В данной работе мы рассмотрим решение задачи 11.4 с олимпиады "Высшая Проба" 2019–2020, использующее проективное движение и метод "От противного" , встречающийся в планиметрии довольно редко.

Проективное движение

Определение 1. *Проективная плоскость.* Будем пользоваться определением и комментариимя, которые даются в [1] стр. 155–160.

Определение 2. *Двойное отношение четверки точек на проективной прямой.* Будем пользоваться определением и комментариями, которые даются в [2] стр. 212–216.

Определение 3. *Пучок прямых.* Пучком прямых $\mathcal{L}_A$ точки A будем называть множество всех прямых, проходящих через точку A.

Определение 4. *Двойное отношение прямых в пучке на плоскости* Пусть прямые a, b, c, d проходят через точку O. Выберем произвольным образом на этих прямых направляющие векторы $\vec{v}_a$, $\vec{v}_b$, $\vec{v}_c$, $\vec{v}_b$

Двойным отношением прямых $(a,\ b;\ c,\ d)$ будем называть величину

$$\frac{\sin\angle(\vec{v}_c,\vec{v}_a)}{\sin\angle(\vec{v}_d,\vec{v}_a)} : \frac{\sin\angle(\vec{v}_c,\vec{v}_b)}{\sin\angle(\vec{v}_d,\vec{v}_b)}$$

Определение 5. *Двойное отношение точек на окружности.* Пусть точки A, B, C, D лежат на окружности Ω. Отметим еще одну точку S на окружности. Двойным отношением на окружности Ω точек $(A,\ B;\ C,\ D)$ будем называть двойное отношение прямых $(SA,\ SB;\ SC,\ SD)$. Корректность определения следует из того, что величина вписанного угла постоянна.

Определение 6. *Коника.* Будем пользоваться определением, которое даётся в [3] стр. 20–22.

Определение 7. *Двойное отношение четырех точек на конике.* Пусть A, B, C, D — точки на конике Ω, а S — еще одна точка на ней же. Будем называть двойным отношением четверки точек $(A,B;C,D)$ на конике двойное отношение четверки прямых $(SA,SB;SC,SD)$.

Так как все коники проективно эквивалентны и определение двойного отношения точек на окружности корректно, аналогичное определение двойного отношения на конике корректно(см. [3], стр. 32-34, 67).

Определение 8. *Гомография.* Будем называть отображение $\mathcal{F}$ проективным (или гомографией), если верно равенство. $(\mathcal{F}(A),\mathcal{F}(B);\mathcal{F}(C),\mathcal{F}(D)) = (A,B;C,D)$. Отображение может действовать между прямыми, пучками и кониками.

Определение 9. ***Проективное движение.*** Зафиксируем некоторую проективную прямую $\mathcal{T}$. Будем говорить, что переменная точка A движется по проективной прямой или конике ℓ проективно, если существует проективное отображение $\mathcal{F}$: $\mathcal{T} \to \ell$ такое, что $A = \mathcal{F}(t \in \mathcal{T})$. Прямая $\mathcal{T}$ играет роль параметра времени.

Определение 10. *Проективно вращающаяся прямая.* Будем говорить, что переменная прямая ℓ вращается в пучке $\mathcal{L}$ проективно, если существует проективное отображение $\mathcal{F} : \mathcal{T} \to \mathcal{L}$ такое, что $\ell = \mathcal{F}(t \in \mathcal{T})$.

Лемма 1. Пусть A, B, C лежат на одной прямой или конике ℓ, и $k \in \mathbb{R}$, тогда существует единственная точка $D \in \ell$ такая, что $(A, B; C, D) = k$.

С доказательством можно ознакомиться, например, в [2], стр. 218

Лемма 2. Пусть точки A и B проективно движутся по прямой или конике ℓ. Тогда, если точки совпали 3 раза, то они совпадают всегда.

Доказательство. Пусть точки совпали в моменты времени T_1, T_2, T_3 в положениях X, Y, Z. Тогда для любого моента времени T $(X, Y; Z; A(T)) = (T_1, T_2; T_3, T) = (X, Y; Z; B(T))$, следовательно, из леммы 1, $A(T) = B(T)$. Что и требовалось.

Лемма 3. Пусть между пучками прямых $\mathcal{L}_A$ и $\mathcal{L}_B$, $A \neq B$, существует проективное соответствие $\mathcal{F}$. Тогда ГМТ $X = \ell \cap \mathcal{F}, \ell \in \mathcal{L}_A$ — есть коника, вырождающаяся в пару прямых если, и только если, $AB = \mathcal{F}(AB)$.

Скажем, в тексте [4] коника определяется как такое ГМТ, и в нём же показывается, что для него в невырожденном случае верно условие теоремы Паскаля, что означает эквивалентность этого определения и определения 6(смотрите [3], стр. 67–68 — «Обратная теорема Паскаля»

Задача

Пусть $ABCD$ — квадрат. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах BC и CD. Прямые AP и AQ пересекают BD в точках M и N соответственно, а прямые PN и MQ пересекаются в точке H. Доказать, что $AH \perp PQ$ тогда и только тогда, когда точки P, Q, N, M лежат на одной окружности.

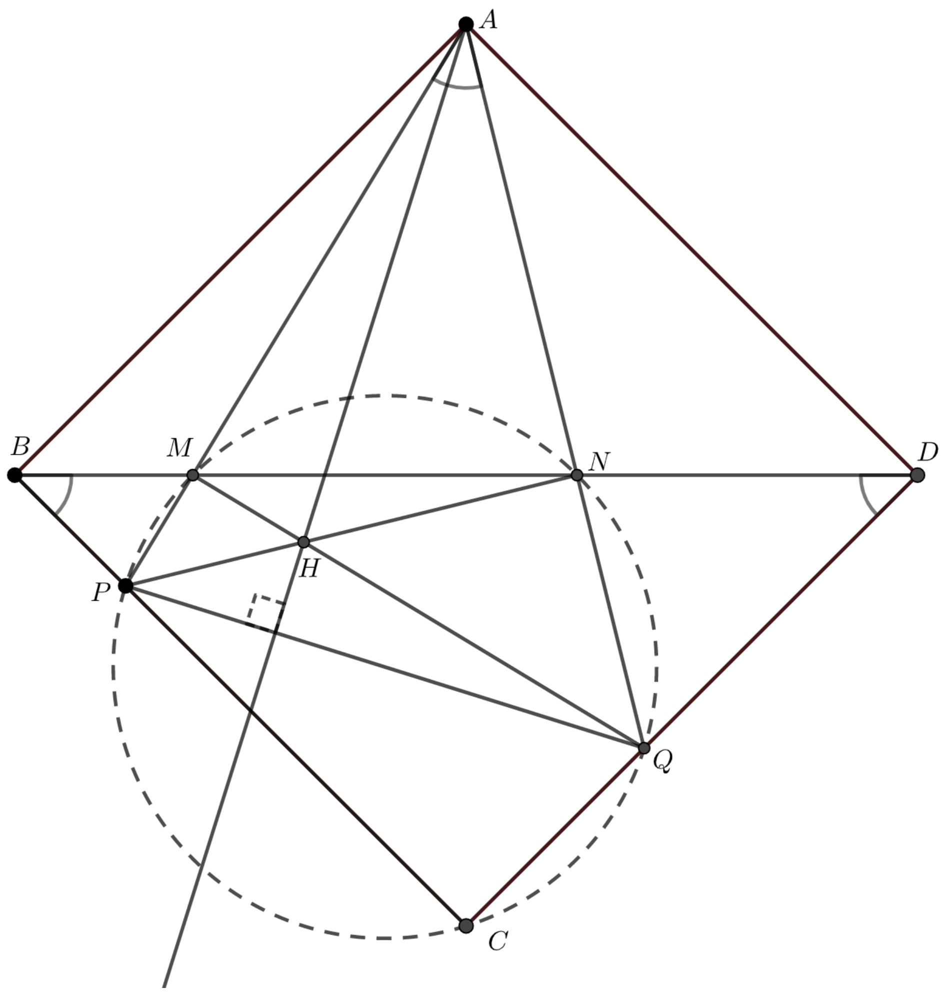

Рис. 1: Задача

Решение

Часть 1

Для определённости положим, что квадрат $ABCD$ ориентирован против часовой стрелки.

Пусть P, Q, N, M лежат на одной окружности, покажем тогда перпендикулярность AH и PQ.

Если $PQ \| MN$, то задача тривиальна. И правда: это значит, что $PQ \| BD$, поэтому конструкция симметрична относительно AC, следовательно H лежит на AC, таким образом $AH \perp PQ$ равносильно $AC \perp BD$, что очевидно. Пусть теперь Q не совпадает с точкой, симметричной P относительно AC — P'. Тогда:

$$\measuredangle AQP = \measuredangle NQP = \measuredangle NMP = \measuredangle P'PM = \measuredangle AP'P$$

Таким образом четырёхугольник $APQP'$ вписанный. При этом $AP = AP'$, поэтому QA — биссектриса(возможно внешняя) $\angle PQP'$, таким образом: QA — внешняя биссектриса $\angle PQC$. Также точка A лежит на биссектрисе $\angle PCQ$ — диагонали AC. Следовательно, A — центр вневписанной окружности $\triangle PCQ$, так что мы можем вычислсить $\measuredangle PAQ$:

$$\measuredangle PAQ = 45^\circ = \measuredangle PAN = \measuredangle PBN$$

Следовательно четырёхугольник $PBAN$ вписанный. При этом $\measuredangle ABP = 90^\circ$, таким образом и $\measuredangle ANP = 90^\circ$, то есть PN — высота в $\triangle PAQ$. Аналогично QM — высота в этом же треугольнике. Получили, что H — ортоцентр $\triangle PAQ$, следовательно $AH \perp PQ$. Что и требовалось доказать.

Часть 2

Пусть теперь AH и PQ перпендикулярны. Покажем тогда P, Q, N, M лежат на одной окружности.

Если $PQ \| MN$, то задача тривиальна: в таком случае $PQNM$ — равнобокая трапеция — вписанный четырёхугольник. Пусть теперь PQ и MN не параллельны. Тогда надо проверить, что $\measuredangle PAQ = 45^\circ$. И правда: вписанность $PQNM$ равносильна вписанности $APQP'$, где P' — точка, симметричная P относительно AC. То есть существуют всего две точки Q, когда $PQNM$ вписанный, где точки P и M фиксированы, — точки пересечения окружности (APP') с CD. Предположим противное: пусть $\measuredangle PAQ \neq 45^\circ$. Верно, что хоть одна из прямых AP, AQ не образует с AC угол $22,5^\circ$, иначе прямая PQ была бы параллельна BD. Скажем, AP не образует угол $22,5^\circ$ с AC. Зафиксируем квадрат $ABCD$ и точки P, M. Рассмотрим проективное движение точки Q по прямой CD, точка N тоже движется проективно по BD. Тогда точка пересечения PN и MQ — H — движется по некоторой конике как точка пересечения двух проектвно движущихся прямых(см. Лемму 1.3). Но когда $N = M$, $Q = AP \cap CD$, то есть прямой PM в пучке P соответствует прямая MP в пучке M, а значит, H, на самом деле, проективно движется по некой прямой l(и H вырождаеся в прямую, когда $M = N$, но в этом случае определим H как $l \cap AP$). Таким образом прямые AH и PQ движутся проективно, и существуют 3 положения, когда прямые перпендикулярны: 2 когда $PQMN$ вписанный, и ещё одно — изначальное. Положения не склеиваются так как AP не образует угол $22,5^\circ$ с AC, и потому что в исходном положении $PQMN$ — не вписанный.

Если две проективно движущиеся прямые перпендикулярны в трёх положениях, то они перпендикулярны всегда, значит AH и PQ всегда должны быть перпендикулярны, но, очевидно, это неверно: скажем, когда $Q = D$ — $Q = N = H = D$. И

$PQ(PD)$ не перпендикулярна $AH(AD)$, так как $P \neq C$. Следовательно предположение неверно! Таким образом, четырёхугольник $PQMN$ вписанный. Что и требовалось доказать.

Список литературы

[1] Понарин Я. П. — «Афинная и проективная геометрия».

[2] Р. Курант, Г. Роббинс. — «Что такое математика».

[3] Заславский А. А. и Акопян А. В. — «Геометрические свойства кривых второго порядка».

[4] И. В. Артамкин, А. С. Тихомиров — Семинар 2. Коники на проективной плоскости. НИУ ВШЭ 24.11.2015