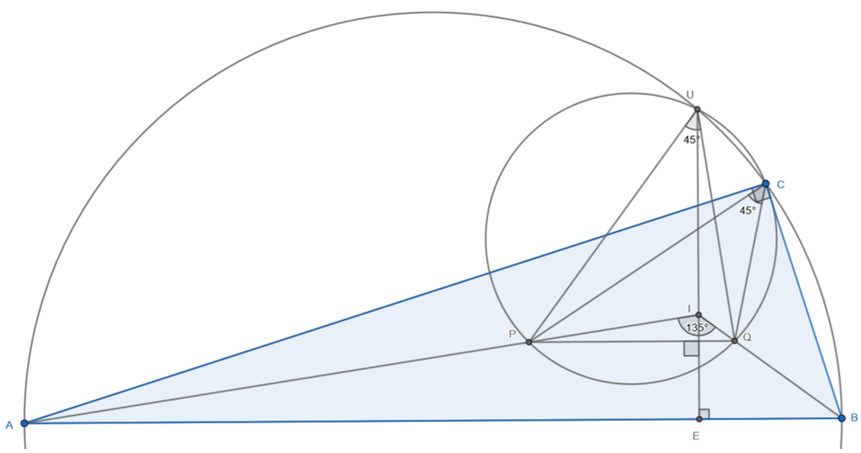


Рис. 9: К лемме 5 (1)

1)$IE \perp PQ$ (см. Лемма 2)
2)$\angle PIQ = 135°$ (см. Лемма 4)
3)$\angle PCQ = 45° = \angle PUQ$ (т. к. PQCU – вписанный + Лемма 1)
Из 2) и 3) $\Rightarrow \angle PIQ + \angle PUQ = 180°$.
Также из 1) следует, что I – ортоцентр $\triangle PUQ$.
Здесь: $X = BQ \cap PU$, $Y = BQ \cap PU$.
Так как I – ортоцентр $\triangle PUQ$, то $BQ \perp PU \Rightarrow \angle UXQ = 90°, \angle XUQ = 45°$ (см. выше) $\Rightarrow \angle XQU = 45° \Rightarrow \angle UQB = 135°$, аналогично $\angle APU = 135°$.

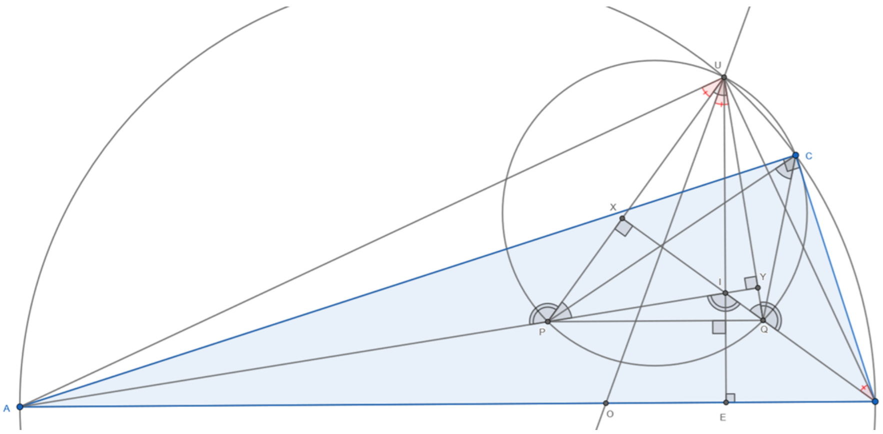


Рис. 10: К лемме 5 (2): две серые душки - 135°, одна серая душка - 45°

Проведем биссектрису UO в треугольнике ABU. Тогда $\angle AUO = \angle OUB = \dfrac{\angle AUB}{2} = 45°$ (т. к. AB - диаметр). Как смежный $\angle UQB = 135°$ (1), а из суммы углов треугольника QBU: $\angle QBU + \angle QUB = 45°$, $OUB = 45° \Rightarrow \angle QBU = \angle OUQ$.
(*)***Заметим, что из равенства углов $\angle QBU = \angle OUQ$ следует касание описанной окружности $\triangle QUB$ и прямой UO (по теореме про угол между касательной и хордой). Аналогично описанная окружность $\triangle PUA$ касается UO. Значит окружности, описанные около треугольнкиов $\triangle QUB$ и $\triangle PUA$ касаются в точке U.***
$\angle PUQ = \angle AUO = 45° \Rightarrow \angle AUP = \angle OUQ = \angle QBU$ (2)
Из (1) и (2) видно, что $\triangle APU \sim \triangle UQB$. **QED**

Теперь мы готовы доказать теорему полностью

Будем доказывать, что $BQUL$ – вписанный. Для четырёхугольника $AKPU$ рассуждения аналогичны.

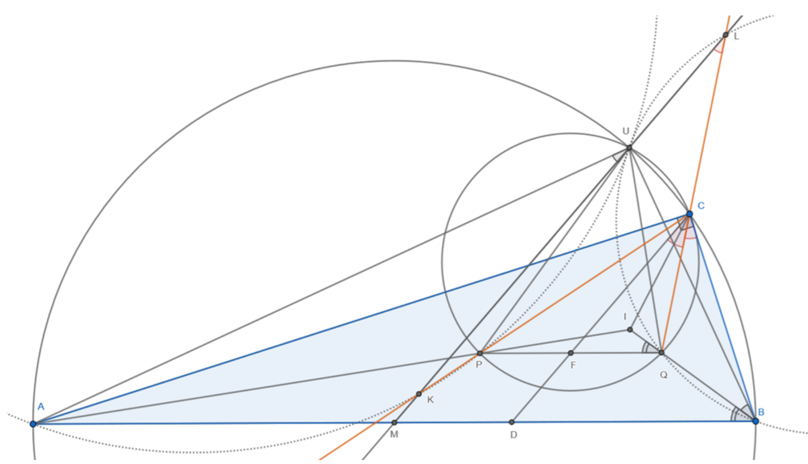


Рис. 11: Равенство разноцветных углов не доказано

$BQUL$ – вписанный $\Leftrightarrow \angle ULC = \angle UBQ$. Введём $\angle ABC = 2\beta, \angle DCB = 2\gamma$.
$MU \parallel CD$ (лемма 3) $\Rightarrow \angle ULQ = \angle DCQ = \angle QCB = \gamma$ (т. к. CQ – биссектриса $\angle DCB$)

1) $\triangle APU \sim \triangle UQB$ (лемма 5) $\Rightarrow$ $\angle UBQ = \angle AUP = \angle AUC - \angle PUC$.
$AB \parallel PQ$ (см. Лемма 2) $\angle ABI = \angle PQI = \beta, \angle IQC = \angle QCB + \angle QBC = \gamma + \beta \Rightarrow \angle PQC = \gamma + 2\beta$
2) $PQCU$ – вписанный (лемма 4) $\Rightarrow \angle PUC = 180° - \angle PQC = 180° - \gamma - 2\beta$.
3) $AUCB$ – вписанный (лемма 3) $\Rightarrow \angle AUC = 180° - \angle ABC = 180° - 2\beta$.
Из 1), 2), 3) следует, что $\angle UBQ = 180° - 2\beta - (180° - \gamma - 2\beta) = \gamma = \angle ULQ \Rightarrow BQUL$– вписанный. Тогда из замечания (*) в лемме 5 следует, что окружности $APKU$ и $BQUL$ касаются в точке U. **QED**

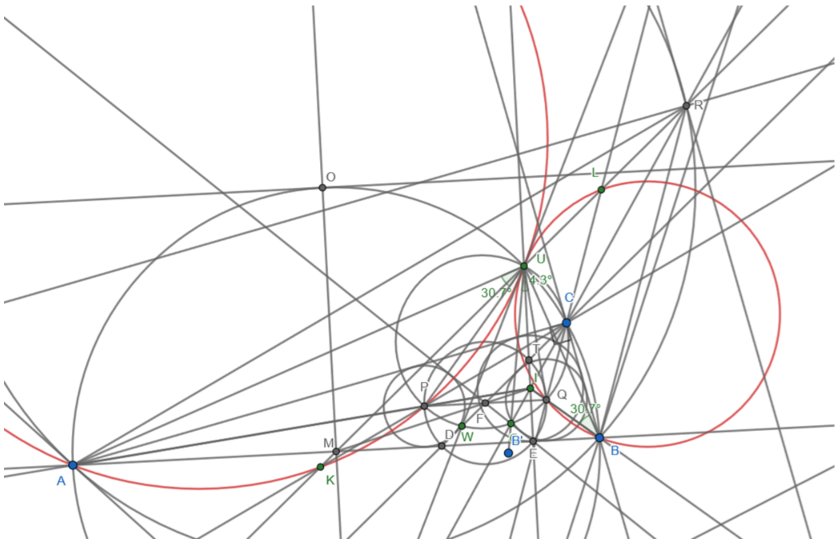


Рис. 12: Всё вместе: красота

Автор выражает благодарность А.Б. Скопенкову за внимание к работе и ценные указания, а также Ю.С. Симаковой за помощь в освоении LaTeX.

Список литературы

[1] А. Блинков, Ю. Блинков Две окружности в треугольнике, три окружности в треугольнике // КВАНТ 2012 №2