Линейная оценка на ранг $\binom{[m]}{3}$-матрицы

Старков Михаил

October 2022

1 Введение

В работе будет доказана линейная оценка на ранг $\binom{[m]}{3}$-матрицы.
Серия задач была представлена на ЛКТГ в проекте А. Б. Скопенкова "Минимизация ранга восполнением матриц". Приведем сначала необходимые формулировки.

5 Ранг матриц с соотношениями

Мы сокращаем $\{i\}$ до i. Назовём $\binom{[m]}{3}$-*матрицей* такую симметричную квадратную матрицу с элементами из $\mathbb{Z}_2$, строки и столбцы которой соответствуют всем 3-элементным подмножествам множества $[m]$, и для которой выполнены следующие свойства:

(тривиальность) $A_{P,Q} = 0$, если $P \cap Q = \varnothing$;

(линейная зависимость) для любых 4-элементного и 3-элементного подмножеств $F, P \subset [m]$

$$\sum_{i \in F} A_{F-i,P} = 0.$$

(нетривиальность) для любых $i \in [m]$ и 4-элементного подмножества $F \subset [m] - i$ выполнено $A_{F,i} = 1$, где

$$A_{F,i} := \sum_{\{X,Y\}\ :\ F \cup i = X \cup Y,\ |X|=|Y|=3,\ X \cap Y = i} A_{X,Y} = \sum_{\{\sigma,\tau\}\ :\ F = \sigma \sqcup \tau,\ |\sigma|=|\tau|=2} A_{i \sqcup \sigma, i \sqcup \tau}.$$

2 Вспомогательные утверждения

5.5. *(a) Пусть B — квадратная матрица размера $\binom{m-3}{3}$, полученная из $\binom{[m]}{3}$-матрицы A удалением строк и столбцов, соответствующих подмножествам, содержащим хотя бы один элемент множества $X := \{m, m-1, m-2\}$. Если $A_{X,X} = 1$, то $\operatorname{rk} A > \operatorname{rk} B$.*

(b) Пусть B — квадратная матрица, полученная из $\binom{[m]}{3}$-матрицы A удалением строк и столбцов, соответствующих подмножествам, содержащим хотя бы один элемент 3-элементных подмножеств $X, Y \subset [m]$. Если $A_{X,X} = A_{Y,Y} = 0$ и $A_{X,Y} = 1$, то $\operatorname{rk} A \geqslant \operatorname{rk} B + 2$.

Обозначим через r_m минимальный ранг $\binom{[m]}{3}$-матрицы. Обозначим через $\widetilde{r_m}$ минимальный ранг чётной $\binom{[m]}{3}$-матрицы. Очевидно, $r_m = \widetilde{r_m} = 0$ для $m \leqslant 4$, и $r_m \leqslant \widetilde{r_m}$. Нетривиальность означает, что $r_5, \widetilde{r}_5 \geqslant 1$. Теорема 5.1 утверждает, что $r_m \geqslant \dfrac{m-4}{3}$ и $\widetilde{r_m} \geqslant \dfrac{2(m-4)}{5}$.

5.6. *(a,b) Найдите r_5, r_6 и $\widetilde{r}_5, \widetilde{r}_6, \widetilde{r}_7$.*

(c) Обе последовательности $r_m, \widetilde{r_m}$ не убывают.

Предложение 5.7. *(a) $r_m \geqslant \min\{r_{m-3} + 1, \widetilde{r_m}\}$ (точнее, либо $r_m = \widetilde{r_m}$, либо $r_m \geqslant r_{m-3} + 1$);*

(b) $\widetilde{r_m} \geqslant \widetilde{r_{m-5}} + 2$.

Докажем пункты 5.5 и предложение 5.7.

3 Доказательства вспомогательных утверждений

5.5.

а). Рассмотрим в матрице A наибольшую невырожденную квадратную подматрицу C матрицы B. Ее размер - rk B. Обозначим столбцы матрицы C через $c_1, c_2, ..., c_{rkB}$.

Покажем, что подматрица матрицы A, образованная столбцом и строкой, соответствующими трехэлементному подмножеству X, а также матрицей C, является невырожденной. Отсюда сразу последует, что rk $A \geq$ rk $B + 1$.

Рассмотрим матрицу, образованную столбцом и строкой, соответствующими трехэлементному подмножеству X, а также матрицей C.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & c_{11} & c_{12} & . & . & . & c_{1rkB} \\ 0 & c_{21} & c_{22} & . & . & . & c_{2rkB} \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ 0 & c_{rkB1} & c_{rkB2} & . & . & . & c_{rkBrkB} \end{pmatrix}$$

Так как матрица B получена из матрицы A выкидыванием столбцов и строк, соответствующих трехэлементным множествам, пересекающимися с X, то на пересечении столбца, соответствующего X и строки, соответствующей матрице C стоит 0, ведь C - подматрица B. Аналогично на пересечении строки, соответствующей X и столбца, соответствующего матрице C стоит 0.

Но тогда определитель рассмотренной матрицы равен $\det C \neq 0$. Тогда полученная матрица невырожденна, и, значит, rk $A \geq$ rk $B + 1$.

b). Рассмотрим в матрице A наибольшую невырожденную квадратную подматрицу C матрицы B. Ее размер - rk B.

Покажем, что подматрица матрицы A, образованная столбцами и строками, соответствующими трехэлементным множествам X, Y, а также матрицей C является невырожденной.
Отсюда последует, что rk $A \geq$ rk $B + 2$.

Рассмотрим матрицу, образованную столбцами и строквами, соответствующими трехэлементным подмножествам X, Y, а также матрицей C.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & . & . & . & c_{1rkB} \\ 0 & 0 & c_{21} & c_{22} & . & . & . & c_{2rkB} \\ . & . & . & . & & & & . \\ . & . & . & . & & & & . \\ . & . & . & . & & & & . \\ 0 & 0 & c_{rkB1} & c_{rkB2} & . & . & . & c_{rkBrkB} \end{pmatrix}$$

Так как матрица B получена из матрицы A выкидыванием столбцов и строк, соответствующих трехэлементным множествам, пересекающимися с X или Y, то на пересечении столбца, соответствующего X или Y и строки, соответствующей матрице C стоит 0, ведь C - подматрица B, а B состоит из строк и столбцов, соответствующих трехэлементным подмножествам, не пересекающимся с A. Аналогично на пересечении строки, соответствующей X или Y и столбца, соответствующего матрице C стоит 0.
Но тогда определитель рассмотренной матрицы равен $\det C \neq 0$. Тогда полученная матрица невырожденна, и, значит, rk $A \geq$ rk $B + 2$.

Предложение 5.7.

Так как всякая $\binom{[m]}{3}$ - матрица содержит $\binom{[m-1]}{3}$ - матрицу, то минимальный ранг $\binom{[m]}{3}$ - матрицы не меньше минимального ранга $\binom{[m-1]}{3}$ - матрицы. Тогда последовательности r_m и $\widetilde{r_m}$ нестрого возрастают. Также очевидно, что $\widetilde{r_m} \geq r_m$.

a). Рассмотрим $\binom{[m]}{3}$-матрицу A минимально ранга. Если A четная, то $r_m = \widetilde{r_m}$. Иначе найдется трехэлементное подмножество X, такое, что $A_{X,X} = 1$. Рассмотрим $\binom{[m-3]}{3}$-матрицу B, образованную выкидыванием из A строк и столбцов, соответствующих множествам, пересекающимся с X.
По 5.5. получаем
$r_m = \text{rk } A \geq \text{rk } B + 1 \geq r_{m-3} + 1$.

b). Рассмотрим четную $\binom{[m]}{3}$-матрицу A минимального ранга. В силу нетривиальности, найдется два множества X, Y, такие, что $|X| = |Y| = 3$, $X \cap Y = 1$ и $A_{X,Y} = 1$. Тогда так как матрица A симметрична и четна, то $A_{X,X} = 0$, $A_{Y,Y} = 0$, $A_{Y,X} = 0$. Рассмотрим $\binom{[m-5]}{3}$-матрицу B, полученную из A выкиыванием всех строк и столбцов, соответствующих трехэлементным подмножествам, пересекающимся с X или Y.
По 5.5. получаем
$\widetilde{r_m} = \text{rk } A \geq \text{rk } B + 2 \geq \widetilde{r_{m-5}} + 2$.

4 Доказательство линейной оценки

Докажем, наконец основное утверждение:

Теорема 5.1. *(a) Если A является $\binom{[m]}{3}$-матрицей, то* $\operatorname{rk} A \geqslant \dfrac{m-4}{3}$.

(b) Более того, если A чётна, то $\operatorname{rk} A \geqslant \dfrac{2(m-4)}{5}$.

Докажем индукцией по m, что $r_m \geq \dfrac{m-4}{3}$ и $\widetilde{r_m} \geq \dfrac{2(m-4)}{5}$:

Переход:

a). По доказанному ранее предложению 5.7. $r_m \geq r_{m-3} + 1$. По предположению индукции $r_{m-3} \geq \dfrac{m-7}{3}$. Тогда

$r_m \geq \dfrac{m-7}{3} + 1 = \dfrac{m-4}{3}$.

Переход доказан.

b). По предложению 5.7. $\widetilde{r_m} \geq \widetilde{r_{m-5}} + 2$. По предположению индукции $\widetilde{r_{m-5}} \geq \dfrac{2(m-9)}{5}$. Тогда

$\widetilde{r_m} \geq \dfrac{2(m-9)}{5} + 2 = \dfrac{2(m-4)}{5}$.

Переход доказан.

Для завершения доказательства остается проверить базу индукции.

Достаточно доказать, что утверждение пункта a верно при $m \leq 5$, и что утверждение пункта b верно при $m \leq 7$.

Заметим, что при $m \leq 6$ правые части в обоих неравенствах не превосходят единицы. Так как в силу нетривиальности любая $\binom{[m]}{3}$ матрица ненулевая, то ее ранг не меньше единицы.

Тогда достаточно доказать, что $\widetilde{r}_7 \geq 2$ В силу нетривиальности и симметричности, любая $\binom{[7]}{3}$-матрица содержит матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ как подматрицу. Так как такая матрица невырожденная, то ранг $\binom{[7]}{3}$-матрицы не меньше 2.

Таким образом, при всех $m \leq 5$ верно утверждение пункта a, и при всех $m \leq 7$ верно утверждение пункта b. Тогда база верна, а вместе с ней и линейная оценка на ранг.