Обобщение Теоремы Кези

Алексей Суворов[*]

Рассматриваем многочлены и матрицы над полем комплексных чисел, если не оговорено иное.

Говорим, что точки A_1, A_2 ... A_n, лежащие на одной окружности, расположены по порядку, если отрезки A_1A_2,A_2A_3,... A_nA_1 не имеют точек пересечения кроме общих концов.

N-Птолемейным многочленом называется однородный многочлен P от $\binom{n}{2}$ переменных a_{ij}, пронумерованных двумя индексами i < j от 1 до N, для которого выполняются следующие два свойства. Далее $P(\{f_{ij}\})$ обозначает результат подстановки в P многочленов X_1,...X_n.

1. для любых двух одночленов P_1 и P_2 многочлена P есть такое комплексное k, что $P_1(\{X_iX_j\}) = P_2(\{X_iX_j\}) \cdot k$.
2. $P(\{X_i - X_j\}) = 0$.

Тривиальные примеры птолемейных многочленов:

1. N=4. $a_{12}a_{34} + a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24}$
2. N=6. $a_{14}a_{25}a_{36} + a_{15}a_{26}a_{34} + a_{16}a_{24}a_{35} - a_{16}a_{25}a_{34} - a_{15}a_{24}a_{36} - a_{14}a_{26}a_{35}$

Обобщенная теорема Кези Если N окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3....\omega_n$ касаются некоторой окружности Ω внешним образом, и их точки касания A_1, A_2, ... A_n с Ω расположены на ней по порядку, то для любого N-птолемейного P выполняется следующее равенство: $P(\{L_{ij}\}) = 0$, где L_{ij} - длина отрезка общей внешней касательной к окружностям ω_i и ω_j, и $1 \leq i < j \leq N$.

[*]ГБОУ «Школа 2007, фмш», преподаватели Прокопенко Д.В и Буланкина В.В.