Линейная оценка на ранг $\binom{[m]}{3}$-матрицы

Старков Михаил

1 Основной результат

В работе будет доказана линейная оценка на ранг матрицы, для элементов которой известны некоторые линейные соотношения (Теорема 1). Все утверждения, сформулированные и использованные в работе, заимствованы из [Sk+, §5]. Приведем сначала необходимые формулировки.

Здесь и далее $m \geqslant 3$ — произвольное целое. Обозначим через $[m]$ множество $\{1, 2, \ldots, m\}$. Мы сокращаем одноэлементное множество $\{i\}$ до i.

Назовём $\binom{[m]}{3}$-*матрицей* такую симметричную квадратную матрицу с элементами из $\mathbb{Z}_2$, строки и столбцы которой соответствуют всем 3-элементным подмножествам множества $[m]$ и для которой выполнены следующие свойства:

(*тривиальность*) $A_{P,Q} = 0$, если $P \cap Q = \varnothing$;

(*линейная зависимость*) для любых 4-элементного и 3-элементного подмножеств $F, P \subset [m]$

$$\sum_{i \in F} A_{F-i,P} = 0 \in \mathbb{Z}_2.$$

(*нетривиальность*) для любых $i \in [m]$ и 4-элементного подмножества $F \subset [m] - i$ выполнено $A_{F,i} = 1$, где

$$A_{F,i} := \sum_{\{X,Y\}\ :\ F \cup i = X \cup Y,\ |X|=|Y|=3,\ X \cap Y = i} A_{X,Y} = \sum_{\{\sigma,\tau\}\ :\ F = \sigma \sqcup \tau,\ |\sigma|=|\tau|=2} A_{i \sqcup \sigma, i \sqcup \tau} \in \mathbb{Z}_2.$$

Назовём $\binom{[m]}{3}$-матрицу *чётной*, если на её главной диагонали стоят нули, т.е. для любого 3-элементного подмножества $X \subset [m]$ выполнено $A_{X,X} = 0$.

Теорема 1. *(a) Если A является $\binom{[m]}{3}$-матрицей, то* $\operatorname{rk} A \geqslant \dfrac{m-4}{3}$.

(b) Более того, если A чётна, то $\operatorname{rk} A \geqslant \dfrac{2(m-4)}{5}$.

Список литературы

[Sk+] *А. Воропаев, Т. Гараев, С. Дженжер, О. Никитенко, А. Петухов, А. Скопенков*, Минимизация ранга восполнением матриц, 34-я Летняя конференция Международного математического Турнира городов. https://www.mccme.ru/circles/oim/netflix_rus.pdf