Обобщение Теоремы Кези

Алексей Суворов*

Введем обозначение: $\{F(i,j)\}_n$ - квадратная кососимметрическая матрица $\{a_{ij}\}$ порядка n, в которой $a_{ij} = F(i,j)$, где Функция F(i,j) кососимметрична, либо определена только для i<j. (тогда по известным коэффициентам однозначно восстанавливаются остальные)

*Далее рассматриваем многочлены и матрицы над полем комплексных чисел

Говорим, что точки A_1, A_2 ... A_n, лежащие на одной окружности, расположены по порядку, если отрезки A_1A_2,A_2A_3,... A_nA_1 не имеют точек пересечения кроме общих концов.

Птолемейный многочлен

N-Птолемейным многочленом называется однородный многочлен P от коэффициентов кососимметрической матрицы порядка N, для которого выполняются два свойства, где X_1 ... X_N - переменные:

1)для любых двух одночленов P_1 и P_2 одного многочлена P есть такое комплексное k, что $P_1(\{X_iX_j\}_N) = P_2(\{X_iX_j\}_N) \cdot k$.

2)$P(\{X_i - X_j\}_N) = 0$.

Тривиальные примеры таких многочленов:

1. $a_{12}a_{34} + a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24}$

2. $a_{14}a_{25}a_{36} + a_{15}a_{26}a_{34} + a_{16}a_{24}a_{35} - a_{16}a_{25}a_{34} - a_{15}a_{24}a_{36} - a_{14}a_{26}a_{35}$

Обобщенная теорема Кези Если N окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots \omega_n$ касаются некоторой окружности Ω внешним образом, и их точки касания A_1, A_2, ... A_n с Ω расположены на ней по порядку, то для любого N-птолемейного P() выполняется следующее равенство: $P(\{L_{ij}\}_N) = 0$, где L_{ij} - длина отрезка общей внешней касательной к окружностям ω_i и ω_j.(i<j).

P.S

*ГБОУ «Школа 2007, фмш», преподаватели Прокопенко Д.В и Буланкина В.В.

Если применить эту теорему к вершинам вписанного многоугольника, как к окружностям нулевого радиуса, получаем обобщенную теорему Птолемея.

Можно сформулировать более общее утверждение для произвольных гомотетичных коник и не только внешнего касания, но оно требует дополнительных определений.