В данной работе мы рассмотрим задачу 11.4 с олимпиады "Высшая Проба" 2019–2020.

Утверждение

Пусть $ABCD$ — квадрат. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах BC и CD. Прямые AP и AQ пересекают BD в точках M и N соответственно, а прямые PN и MQ пересекаются в точке H. Прямые AH и PQ перпендикулярны тогда и только тогда, когда точки P, Q, N, M лежат на одной окружности.

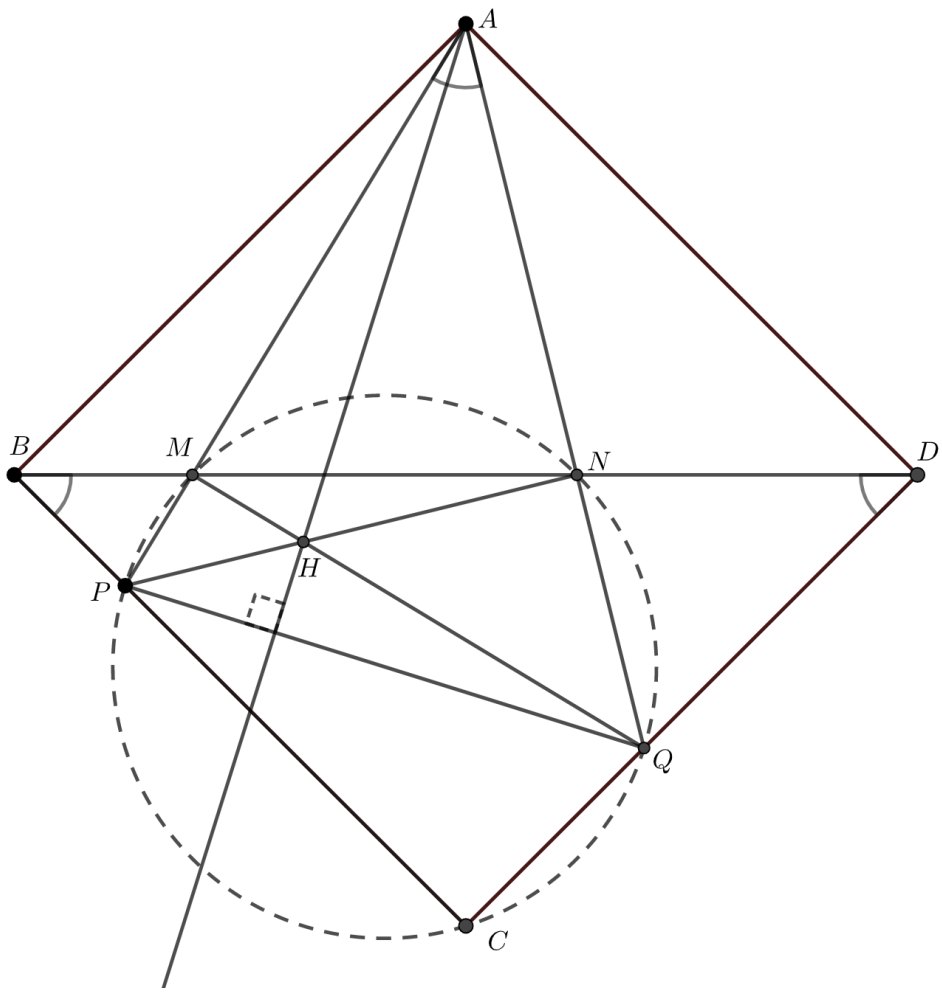

Рис. 1: Утверждение

Приведём строгое доказательство части «тогда», а утверждение в обратную сторону оставим гипотезой.

Доказательство части «тогда»

Пусть P, Q, N, M лежат на одной окружности, покажем тогда перпендикулярность AH и PQ.

Пусть $PQ \| MN$, тогда $PQ \| BD$. Поэтому MQ и PN симметричны относительно AC. Следовательно H лежит на AC. Из этого и $AC \perp BD$ следует, что $AH \perp PQ$.

Пусть теперь PQ не параллельна MN. Это значит, что Q не совпадает с точкой P', симметричной P относительно AC. Не умаляя общности положим, что квадрат $ABCD$ ориентирован против часовой стрелки. Тогда

$$\measuredangle AQP = \measuredangle NQP = \measuredangle NMP = \measuredangle P'PM = \measuredangle AP'P.$$

Таким образом четырёхугольник $APQP'$ вписанный. При этом $AP = AP'$, поэтому QA — биссектриса (возможно внешняя) угла $\angle PQP'$. То есть QA — внешняя биссектриса угла $\angle PQC$. Также точка A лежит на диагонали AC, которая является биссектрисой угла $\angle PCQ$. Поэтому A — центр вневписанной окружности треугольника $\triangle PCQ$, лежащей против прямого угла — угла $\angle PCQ$. Тогда $\measuredangle PAQ = 45°$. Имеем

$$\measuredangle PAQ = 45° = \measuredangle PAN = \measuredangle PBN.$$

Поэтому четырёхугольник $PBAN$ вписанный.

При этом $\measuredangle ABP = 90°$. Таким образом $\measuredangle ANP = 90°$, то есть PN — высота в $\triangle PAQ$. Аналогично, QM — высота в этом же треугольнике. Следовательно, H — ортоцентр треугольника $\triangle PAQ$. Значит $AH \perp PQ$. $\square$