В данной работе мы рассмотрим решение задачи 11.4 с олимпиады "Высшая Проба" 2019–2020, использующее проективное движение и метод "От противного" , встречающийся в планиметрии довольно редко.

Проективное движение

Определение 1. *Проективная плоскость.* Проективной плоскостью $\mathbb{RP}^2$ мы будем называть обычную плоскость, дополненную бесконечно удаленными точками, в каждой из которых пересекается свой класс параллельных прямых. Таким образом, на каждой прямой появляется новая бесконечно удаленная точка, общая для всех параллельных между собой прямых. Все бесконечно удаленные точки образуют бесконечно удаленную прямую. Прямая, дополненная бесконечно удаленной точкой, называется проективной.

Определение 2. *Двойное отношение четверки точек на проективной прямой.* Пусть точки A, B, C, D лежат на проективной прямой l. Двойным отношением точек $(A,\ B;\ C,\ D)$ на прямой l будем называть величину

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$$

Будем считать, что бесконечно удаленная точка делит любой отрезок в отношении $1:1$.

Определение 3. *Пучок прямых.* Пучком прямых $\mathcal{L}_A$ точки A будем называть множество всех прямых, проходящих через точку A.

Определение 4. *Двойное отношение прямых в пучке* Пусть прямые a, b, c, d проходят через точку O. Выберем произвольным образом на этих прямых направляющие векторы $\vec{v}_a$, $\vec{v}_b$, $\vec{v}_c$, $\vec{v}_b$

Двойным отношением прямых $(a,\ b;\ c,\ d)$ будем называть величину

$$\frac{\sin\angle(\vec{v}_c,\vec{v}_a)}{\sin\angle(\vec{v}_d,\vec{v}_a)} : \frac{\sin\angle(\vec{v}_c,\vec{v}_b)}{\sin\angle(\vec{v}_d,\vec{v}_b)}$$

Определение 5. *Двойное отношение точек на окружности.* Пусть точки A, B, C, D лежат на окружности Ω. Отметим еще одну точку O на окружности. Двойным отношением на окружности Ω точек $(A,\ B;\ C,\ D)$ будем называть двойное отношение прямых $(OA,\ OB;\ OC,\ OD)$. Корректность определения следует из того, что величина вписанного угла постоянна.

Определение 6. *Гомография.* Будем называть отображение $\mathcal{F}$ проективным (или гомографией), если верно равенство. $(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B); \mathcal{F}(C), \mathcal{F}(D)) = (A, B; C, D)$. Отображение может действовать между прямыми, пучками и кониками(см. Определение 1.7).

Определение 7. Назовём *конику* образом окружности при гомографии. Вырожденной коникой будем называть 2 прямые на плоскости.

Определение 8. Двойное отношение четырех точек на конике. Пусть A, B, C, D — точки на конике Ω, а S — еще одна точка на ней же. Будем называть двойным отношением четверки точек $(A, B; C, D)$ на конике двойное отношение четверки прямых $(SA, SB; SC, SD)$.

Но двойное отношение дожно быть одинаковым вне зависимости от того, какую точку S мы выбрали. Определение всё-таки корректно, поскольку можно рассмотреть гомографию(которая сохраняет двойные отношения по определению), переводящую конику в окружность, а на окружности такое определение корректно.

Определение 9. ***Проективное движение.*** Зафиксируем некоторую проективную прямую $\mathcal{T}$. Будем говорить, что переменная точка A движется по проективной пря- мой или конике ℓ проективно, если существует проективное отображение $\mathcal{F}$: $\mathcal{T} \to \ell$ такое, что $A = \mathcal{F}(t \in \mathcal{T})$. Прямая $\mathcal{T}$ играет роль параметра времени.

Определение 10. *Проективно вращающаяся прямая.* Будем говорить, что переменная прямая ℓ вращается в пучке $\mathcal{L}$ проективно, если существует проективное отображение $\mathcal{T} \to \mathcal{L}$ такое, что $\ell = \mathcal{F}(t \in \mathcal{T})$.

Лемма 1. Пусть A, B, C лежат на одной прямой или конике ℓ, и $k \in \mathbb{R}$, тогда существует единственная точка $D \in \ell$ такая, что $(A, B; C, D) = k$.

Лемма 2 Пусть точки A и B проективно движутся по прямой или конике ℓ. Тогда, если точки совпали 3 раза, то они совпадают всегда.

Лемма 3 Точка пересечения двух проективно движущихся прямых проективно движется по некоторой конике, и при чём вырожденной если, и только если, прямые совпадают друг с другом в одном из положений.

Задача

Пусть $ABCD$ — квадрат. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах BC и CD. Прямые AP и AQ пересекают BD в точках M и N соответственно, а прямые PN и MQ пересекаются в точке H. Доказать, что $AH \perp PQ$ тогда и только тогда, когда точки P, Q, N, M лежат на одной окружности.

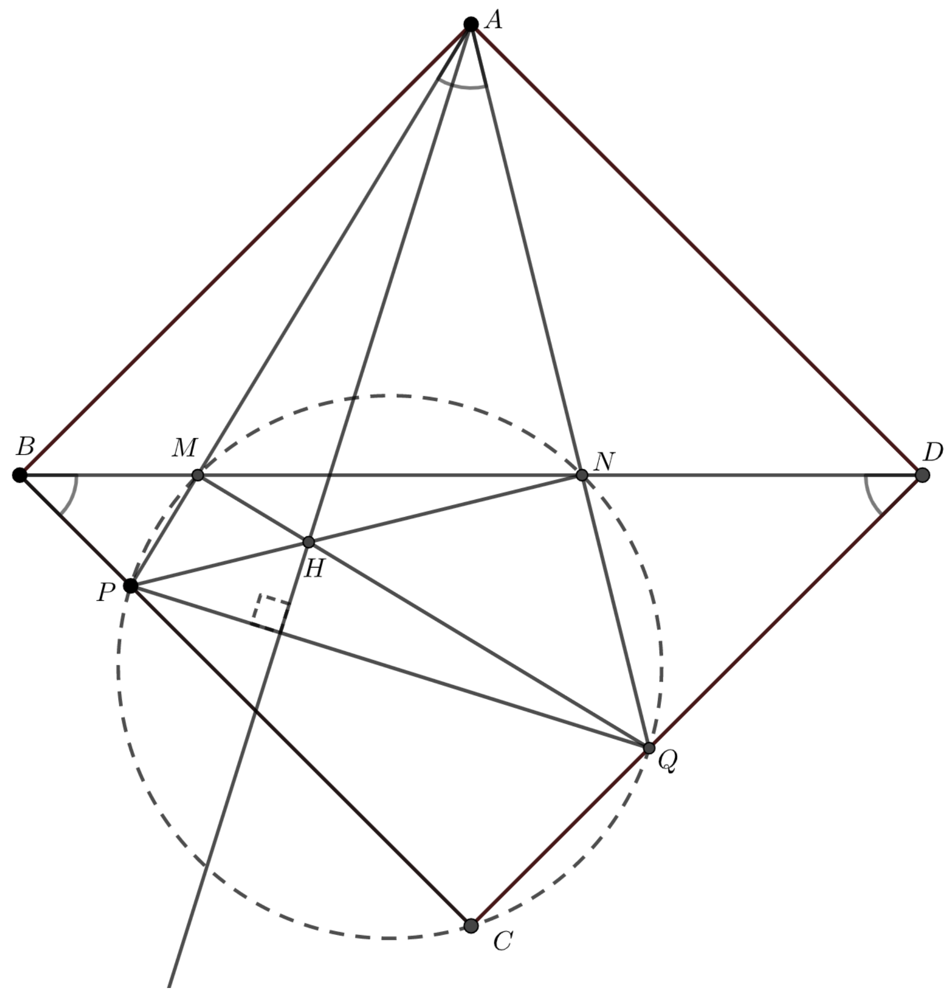

Рис. 1: Задача

Решение

Часть 1

Для определённости положим, что квадрат $ABCD$ ориентирован против часовой стрелки.

Пусть P, Q, N, M лежат на одной окружности, покажем тогда перпендикулярность AH и PQ.

Если $PQ \| MN$, то задача тривиальна. И правда: это значит, что $PQ \| BD$, поэтому конструкция симметрична относительно AC, следовательно H лежит на AC, таким образом $AH \perp PQ$ равносильно $AC \perp BD$, что очевидно. Пусть теперь Q не совпадает с точкой, симметричной P относительно AC — P'. Тогда:

$$\measuredangle AQP = \measuredangle NQP = \measuredangle NMP = \measuredangle P'PM = \measuredangle AP'P$$

Таким образом четырёхугольник $APQP'$ вписанный. При этом $AP = AP'$, поэтому QA — биссектриса(возможно внешняя) $\angle PQP'$, таким образом: QA — внешняя биссектриса $\angle PQC$. Также точка A лежит на биссектрисе $\angle PCQ$ — диагонали AC. Следовательно, A — центр вневписанной окружности $\triangle PCQ$, так что мы можем вычислсить $\measuredangle PAQ$:

$$\measuredangle PAQ = 45^\circ = \measuredangle PAN = \measuredangle PBN$$

Следовательно четырёхугольник $PBAN$ вписанный. При этом $\measuredangle ABP = 90^\circ$, таким образом и $\measuredangle ANP = 90^\circ$, то есть PN — высота в $\triangle PAQ$. Аналогично QM — высота в этом же треугольнике. Получили, что H — ортоцентр $\triangle PAQ$, следовательно $AH \perp PQ$. Что и требовалось доказать.

Часть 2

Пусть теперь AH и PQ перпендикулярны. Покажем тогда P, Q, N, M лежат на одной окружности.

Если $PQ \| MN$, то задача тривиальна: в таком случае $PQNM$ — равнобокая трапеция — вписанный четырёхугольник. Пусть теперь PQ и MN не параллельны. Тогда надо проверить, что $\measuredangle PAQ = 45^\circ$. И правда: вписанность $PQNM$ равносильна вписанности $APQP'$, где P' — точка, симметричная P относительно AC. То есть существуют всего две точки Q, когда $PQNM$ вписанный, где точки P и M фиксированы, — точки пересечения окружности (APP') с CD. Предположим противное, что $\measuredangle PAQ! = 45^\circ$. Верно, что хоть одна из прямых AP, AQ не образует с AC угол $22,5^\circ$, иначе прямая PQ была бы параллельна BD. Скавжем, AP не образует угол $22,5^\circ$ с AC. Зафиксируем квадрат $ABCD$ и точки P, M. Рассмотрим проективное движение точки Q по прямой CD, точка N тоже движется проективно по BD. Тогда точка пересечения PN и MQ — H — движется по некоторой конике как точка пересечения двух проектвно движущихся прямых(см. Лемму 1.3). Но когда $N = M$, $Q = AP \cap CD$, то есть прямой PM в пучке P соответствует прямая MP в пучке M, а значит, H, на самом деле, проективно движется по некой прямой l(и H вырождаеся в прямую, когда $M = N$, но в этом случае определим H как $l \cap AP$). Таким образом прямые AH и PQ движутся проективно, и существуют 3 положения, когда прямые перпендикулярны: 2 когда $PQMN$ вписанный, и ещё одно — изначальное. Положения не склеиваются так как AP не образует угол $22,5^\circ$ с AC, и потому что в исходном положении $PQMN$ — не вписанный.

Если две проективно движущиеся прямые перпендикулярны в трёх положениях, то они перпендикулярны всегда. Но очевидно, что это неверно: скажем, когда $Q = D$ – $Q = N = H = D$. И $PQ(PD)$ не перпендикулярна $AH(AD)$, так как $P! = C$. Следовательно предположение неверно! Таким образом, четырёхугольник $PQMN$ вписанный. Что и требовалось доказать.