«Национальный исследовательский университет

«Высшая школа экономики»

Лицей

Обобщение теоремы Помпею

Кутищева Анна Андреевна

Москва 2022

Содержание

1 Цели и задачи исследования

В 1936 году румынский математик Дмитрие Помпею, внесший большой вклад в изучение математического анализа и теории чисел, доказал следующую теорему:

Теорема 1 (Теорема Помпею) *Для любой точки P в плоскости равностороннего треугольника ABC из отрезков PA, PB и PC можно составить треугольник, причем он вырожденный тогда и только тогда, когда P лежит на описанной окружности треугольника ABC [1]*

Теорема 2 (Обобщение теоремы Помпею) *Пусть $A_1A_2...A_n$ - правильный нечетноугольник, M - произвольная точка на дуге A_1A_n окружности, описанной около многоугольника. Тогда знакопеременная сумма*

$$MA_1^k - MA_2^k + MA_3^k - ... - MA_{n-1}^k + MA_n^k = 0,$$

где k принимает все нечетные значения от $[1; n-2]$.

Цель работы: *доказать тождество для знакопеременной суммы расстояний в нечетных степенях от произвольной точки на дуге окружности, описанной около правильного нечетноугольника до вершин многоугольника.* [3]

Задачи исследования:

1. Применить способ [2] доказательства утверждения «Сумма расстояний в четных степенях (от 2 до $n-2$, где n - количество сторон четноугольника) от произвольной точки окружности, до вершин четноугольника постоянна» к правильному нечетноугольнику.

2. Применить теорему синусов для доказательства тождеств

3. Применить тригонометрические формулы для вычисления знакопеременной суммы синусов в высоких степенях

Материалы исследования:

1. Доказательство тождества для правильного четноугольника и суммы расстояний в четных степенях

2. Тригонометрические формулы для преобразования значений углов

3. Применить тригонометрические формулы для вычисления знакопеременной суммы синусов в высоких степенях.

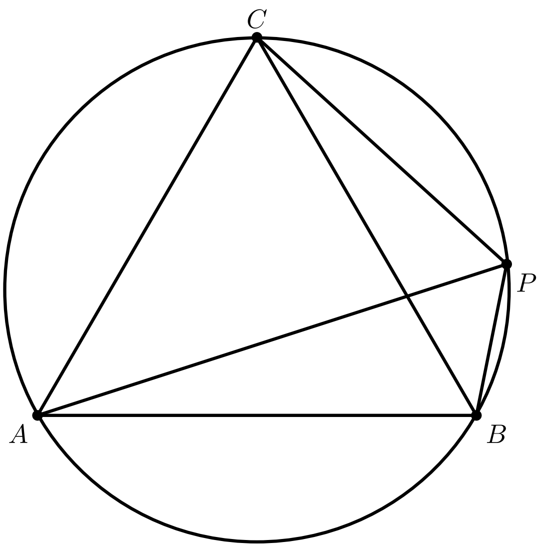
Методы исследования:

1. Метод тригонометрических преобразований

2 Предисловие

2.1 Необходимый случай теоремы

Для теоремы Помпею мы лишь докажем случай, когда выполняется равенство $AP = BP + CP$, где BC - дуга окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, на которой отмечена точка P.



2.2 Доказательство случая теоремы

Сделаем дополнительное построение: $CP = AQ$. Рассмотрим треугольники CPB и AQB:

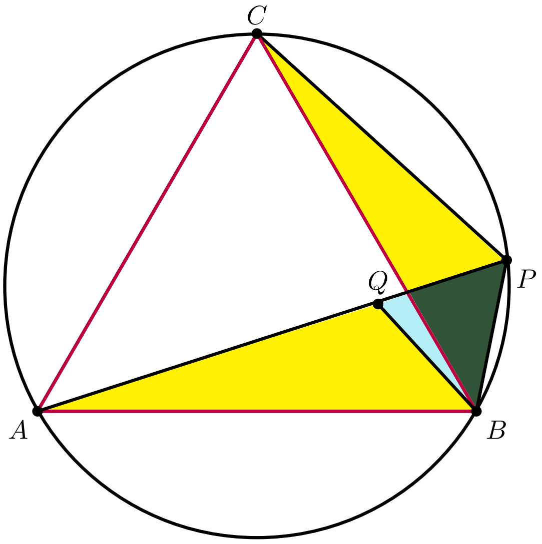
1. $AB = BC$ (по условию)

2. $AQ = CP$ (по построению)

3. $\angle QAB = \angle PCB$ (вписанные, опираются на дугу PB)
   Значит, треугольники CPB и QAB равны

4. Треугольники PBQ и ABC равны (по двум сторонами и углу между ними)

Тогда равны треугольники CBP и ABQ (по двум сторонам и углу между ними) $\Rightarrow AP = AQ + QP = CP + BP$.



3 Тригонометрия

Для доказательства обобщения теоремы нам потребуются следующие факты:

1. элементарные преобразования углов
2. формулы синуса суммы/разности
3. понижение степени синуса/косинуса.

Запишем некоторые формулы, которые будем использовать при доказательстве нового обобщения:

$\sin^3 x \ = \ \frac{3sinx \ - \ sin3x}{4}$

$\sin^5 x \ = \ \frac{10sinx \ - \ 5sin3x \ + \ sin5x}{16}$

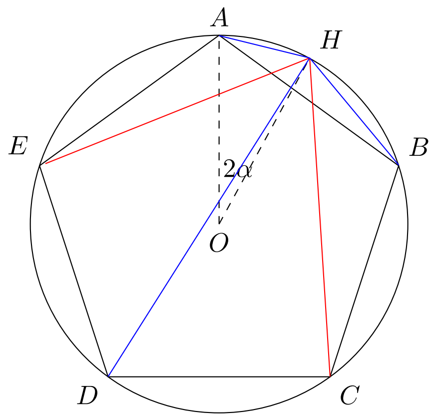
$\sin^n x = \frac{1}{2^{n-1}} 2 \sum_{k \ = \ 0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}-k} \ \cdot \ C_n^k \ \cdot \ \sin((n \ - \ 2k)x)$

$\sin x \ = \ \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

4 Доказательство

После того как мы рассмотрели всю необходимую для исследования теорию, приведем доказательство рассматриваемого факта с помощью метода математической индукции. Начнём доказательство со случая правильного пятиугольника и суммы первых степеней.

4.1 Правильный пятиугольник и сумма первых степеней



1. Пусть $\angle AOH = 2\alpha, \angle A = \frac{3\pi}{5}$;

   EO и DO – биссектрисы правильного пятиугольника, значит треугольник EOD – равнобедренный $\Rightarrow \angle EOD = \frac{2\pi}{5}$

2. Дуги AD и EC равны (так как $ABCDE$ - правильный пятиугольник, и равные хорды стягивают равные дуги окружности) $\Rightarrow \angle EHC = \angle AHD = \frac{2\pi}{5}$

3. Распишем теорему синусов для всех четырёх получившихся треугольников:

   $\frac{AH}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow AH = 2R\sin\alpha$

   $\frac{HD}{\sin\left(\pi - \frac{2\pi}{5} - \alpha\right)} = 2R \Rightarrow HD = 2R\sin\left(\frac{3\pi}{5} - \alpha\right)$

   $\frac{HB}{\sin\left(\frac{\pi}{5} - \alpha\right)} = 2R \Rightarrow HB = 2R\sin\left(\frac{\pi}{5} - \alpha\right)$

   $\frac{EH}{\sin\left(\frac{\pi}{5} + \alpha\right)} = 2R \Rightarrow EH = 2R\sin\left(\frac{\pi}{5} + \alpha\right)$

   $\frac{HC}{\sin\left(\frac{3\pi}{5} + \alpha\right)} = 2R \Rightarrow HC = 2R\sin\left(\frac{3\pi}{5} + \alpha\right)$

4. Докажем, что сумма первых степеней длин этих отрезков равна 0. Запишем сумму этих отрезков, предварительно сократив на $2R$:

$$\sin\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{5} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{5} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{5} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{5} - \alpha\right) = \sin\alpha - \sin\frac{\pi}{5}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{5}\sin\alpha +$$
$$\sin\frac{3\pi}{5}\cos\alpha - \cos\frac{3\pi}{5}\sin\alpha - \sin\frac{3\pi}{5}\cos\alpha - \cos\frac{3\pi}{5}\sin\alpha + \sin\frac{\pi}{5}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{5}\sin\alpha =$$
$$\sin\alpha\,(1 - 2\cos\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{3\pi}{5}) = \sin\alpha\,(1 - 2(\cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5})) = \sin\alpha\,(1 - 2\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}) =$$
$$= \sin\alpha\,(1 - 2(2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1)\cos\frac{\pi}{5})) = \sin\alpha\,(1 - (4\cos^3\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{\pi}{5})) = \sin\alpha\,(1 - 2(4(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^3 -$$
$$2\frac{1+\sqrt{5}}{4})) = \sin\alpha\,(1 - 2(\frac{1}{16}(5\sqrt{5} + 15 + 3\sqrt{5} + 1) - \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2})) = \sin\alpha\,(1 - 2(\frac{\sqrt{5}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2})) =$$
$$= 1 - 1 = 0$$

4.2 Правильный пятиугольник и сумма третьих степеней

1. Пусть $\angle AOH = 2\alpha, \angle A = \frac{3\pi}{5}$;

   EO и DO – биссектрисы правильного пятиугольника, значит треугольник EOD – равнобедренный $\Rightarrow \angle EOD = \frac{2\pi}{5}$

2. Дуги AD и EC равны (так как $ABCDE$ - правильный пятиугольник, и равные хорды стягивают равные дуги окружности) $\Rightarrow \angle EHC = \angle AHD = \frac{2\pi}{5}$

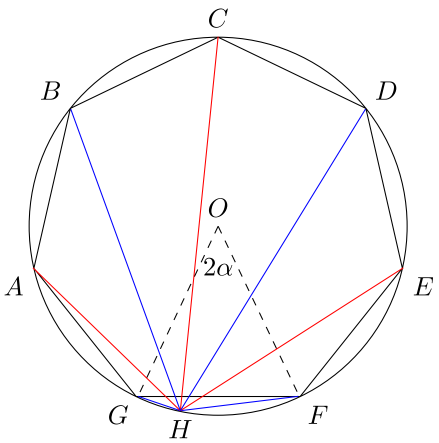
3. Распишем теорему синусов для всех четырёх получившихся треугольников:

$$\frac{AH}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow AH^3 = 8R^3\sin^3\alpha$$
$$\frac{HD}{sin\left(\pi-\frac{2\pi}{5}-\alpha\right)} = 2R \Rightarrow HD^3 = 8R^3\sin^3\left(\frac{3\pi}{5}-\alpha\right)$$
$$\frac{HB}{\sin\left(\frac{\pi}{5}-\alpha\right)} = 2R \Rightarrow HB^3 = 8R^3\sin^3\left(\frac{\pi}{5}-\alpha\right)$$
$$\frac{EH}{\sin\left(\frac{\pi}{5}+\alpha\right)} = 2R \Rightarrow EH^3 = 8R^3\sin^3\left(\frac{\pi}{5}+\alpha\right)$$
$$\frac{HC}{\sin\left(\frac{3\pi}{5}+\alpha\right)} = 2R \Rightarrow HC^3 = 8R^3\sin^3\left(\frac{3\pi}{5}+\alpha\right)$$

4. Мы хотим доказать, что знакопеременная сумма третьих степеней данных отрезков равна нулю. Запишем сумму этих отрезков, предварительно сократив на $8R^3$:

$$\sin^3\alpha - \sin^3(\frac{\pi}{5}+\alpha) + \sin^3(\frac{3\pi}{5}-\alpha) - \sin^3(\frac{3\pi}{5}+\alpha) + \sin^3(\frac{\pi}{5}-\alpha) = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha - (3\sin(\frac{\pi}{5}+\alpha) - \sin(\frac{3\pi}{5}+3\alpha)) + (3\sin(\frac{3\pi}{5}-\alpha) - \sin(\frac{9\pi}{5}-3\alpha)) - (3\sin(\frac{3\pi}{5}+\alpha) - \sin(\frac{3\pi}{5}+3\alpha) + (3\sin\frac{\pi}{5}-\alpha) - \sin(\frac{3\pi}{5}-3\alpha)) = \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin 3\alpha - 3\sin(\frac{\pi}{5}+\alpha) + \sin(\frac{3\pi}{5}+3\alpha) + 3\sin(\frac{3\pi}{5}-\alpha) - \sin(\frac{3\pi}{5}-3\alpha) - 3\sin(\frac{3\pi}{5}+\alpha) + \sin(\frac{9\pi}{5}+3\alpha) + 3\sin(\frac{\pi}{5}-\alpha) - \sin(\frac{3\pi}{5}-3\alpha)) = \frac{1}{4}(3(\sin\alpha - \sin(\frac{\pi}{5}+\alpha) + \sin(\frac{3\pi}{5}+\alpha) - \sin(\frac{\pi}{5}-\alpha) - (\sin 3\alpha - \sin(\frac{3\pi}{5}+3\alpha) + \sin(\frac{9\pi}{5}-3\alpha) - \sin(\frac{9\pi}{5}+3\alpha) + \sin(\frac{3\pi}{5}-3\alpha)))) = \frac{1}{4}(\sin 3\alpha - \sin(\frac{3\pi}{5}+3\alpha) + \sin(\frac{9\pi}{5}-3\alpha) - \sin(\frac{9\pi}{5}+3\alpha) + \sin(\frac{3\pi}{5}-3\alpha)) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha(1 - 2\cos\frac{3\pi}{5} - 2\cos\frac{9\pi}{5}) = 0$$

4.3 Правильный семиугольник и сумма третьих степеней



1. $\angle A = \frac{5\cdot 180}{7} = 128\frac{4}{7} = \frac{5}{7}\pi; \angle OFG = 64\frac{2}{7} = \frac{5}{14}\pi$

2. $\angle GFH = \frac{5\pi}{7} - \angle DFE + \angle GFH = \frac{5\pi}{7} - \frac{\pi}{7} + \frac{\frac{2\pi}{7}-2\alpha}{2} = \frac{5\pi}{7} - \frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{7} - \alpha = \frac{5\pi}{7} - \alpha$

3. Запишем теорему синусов для получившихся треугольников:

$$\frac{HF}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow HF^3 = 8R^3\sin^3\alpha$$
$$\frac{HD}{\sin(128\frac{4}{7}-\alpha)} = 2R \Rightarrow HD^3 = 8R^3\sin^3(128\frac{4}{7}-\alpha) = 8R^3\sin(\frac{5}{7}\pi-\alpha)$$

$\frac{BH}{\sin(102\frac{6}{7}+\alpha)} = 2R \Rightarrow BH^3 = 8R^3\sin^3(102\frac{6}{7}+\alpha) = 8R^3\sin^3(\frac{4}{7}\pi+\alpha)$

$\frac{GH}{\sin(25\frac{5}{7}-\alpha)} = 2R \Rightarrow GH^3 = 8R^3\sin^3(25\frac{5}{7}-\alpha) = 8R^3\sin^3(\frac{\pi}{7}-\alpha)$

$\frac{HE}{\sin(154\frac{2}{7}-\alpha)} = 2R \Rightarrow HE^3 = 8R^3\sin^3(154\frac{2}{7}-\alpha) = 8R^3\sin^3(\frac{6}{7}\pi-\alpha) = 8R^3\sin^3(\frac{\pi}{7}+\alpha)$

$\frac{CH}{\sin(102\frac{6}{7}-\alpha)} = 2R \Rightarrow CH^3 = 8R^3\sin^3(102\frac{6}{7}-\alpha) = 8R^3\sin^3(\frac{4}{7}\pi-\alpha)$

$\frac{AH}{\sin(128\frac{4}{7}+\alpha)} = 2R \Rightarrow AH^3 = 8R^3\sin^3(128\frac{4}{7}+\alpha) = 8R^3\sin^3(\frac{5}{7}\pi+\alpha)$

4. Аналогично предыдущим пунктам:

$$\sin^3\alpha - \sin^3(\frac{6\pi}{7}-\alpha) + \sin^3(\frac{5\pi}{7}-\alpha) - \sin^3(\frac{4\pi}{7}-\alpha) + \sin^3(\frac{4\pi}{7}+\alpha) - \sin^3(\frac{5\pi}{7}+\alpha) + \sin^3(25\cdot\frac{\pi}{7}-\alpha) =$$
$$= \sin^3\alpha - \sin^3(\frac{\pi}{7}+\alpha) + \sin^3(\frac{2\pi}{7}+\alpha) - \sin^3(\frac{3\pi}{7}+\alpha) - \sin^3(\frac{3\pi}{7}-\alpha) - \sin^3(\frac{2\pi}{7}-\alpha) + \sin^3(\frac{\pi}{7}-\alpha) =$$
$$= \frac{1}{4}(3\sin\alpha - \sin3\alpha - 3\sin(\frac{\pi}{7}-\alpha) + \sin(\frac{3\pi}{7}+3\alpha) + 3\sin(\frac{2\pi}{7}+\alpha) - \sin(\frac{6\pi}{7}+3\alpha) - 3\sin(\frac{3\pi}{7}+\alpha) +$$
$$\sin(\frac{9\pi}{7}+3\alpha) + 3\sin(\frac{3\pi}{7}-\alpha) - \sin(\frac{9\pi}{7}-3\alpha) - 3\sin(\frac{2\pi}{7}-\alpha) + \sin(\frac{6\pi}{7}-3\alpha) + 3\sin(\frac{\pi}{7}-\alpha) -$$
$$3\sin(\frac{3\pi}{7}-3\alpha)) = \frac{1}{4}(3(\sin\alpha - \sin(\frac{\pi}{7}+\alpha) + \sin(\frac{2\pi}{7}+\alpha) - \sin(\frac{3\pi}{7}+\alpha) + \sin(\frac{3\pi}{7}-\alpha) -$$
$$\sin(\frac{2\pi}{7}-\alpha) + \sin(\frac{\pi}{7}-\alpha)) - (\sin3\alpha - \sin(\frac{3\pi}{7}+3\alpha) + \sin(\frac{6\pi}{7}+3\alpha) - \sin(\frac{9\pi}{7}+3\alpha) +$$
$$\sin(\frac{9\pi}{7}-3\alpha) - \sin(\frac{6\pi}{7}-3\alpha) + \sin(\frac{3\pi}{7}-3\alpha)))) = \frac{1}{4}(3(2\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} -$$
$$2\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{2\pi}{7})) = 0$$

4.4 Правильный семиугольник и сумма пятых степеней

Для доказательства будем пользоваться формулой понижения пятой степени синуса, которая представлена в разделе (3):

$$\sin^5\alpha - \sin^5(\frac{\pi}{7}+\alpha) + \sin^5(\frac{2\pi}{7}+\alpha) - \sin^5(\frac{4\pi}{7}-\alpha) + \sin^5(\frac{4\pi}{7}+\alpha) - \sin^5(\frac{5\pi}{7}+\alpha) + \sin^5(\frac{\pi}{7}-\alpha) =$$
$$= \sin^5\alpha - \sin^5(\frac{\pi}{7}+\alpha) + \sin^5(\frac{2\pi}{7}+\alpha) - \sin^5(\frac{3\pi}{7}+\alpha) + \sin^5(\frac{4\pi}{7}+\alpha) - \sin^5(\frac{5\pi}{7}+\alpha) + \sin^5(\frac{6\pi}{7}+\alpha) =$$
$$= \frac{1}{16}((10(\sin(\alpha) - \sin(\frac{\pi}{7}+\alpha) + \sin(\frac{2\pi}{7}+\alpha) - \sin(\frac{3\pi}{7}+\alpha) + \sin(\frac{4\pi}{7}+\alpha) - \sin(\frac{5\pi}{7}+\alpha) + \sin(\frac{6\pi}{7}+\alpha)) -$$
$$5(\sin3\alpha - \sin(\frac{3\pi}{7}+3\alpha) + \sin(\frac{6\pi}{7}+3\alpha) - \sin(\frac{9\pi}{7}+3\alpha) + \sin(\frac{12\pi}{7}+3\alpha) - \sin(\frac{15\pi}{7}+3\alpha) +$$
$$\sin(\frac{18\pi}{7}+3\alpha)) + (\sin5\alpha - \sin(\frac{5\pi}{7}+5\alpha) + \sin(\frac{10\pi}{7}+5\alpha) - \sin(\frac{15\pi}{7}+5\alpha) +$$
$$\sin(\frac{20\pi}{7}+5\alpha) - \sin(\frac{25\pi}{7}+5\alpha) + \sin(\frac{30\pi}{7}+5\alpha))) = 0$$

1. Рассмотрим отдельные части данного тождества:

   (a) $\sin\alpha - \sin(\frac{\pi}{7}+\alpha) + \sin(\frac{2\pi}{7}+\alpha) - \sin(\frac{3\pi}{7}+\alpha) + \sin(\frac{4\pi}{7}+\alpha) - \sin(\frac{5\pi}{7}+\alpha) + \sin(\frac{6\pi}{7}+\alpha) = \sin\alpha + 2\sin\frac{5\pi}{14}\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) - 2\sin\frac{3\pi}{14}\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) + 2\sin\frac{\pi}{14}\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \sin\alpha(1 - 2\sin\frac{\pi}{14} + 2\sin\frac{3\pi}{14} - 2\sin\frac{5\pi}{14})$

   (b) $\sin3\alpha - \sin(\frac{3\pi}{7}+3\alpha) + \sin(\frac{6\pi}{7}+3\alpha) - \sin(\frac{9\pi}{7}+3\alpha) + \sin(\frac{12\pi}{7}+3\alpha) - \sin(\frac{15\pi}{7}+3\alpha) + \sin(\frac{18\pi}{7}+3\alpha) = \sin3\alpha + 2\sin\frac{15\pi}{14}\cos(\frac{3\pi}{2}+3\alpha) - 2\sin\frac{9\pi}{14}\cos(\frac{3\pi}{2}+3\alpha) + 2\sin\frac{3\pi}{14}\cos(\frac{3\pi}{2}+3\alpha) = \sin(3\alpha)(1 - 2\sin\frac{15\pi}{14} + 2\sin\frac{9\pi}{14} - 2\sin\frac{3\pi}{14})$

   (c) $\sin5\alpha - \sin(\frac{5\pi}{7}+5\alpha) + \sin(\frac{10\pi}{7}+5\alpha) - \sin(\frac{15\pi}{7}+5\alpha) + \sin(\frac{20\pi}{7}+5\alpha) - \sin(\frac{25\pi}{7}+5\alpha) + \sin(\frac{30\pi}{7}+5\alpha) = \sin5\alpha + 2\sin\frac{25\pi}{14}\cos(\frac{5\pi}{2}+5\alpha) - 2\sin\frac{15\pi}{14}\cos(\frac{5\pi}{2}+5\alpha) + 2\sin\frac{5\pi}{14}\cos(\frac{5\pi}{2}+5\alpha) = \sin(5\alpha)(1 + 2\sin\frac{25\pi}{14} - 2\sin\frac{15\pi}{14} + 2\sin\frac{5\pi}{14}) = \sin5\alpha(1 - 2\sin\frac{3\pi}{14} + 2\sin\frac{\pi}{14} - 2\sin\frac{5\pi}{14})$

2. Вернемся к исходному тождеству. Запишем его, вынеся общий множитель за скобки:

$\frac{1}{16}(1+2\sin\frac{3\pi}{14}-2\sin\frac{\pi}{14}-2\sin\frac{5\pi}{14})(10\sin\alpha-5\sin3\alpha+\sin5\alpha)=0$

$1+2\sin\frac{3\pi}{14}-2\sin\frac{\pi}{14}-2\sin\frac{5\pi}{14}=0$

$1+2\cos\frac{2\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{3\pi}{7}=0$

$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$

$\dfrac{2\sin\frac{\pi}{7}(\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7})}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\sin\frac{2\pi}{7}+\sin(-\frac{2\pi}{7})+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin(-\frac{4\pi}{7})+\sin\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\sin\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=\dfrac{1}{2}$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

4.5 Общая формула

Рассмотрев частные случаи данной теоремы, можем вывести общую формулу для произвольного правильного нечетноугольника и нечетных степеней:

$$\sin^k\alpha-\sin^k(\alpha+\frac{\pi}{2n+1})+...+(-1)^n\sin^k(\alpha+\frac{n\pi}{2n+1})+(-1)^{n+1}\sin^k(\alpha+\frac{(n+1)\pi}{2n+1})+...$$
$$...+(-1)^{2n}\sin^k(\alpha+\frac{2n\pi}{2n+1})=\sum_{l=0}^{2n}\sin^k(\alpha+\frac{l\pi}{2n+1})(-1)^l=\sum_{l=0}^{2n}e^{k(\alpha+\frac{l\pi}{2n+1})}(-1)^l-\sum_{l=0}^{2n}e^{-k(\alpha+\frac{l\pi}{2n+1})}(-1)^l=0,$$

где $k\in[1;n-2]$ и является нечетным.

1. Докажем данную формулу для первых степеней:

   (a) $k=1$:
   $$\sum_{l=0}^{2n}e^{(\alpha+\frac{l\pi}{2n+1})}(-1)^l-\sum_{l=0}^{2n}e^{-(\alpha+\frac{l\pi}{2n+1})}(-1)^l=\frac{-(-1)-1}{2n+1}$$

   (b) Первая сумма – геометрическая прогрессия: первый член $b_1=e^{i\alpha}$, знаменатель $-e^{\frac{i\pi}{2n+1}}$:
   $$\sum_{l=0}^{2n}e^{(\alpha+\frac{l\pi}{2n+1})}(-1)^l$$
   Тогда имеем:
   $$\sum_{l=0}^{2n}e^{(\alpha+\frac{l\pi}{2n+1})}(-1)^l=b_1(1+...+q^{2n})=b_1\frac{q^{2n+1}-1}{q-1}=0$$

   (c) Аналогично для второй суммы: первый член $b_1=e^{-i\alpha}$, знаменатель $-e^{\frac{i\pi}{2n+1}}$:
   $$\sum_{l=0}^{2n}e^{-(\alpha+\frac{l\pi}{2n+1})}(-1)^l,$$
   откуда
   $$\sum_{l=0}^{2n}e^{-(\alpha+\frac{l\pi}{2n+1})}(-1)^l=b_1(1+...+q^{2n})=b_1\frac{q^{2n+1}-1}{q-1}=0$$

   Следовательно, тождество доказано.

2. Для произвольной степени k все однозначно: *суммы для каждого слагаемого в отдельности будут такие же, только степень, в которую возводится е, домножится на k, но на значение выражения это не повлияет:* $e^{i\pi}=e^{ik\pi}=-1$.

5 Вывод

После завершения исследования, мы обнаружили, что результат уже был получен ранее (см. 3). Но мы смогли найти существенно другой и более простой подход к доказательству, использующий тригонометрическое тождество, которое представляет свой отдельный интерес:

$$\sin^k \alpha - \sin^k (\alpha + \frac{\pi}{2n+1}) + ... + (-1)^n \sin^k (\alpha + \frac{n\pi}{2n+1}) + (-1)^{n+1} \sin^k (\alpha + \frac{(n+1)\pi}{2n+1}) + ...$$
$$... + (-1)^{2n} \sin^k (\alpha + \frac{2n\pi}{2n+1}) = 0,$$

где $k \in [1; n-2]$ и является нечетным.

Эту же формулу можно записать и в экспоненциальном виде:

$$\sum_{l=0}^{2n} \sin^k (\alpha + \frac{l\pi}{2n+1})(-1)^l = \sum_{l=0}^{2n} e^{k(\alpha+\frac{l\pi}{2n+1})}(-1)^l - \sum_{l=0}^{2n} e^{-k(\alpha+\frac{l\pi}{2n+1})}(-1)^l = 0.$$

Список литературы

[1] Е. Бакаев «Обобщение теоремы Помпею» // Квант/ Математический кружок. 2017. №1. с. 39-42

[2] Mamuka Meskhishvili «New sense of circle» / 2019

[3] John D. Smith Ptolemaic Inequlities // Geometriae Dedicata. 1996. No61. c. 181-190

6 Гипотеза 1

Дана окружность и точка M внутри нее. Рассмотрим точки A_1, $A_2 \ldots A_{2n}$ на окружности (расположенные именно в таком порядке) такие, что $\angle A_i M A_{i+1} = \frac{\pi}{n}$ (индексы рассматриваются по модулю $2n$). Тогда знакопеременная сумма

$$MA_1^k - MA_2^k + MA_3^k - ... + MA_{2n-1}^k - MA_{2n}^k = 0,$$

где k принимает все значения меньшие n, имеющие ту же четность, что и n.

7 Гипотеза 2

Дана окружность и точка M внутри нее. Рассмотрим точки A_1, $A_2 \ldots A_{4n}$ на окружности (расположенные именно в таком порядке) такие, что $\angle A_1 M A_{i+1} = \frac{\pi}{2n}$ (индексы рассматриваются по модулю $4n$). Обозначим через S_i площадь криволинейного треугольника, ограниченного отрезками MA_i, MA_{i+1} и дугой $A_i A_{i+1}$. Тогда знакопеременная сумма

$$S_1^k - S_2^k + S_3^k - ... + S_{4n-1}^k - S_{4n}^k = 0,$$

где k принимает все значения от 1 до $n - 1$.