

«Национальный исследовательский университет

«Высшая школа экономики»

Лицей

Обобщение теоремы Помпею

Кутищева Анна Андреевна

Москва 2022

Содержание

1 Цели и задачи исследования	3
2 Предисловие	4
2.1 Необходимый случай теоремы	4
2.2 Доказательство случая теоремы	4
3 Тригонометрия	5
4 Доказательство	5
4.1 Правильный пятиугольник и сумма первых степеней	6
4.2 Правильный пятиугольник и сумма третьих степеней	6
4.3 Правильный семиугольник и сумма третьих степеней	7
4.4 Правильный семиугольник и сумма пятых степеней	8
4.5 Общая формула	9
5 Вывод	10
Список литературы	11

1 Цели и задачи исследования

В 1936 году румынский математик Дмитрие Помпею, внесший большой вклад в изучение математического анализа и теории чисел, доказал следующую теорему:

Теорема 1 (Теорема Помпею) *Для любой точки P в плоскости равностороннего треугольника ABC из отрезков PA , PB и PC можно составить треугольник, причем он вырожденный тогда и только тогда, когда P лежит на описанной окружности треугольника ABC [1]*

Теорема 2 (Обобщение теоремы Помпею) *Пусть $A_1A_2\dots A_n$ - правильный нечетноугольник, M - произвольная точка на дуге A_1A_n окружности, описанной около многоугольника. Тогда знакопеременная сумма*

$$MA_1^k - MA_2^k + MA_3^k - \dots - MA_{n-1}^k + MA_n^k = 0,$$

где k принимает все нечетные значения от $[1; n - 2]$.

Цель работы: доказать тождество для знакопеременной суммы расстояний в нечетных степенях от произвольной точки на дуге окружности, описанной около правильного нечетноугольника до вершин многоугольника. [3]

Задачи исследования:

1. Применить способ [2] доказательства утверждения «Сумма расстояний в четных степенях (от 2 до $n - 2$, где n - количество сторон четноугольника) от произвольной точки окружности, до вершин четноугольника постоянна» к правильному нечетноугольнику.
2. Применить теорему синусов для доказательства тождеств
3. Применить тригонометрические формулы для вычисления знакопеременной суммы синусов в высоких степенях

Материалы исследования:

1. Доказательство тождества для правильного четноугольника и суммы расстояний в четных степенях
2. Тригонометрические формулы для преобразования значений углов
3. Применить тригонометрические формулы для вычисления знакопеременной суммы синусов в высоких степенях.

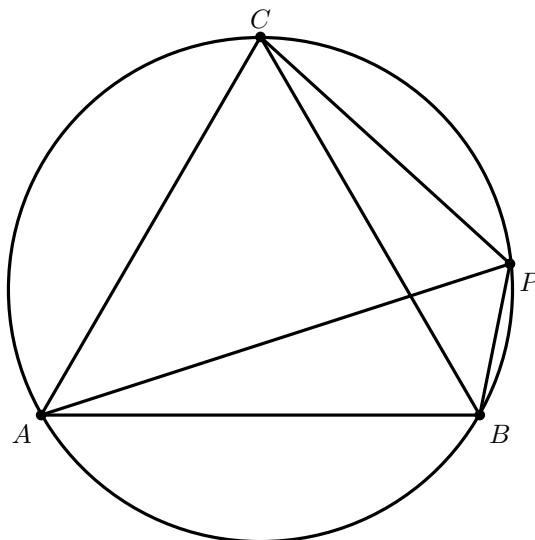
Методы исследования:

1. Метод тригонометрических преобразований

2 Предисловие

2.1 Необходимый случай теоремы

Для теоремы Помпею мы лишь докажем случай, когда выполняется равенство $AP = BP + CP$, где BC - дуга окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC , на которой отмечена точка P .



2.2 Доказательство случая теоремы

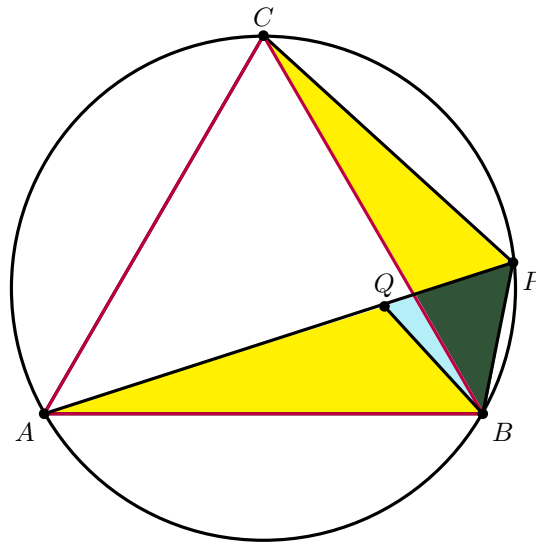
Сделаем дополнительное построение: $CP = AQ$. Рассмотрим треугольники CPB и AQB :

1. $AB = BC$ (по условию)
2. $AQ = CP$ (по построению)
3. $\angle QAB = \angle PCB$ (вписанные, опираются на дугу PB)

Значит, треугольники CPB и AQB равны

4. Треугольники PBQ и ABC равны (по двум сторонами и углу между ними)

Тогда равны треугольники CBP и ABQ (по двум сторонам и углу между ними) $\Rightarrow AP = AQ + QP = CP + BP$.



3 Тригонометрия

Для доказательства обобщения теоремы нам потребуются следующие факты:

1. элементарные преобразования углов
2. формулы синуса суммы/разности
3. понижение степени синуса/косинуса.

Запишем некоторые формулы, которые будем использовать при доказательстве нового обобщения:

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$$

$$\sin^5 x = \frac{10\sin x - 5\sin 3x + \sin 5x}{16}$$

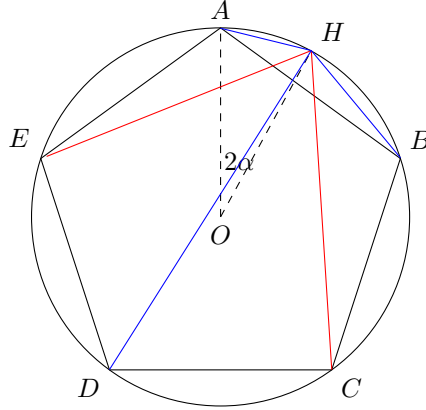
$$\sin^n x = \frac{1}{2^{n-1}} 2 \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}-k} \cdot C_n^k \cdot \sin((n-2k)x)$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

4 Доказательство

После того как мы рассмотрели всю необходимую для исследования теорию, приведем доказательство рассматриваемого факта с помощью метода математической индукции. Начнём доказательство со случая правильного пятиугольника и суммы первых степеней.

4.1 Правильный пятиугольник и сумма первых степеней



1. Пусть $\angle AOH = 2\alpha$, $\angle A = \frac{3\pi}{5}$;
 EO и DO – биссектрисы правильного пятиугольника, значит треугольник EOD – равнобедренный
 $\Rightarrow \angle EOD = \frac{2\pi}{5}$
2. Дуги AD и EC равны (так как $ABCDE$ – правильный пятиугольник, и равные хорды стягивают равные дуги окружности) $\Rightarrow \angle EHC = \angle AHD = \frac{2\pi}{5}$
3. Распишем теорему синусов для всех четырёх получившихся треугольников:

$$\frac{AH}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow AH = 2R \sin \alpha$$

$$\frac{HD}{\sin(\pi - \frac{2\pi}{5} - \alpha)} = 2R \Rightarrow HD = 2R \sin(\frac{3\pi}{5} - \alpha)$$

$$\frac{HB}{\sin(\frac{\pi}{5} - \alpha)} = 2R \Rightarrow HB = 2R \sin(\frac{\pi}{5} - \alpha)$$

$$\frac{EH}{\sin(\frac{\pi}{5} + \alpha)} = 2R \Rightarrow EH = 2R \sin(\frac{\pi}{5} + \alpha)$$

$$\frac{HC}{\sin(\frac{3\pi}{5} + \alpha)} = 2R \Rightarrow HC = 2R \sin(\frac{3\pi}{5} + \alpha)$$

4. Докажем, что сумма первых степеней длин этих отрезков равна 0. Запишем сумму этих отрезков, предварительно сократив на $2R$:

$$\begin{aligned} & \sin \alpha - \sin(\frac{\pi}{5} + \alpha) + \sin(\frac{3\pi}{5} - \alpha) - \sin(\frac{3\pi}{5} + \alpha) + \sin(\frac{\pi}{5} - \alpha) = \sin \alpha - \sin \frac{\pi}{5} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{5} \sin \alpha + \\ & \quad \sin \frac{3\pi}{5} \cos \alpha - \cos \frac{3\pi}{5} \sin \alpha - \sin \frac{3\pi}{5} \cos \alpha - \cos \frac{3\pi}{5} \sin \alpha + \sin \frac{\pi}{5} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{5} \sin \alpha = \\ & \quad \sin \alpha (1 - 2 \cos \frac{\pi}{5} - 2 \cos \frac{3\pi}{5}) = \sin \alpha (1 - 2(\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5})) = \sin \alpha (1 - 2 \cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5}) = \\ & \quad = \sin \alpha (1 - 2(2 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 1) \cos \frac{\pi}{5}) = \sin \alpha (1 - (4 \cos^3 \frac{\pi}{5} - 2 \cos \frac{\pi}{5})) = \sin \alpha (1 - 2(4(\frac{1 + \sqrt{5}}{4})^3 - \\ & \quad 2 \frac{1 + \sqrt{5}}{4})) = \sin \alpha (1 - 2(\frac{1}{16}(5\sqrt{5} + 15 + 3\sqrt{5} + 1) - \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2})) = \sin \alpha (1 - 2(\frac{\sqrt{5}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2})) = \\ & \quad = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

4.2 Правильный пятиугольник и сумма третьих степеней

1. Пусть $\angle AOH = 2\alpha$, $\angle A = \frac{3\pi}{5}$;
 EO и DO – биссектрисы правильного пятиугольника, значит треугольник EOD – равнобедренный
 $\Rightarrow \angle EOD = \frac{2\pi}{5}$

2. Дуги AD и EC равны (так как $ABCDE$ - правильный пятиугольник, и равные хорды стягивают равные дуги окружности) $\Rightarrow \angle EHC = \angle AHD = \frac{2\pi}{5}$

3. Распишем теорему синусов для всех четырёх получившихся треугольников:

$$\frac{AH}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow AH^3 = 8R^3 \sin^3 \alpha$$

$$\frac{HD}{\sin(\pi - \frac{2\pi}{5} - \alpha)} = 2R \Rightarrow HD^3 = 8R^3 \sin^3(\frac{3\pi}{5} - \alpha)$$

$$\frac{HB}{\sin(\frac{\pi}{5} - \alpha)} = 2R \Rightarrow HB^3 = 8R^3 \sin^3(\frac{\pi}{5} - \alpha)$$

$$\frac{EH}{\sin(\frac{\pi}{5} + \alpha)} = 2R \Rightarrow EH^3 = 8R^3 \sin^3(\frac{\pi}{5} + \alpha)$$

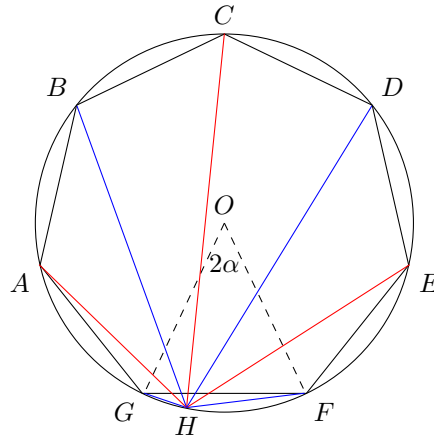
$$\frac{HC}{\sin(\frac{3\pi}{5} + \alpha)} = 2R \Rightarrow HC^3 = 8R^3 \sin^3(\frac{3\pi}{5} + \alpha)$$

4. Мы хотим доказать, что знакопеременная сумма третьих степеней данных отрезков равна нулю.

Запишем сумму этих отрезков, предварительно сократив на $8R^3$:

$$\begin{aligned} \sin^3 \alpha - \sin^3(\frac{\pi}{5} + \alpha) + \sin^3(\frac{3\pi}{5} - \alpha) - \sin^3(\frac{3\pi}{5} + \alpha) + \sin^3(\frac{\pi}{5} - \alpha) &= \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha - (3 \sin(\frac{\pi}{5} + \alpha) - \\ &\sin(\frac{3\pi}{5} + 3\alpha)) + (3 \sin(\frac{3\pi}{5} - \alpha) - \sin(\frac{9\pi}{5} - 3\alpha)) - (3 \sin(\frac{3\pi}{5} + \alpha) - \sin(\frac{3\pi}{5} + 3\alpha) + (3 \sin \frac{\pi}{5} - \alpha) - \\ &\sin(\frac{3\pi}{5} - 3\alpha)) = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha - 3 \sin(\frac{\pi}{5} + \alpha) + \sin(\frac{3\pi}{5} + 3\alpha) + 3 \sin(\frac{3\pi}{5} - \alpha) - \sin(\frac{3\pi}{5} - 3\alpha) - \\ &3 \sin(\frac{3\pi}{5} + \alpha) + \sin(\frac{9\pi}{5} + 3\alpha) + 3 \sin(\frac{\pi}{5} - \alpha) - \sin(\frac{3\pi}{5} - 3\alpha)) = \frac{1}{4}(3(\sin \alpha - \sin(\frac{\pi}{5} + \alpha) + \\ &\sin(\frac{3\pi}{5} + \alpha) - \sin(\frac{\pi}{5} - \alpha) - (\sin 3\alpha - \sin(\frac{3\pi}{5} + 3\alpha) + \sin(\frac{9\pi}{5} - 3\alpha) - \sin(\frac{9\pi}{5} + 3\alpha) + \\ &\sin(\frac{3\pi}{5} - 3\alpha))) = \frac{1}{4}(\sin 3\alpha - \sin(\frac{3\pi}{5} + 3\alpha) + \sin(\frac{9\pi}{5} - 3\alpha) - \sin(\frac{9\pi}{5} + 3\alpha) + \sin(\frac{3\pi}{5} - 3\alpha)) = \\ &\frac{1}{4} \sin 3\alpha (1 - 2 \cos \frac{3\pi}{5} - 2 \cos \frac{9\pi}{5}) = 0 \end{aligned}$$

4.3 Правильный семиугольник и сумма третьих степеней



1. $\angle A = \frac{5 \cdot 180}{7} = 128\frac{4}{7} = \frac{5}{7}\pi$; $\angle OFG = 64\frac{2}{7} = \frac{5}{14}\pi$

2. $\angle GFH = \frac{5\pi}{7} - \angle DFE + \angle GFH = \frac{5\pi}{7} - \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi - 2\alpha}{2} = \frac{5\pi}{7} - \frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{7} - \alpha = \frac{5\pi}{7} - \alpha$

3. Запишем теорему синусов для получившихся треугольников:

$$\frac{HF}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow HF^3 = 8R^3 \sin^3 \alpha$$

$$\frac{HD}{\sin(128\frac{4}{7} - \alpha)} = 2R \Rightarrow HD^3 = 8R^3 \sin^3(128\frac{4}{7} - \alpha) = 8R^3 \sin^3(\frac{5}{7}\pi - \alpha)$$

$$\frac{BH}{\sin(102\frac{6}{7}\alpha)} = 2R \Rightarrow BH^3 = 8R^3 \sin^3(102\frac{6}{7}\alpha) = 8R^3 \sin^3(\frac{4}{7}\pi + \alpha)$$

$$\frac{GH}{\sin(25\frac{5}{7}\alpha)} = 2R \Rightarrow GH^3 = 8R^3 \sin^3(25\frac{5}{7}\alpha) = 8R^3 \sin^3(\frac{\pi}{7} - \alpha)$$

$$\frac{HE}{\sin(154\frac{2}{7}\alpha)} = 2R \Rightarrow HE^3 = 8R^3 \sin^3(154\frac{2}{7}\alpha) = 8R^3 \sin^3(\frac{6}{7}\pi - \alpha) = 8R^3 \sin^3(\frac{\pi}{7} + \alpha)$$

$$\frac{CH}{\sin(102\frac{6}{7}\alpha)} = 2R \Rightarrow CH^3 = 8R^3 \sin^3(102\frac{6}{7}\alpha) = 8R^3 \sin^3(\frac{4}{7}\pi - \alpha)$$

$$\frac{AH}{\sin(128\frac{4}{7}\alpha)} = 2R \Rightarrow AH^3 = 8R^3 \sin^3(128\frac{4}{7}\alpha) = 8R^3 \sin^3(\frac{5}{7}\pi + \alpha)$$

4. Аналогично предыдущим пунктам:

$$\begin{aligned} & \sin^3 \alpha - \sin^3(\frac{6\pi}{7} - \alpha) + \sin^3(\frac{5\pi}{7} - \alpha) - \sin^3(\frac{4\pi}{7} - \alpha) + \sin^3(\frac{4\pi}{7} + \alpha) - \sin^3(\frac{5\pi}{7} + \alpha) + \sin^3(25 \cdot \frac{\pi}{7} - \alpha) = \\ & = \sin^3 \alpha - \sin^3(\frac{\pi}{7} + \alpha) + \sin^3(\frac{2\pi}{7} + \alpha) - \sin^3(\frac{3\pi}{7} + \alpha) - \sin^3(\frac{3\pi}{7} - \alpha) - \sin^3(\frac{2\pi}{7} - \alpha) + \sin^3(\frac{\pi}{7} - \alpha) = \\ & = \frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha - 3 \sin(\frac{\pi}{7} - \alpha) + \sin(\frac{3\pi}{7} + 3\alpha) + 3 \sin(\frac{2\pi}{7} + \alpha) - \sin(\frac{6\pi}{7} + 3\alpha) - 3 \sin(\frac{3\pi}{7} + \alpha) + \\ & \quad \sin(\frac{9\pi}{7} + 3\alpha) + 3 \sin(\frac{3\pi}{7} - \alpha) - \sin(\frac{9\pi}{7} - 3\alpha) - 3 \sin(\frac{2\pi}{7} - \alpha) + \sin(\frac{6\pi}{7} - 3\alpha) + 3 \sin(\frac{\pi}{7} - \alpha) - \\ & \quad 3 \sin(\frac{3\pi}{7} - 3\alpha)) = \frac{1}{4}(3(\sin \alpha - \sin(\frac{\pi}{7} + \alpha) + \sin(\frac{2\pi}{7} + \alpha) - \sin(\frac{3\pi}{7} + \alpha) + \sin(\frac{3\pi}{7} - \alpha) - \\ & \quad \sin(\frac{2\pi}{7} - \alpha) + \sin(\frac{\pi}{7} - \alpha)) - (\sin 3\alpha - \sin(\frac{3\pi}{7} + 3\alpha) + \sin(\frac{6\pi}{7} + 3\alpha) - \sin(\frac{9\pi}{7} + 3\alpha) + \\ & \quad \sin(\frac{9\pi}{7} - 3\alpha) - \sin(\frac{6\pi}{7} - 3\alpha) + \sin(\frac{3\pi}{7} - 3\alpha))) = \frac{1}{4}(3(2 \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} - \\ & \quad 2 \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7})) = 0 \end{aligned}$$

4.4 Правильный семиугольник и сумма пятых степеней

Для доказательства будем пользоваться формулой понижения пятой степени синуса, которая представлена в разделе (3):

$$\begin{aligned} & \sin^5 \alpha - \sin^5(\frac{\pi}{7} + \alpha) + \sin^5(\frac{2\pi}{7} + \alpha) - \sin^5(\frac{4\pi}{7} - \alpha) + \sin^5(\frac{4\pi}{7} + \alpha) - \sin^5(\frac{5\pi}{7} + \alpha) + \sin^5(\frac{\pi}{7} - \alpha) = \\ & = \sin^5 \alpha - \sin^5(\frac{\pi}{7} + \alpha) + \sin^5(\frac{2\pi}{7} + \alpha) - \sin^5(\frac{3\pi}{7} + \alpha) + \sin^5(\frac{4\pi}{7} + \alpha) - \sin^5(\frac{5\pi}{7} + \alpha) + \sin^5(\frac{6\pi}{7} + \alpha) = \\ & = \frac{1}{16}((10(\sin(\alpha) - \sin(\frac{\pi}{7} + \alpha) + \sin(\frac{2\pi}{7} + \alpha) - \sin(\frac{3\pi}{7} + \alpha) + \sin(\frac{4\pi}{7} + \alpha) - \sin(\frac{5\pi}{7} + \alpha) + \sin(\frac{6\pi}{7} + \alpha)) - \\ & \quad 5(\sin 3\alpha - \sin(\frac{3\pi}{7} + 3\alpha) + \sin(\frac{6\pi}{7} + 3\alpha) - \sin(\frac{9\pi}{7} + 3\alpha) + \sin(\frac{12\pi}{7} + 3\alpha) - \sin(\frac{15\pi}{7} + 3\alpha) + \\ & \quad \sin(\frac{18\pi}{7} + 3\alpha)) + (\sin 5\alpha - \sin(\frac{5\pi}{7} + 5\alpha) + \sin(\frac{10\pi}{7} + 5\alpha) - \sin(\frac{15\pi}{7} + 5\alpha) + \\ & \quad \sin(\frac{20\pi}{7} + 5\alpha) - \sin(\frac{25\pi}{7} + 5\alpha) + \sin(\frac{30\pi}{7} + 5\alpha))) = 0 \end{aligned}$$

1. Рассмотрим отдельные части данного тождества:

$$(a) \sin \alpha - \sin(\frac{\pi}{7} + \alpha) + \sin(\frac{2\pi}{7} + \alpha) - \sin(\frac{3\pi}{7} + \alpha) + \sin(\frac{4\pi}{7} + \alpha) - \sin(\frac{5\pi}{7} + \alpha) + \sin(\frac{6\pi}{7} + \alpha) = \sin \alpha + 2 \sin \frac{5\pi}{14} \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) - 2 \sin \frac{3\pi}{14} \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) + 2 \sin \frac{\pi}{14} \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \sin \alpha(1 - 2 \sin \frac{\pi}{14} + 2 \sin \frac{3\pi}{14} - 2 \sin \frac{5\pi}{14})$$

$$(b) \sin 3\alpha - \sin(\frac{3\pi}{7} + 3\alpha) + \sin(\frac{6\pi}{7} + 3\alpha) - \sin(\frac{9\pi}{7} + 3\alpha) + \sin(\frac{12\pi}{7} + 3\alpha) - \sin(\frac{15\pi}{7} + 3\alpha) + \sin(\frac{18\pi}{7} + 3\alpha) = \sin 3\alpha + 2 \sin \frac{15\pi}{14} \cos(\frac{3\pi}{2} + 3\alpha) - 2 \sin \frac{9\pi}{14} \cos(\frac{3\pi}{2} + 3\alpha) + 2 \sin \frac{3\pi}{14} \cos(\frac{3\pi}{2} + 3\alpha) = \sin(3\alpha)(1 - 2 \sin \frac{15\pi}{14} + 2 \sin \frac{9\pi}{14} - 2 \sin \frac{3\pi}{14})$$

$$(c) \sin 5\alpha - \sin(\frac{5\pi}{7} + 5\alpha) + \sin(\frac{10\pi}{7} + 5\alpha) - \sin(\frac{15\pi}{7} + 5\alpha) + \sin(\frac{20\pi}{7} + 5\alpha) - \sin(\frac{25\pi}{7} + 5\alpha) + \sin(\frac{30\pi}{7} + 5\alpha) = \sin 5\alpha + 2 \sin \frac{25\pi}{14} \cos(\frac{5\pi}{2} + 5\alpha) - 2 \sin \frac{15\pi}{14} \cos(\frac{5\pi}{2} + 5\alpha) + 2 \sin \frac{5\pi}{14} \cos(\frac{5\pi}{2} + 5\alpha) = \sin(5\alpha)(1 + 2 \sin \frac{25\pi}{14} - 2 \sin \frac{15\pi}{14} + 2 \sin \frac{5\pi}{14}) = \sin 5\alpha(1 - 2 \sin \frac{3\pi}{14} + 2 \sin \frac{\pi}{14} - 2 \sin \frac{5\pi}{14})$$

2. Вернемся к исходному тождеству. Запишем его, вынеся общий множитель за скобки:

$$\frac{1}{16}(1 + 2 \sin \frac{3\pi}{14} - 2 \sin \frac{\pi}{14} - 2 \sin \frac{5\pi}{14})(10 \sin \alpha - 5 \sin 3\alpha + \sin 5\alpha) = 0$$

$$1 + 2 \sin \frac{3\pi}{14} - 2 \sin \frac{\pi}{14} - 2 \sin \frac{5\pi}{14} = 0$$

$$1 + 2 \cos \frac{2\pi}{7} - 2 \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7} = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2 \sin \frac{\pi}{7} (\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7})}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin \frac{2\pi}{7} + \sin(-\frac{2\pi}{7}) + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin(-\frac{4\pi}{7}) + \sin \frac{6\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sin \frac{6\pi}{7}}{2 \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

4.5 Общая формула

Рассмотрев частные случаи данной теоремы, можем вывести общую формулу для произвольного правильного нечетногоугольника и нечетных степеней:

$$\begin{aligned} & \sin^k \alpha - \sin^k \left(\alpha + \frac{\pi}{2n+1} \right) + \dots + (-1)^n \sin^k \left(\alpha + \frac{n\pi}{2n+1} \right) + (-1)^{n+1} \sin^k \left(\alpha + \frac{(n+1)\pi}{2n+1} \right) + \dots \\ & \dots + (-1)^{2n} \sin^k \left(\alpha + \frac{2n\pi}{2n+1} \right) = \sum_{l=0}^{2n} \sin^k \left(\alpha + \frac{l\pi}{2n+1} \right) (-1)^l = \sum_{l=0}^{2n} e^{k(\alpha + \frac{l\pi}{2n+1})} (-1)^l - \sum_{l=0}^{2n} e^{-k(\alpha + \frac{l\pi}{2n+1})} (-1)^l = 0, \end{aligned}$$

где $k \in [1; n-2]$ и является нечетным.

1. Докажем данную формулу для первых степеней:

(a) $k = 1$:

$$\sum_{l=0}^{2n} e^{(\alpha + \frac{l\pi}{2n+1})} (-1)^l - \sum_{l=0}^{2n} e^{-(\alpha + \frac{l\pi}{2n+1})} (-1)^l = \frac{-(-1) - 1}{2n+1}$$

(b) Первая сумма – геометрическая прогрессия: первый член $b_1 = e^{i\alpha}$, знаменатель $-e^{\frac{i\pi}{2n+1}}$:

$$\sum_{l=0}^{2n} e^{(\alpha + \frac{l\pi}{2n+1})} (-1)^l$$

Тогда имеем:

$$\sum_{l=0}^{2n} e^{(\alpha + \frac{l\pi}{2n+1})} (-1)^l = b_1(1 + \dots + q^{2n}) = b_1 \frac{q^{2n+1} - 1}{q - 1} = 0$$

(c) Аналогично для второй суммы: первый член $b_1 = e^{-i\alpha}$, знаменатель $-e^{\frac{i\pi}{2n+1}}$:

$$\sum_{l=0}^{2n} e^{-(\alpha + \frac{l\pi}{2n+1})} (-1)^l,$$

откуда

$$\sum_{l=0}^{2n} e^{-(\alpha + \frac{l\pi}{2n+1})} (-1)^l = b_1(1 + \dots + q^{2n}) = b_1 \frac{q^{2n+1} - 1}{q - 1} = 0$$

Следовательно, тождество доказано.

2. Для произвольной степени k все однозначно: суммы для каждого слагаемого в отдельности будут такие же, только степень, в которую возводится e , домножится на k , но на значение выражения это не повлияет: $e^{i\pi} = e^{ik\pi} = -1$.

5 Вывод

После завершения исследования, мы обнаружили, что результат уже был получен ранее (см. 3). Но мы смогли найти существенно другой и более простой подход к доказательству, использующий тригонометрическое тождество, которое представляет свой отдельный интерес:

$$\begin{aligned} \sin^k \alpha - \sin^k \left(\alpha + \frac{\pi}{2n+1} \right) + \dots + (-1)^n \sin^k \left(\alpha + \frac{n\pi}{2n+1} \right) + (-1)^{n+1} \sin^k \left(\alpha + \frac{(n+1)\pi}{2n+1} \right) + \dots \\ \dots + (-1)^{2n} \sin^k \left(\alpha + \frac{2n\pi}{2n+1} \right) = 0, \end{aligned}$$

где $k \in [1; n-2]$ и является нечетным.

Эту же формулу можно записать и в экспоненциальном виде:

$$\sum_{l=0}^{2n} \sin^k \left(\alpha + \frac{l\pi}{2n+1} \right) (-1)^l = \sum_{l=0}^{2n} e^{k(\alpha + \frac{l\pi}{2n+1})} (-1)^l - \sum_{l=0}^{2n} e^{-k(\alpha + \frac{l\pi}{2n+1})} (-1)^l = 0.$$

Список литературы

- [1] Е. Бакаев «Обобщение теоремы Помпею» // Квант/ Математический кружок. 2017. №1. с. 39-42
- [2] Mamuka Meskhishvili «New sense of circle» / 2019
- [3] John D. Smith Ptolemaic Inequalities // Geometriae Dedicata. 1996. No61. с. 181-190