Обобщение Теоремы Кези

Алексей Суворов*

Рассматриваем многочлены и матрицы над полем комплексных чисел, если не оговорено иное.

Говорим, что точки A_1, A_2 ... A_n, лежащие на одной окружности, расположены по порядку, если отрезки A_1A_2,A_2A_3,... A_nA_1 не имеют точек пересечения кроме общих концов.

N-Птолемейным многочленом называется однородный многочлен P от $\binom{n}{2}$ переменных a_{ij}, пронумерованных двумя индексами i < j от 1 до N, для которого выполняются следующие два свойства. Далее $P(\{f_{ij}\})$ обозначает результат подстановки в P многочленов f_ij, $1 \leq i, j \leq N$.

1. для любых двух одночленов P_1 и P_2 многочлена P есть такое комплексное k, что $P_1(\{X_iX_j\}) = P_2(\{X_iX_j\}) \cdot k$.
2. $P(\{X_i - X_j\}) = 0$.

Тривиальные примеры птолемейных многочленов:

1. N=4. $a_{12}a_{34} + a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24}$
2. N=6. $a_{14}a_{25}a_{36} + a_{15}a_{26}a_{34} + a_{16}a_{24}a_{35} - a_{16}a_{25}a_{34} - a_{15}a_{24}a_{36} - a_{14}a_{26}a_{35}$

Обобщенная теорема Кези Если N окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots \omega_n$ касаются некоторой окружности Ω внешним образом, и их точки касания A_1, A_2, ... A_n с Ω расположены на ней по порядку, то для любого N-птолемейного P выполняется следующее равенство: $P(\{L_{ij}\}) = 0$, где L_{ij} - длина отрезка общей внешней касательной к окружностям ω_i и ω_j, и $1 \leq i < j \leq N$.

*ГБОУ «Школа 2007, фмш», преподаватели Прокопенко Д.В и Буланкина В.В.

Доказательство

Рассмотрим выражение $Q(\{a_{ij}\}) = \prod_{1\le i,j\le N} a_{ij}^{b_{ij}}$, где b_{ij} – такие целые числа,что $\sum_{1\le j\le N} b_{ij} = 0$ для всех i и $b_{ij} = b_{ji}$ для $1 \le i, j \le N$.Также рассмотрим N окружностей A_1, A_2, ... , A_N.

N-ным отношением называется число $Q(\{A_iA_j\})$, где A_iA_j - общая внешняя касательная к A_i и A_j. Пусть A'_1,A'_2,...A'_N - образы A_1,A_2,...A_N при инверсии с центром O и радиусом R. Тогда

$$Q(\{A'_iA'_j\}) = Q(\{A_iA_j\})$$

.

Доказательство.

1. Лемма о длине инверсного отрезка. Пусть есть точки O,X,Y. X' и Y' - образы X и Y при инверсии с центром O и радиусом R. Тогда $X'Y' = XY \cdot \dfrac{R^2}{OX \cdot OY}$. Док-во: треугольники OXY и OY'X' подобны с коэффициентом $\dfrac{R^2}{OX \cdot OY}$ по двум сторонам и углу между ними.Это утверждение верно не только для точек плоскости, но и для окружностей.

2. Применим эту формулу к n-ному отношению после инверсии $Q(\{A'_iA'_j\}) = Q(\{A_iA_j \cdot \dfrac{R^2}{OA_i \cdot OA_j}\}) = Q(\{A_iA_j\}) \cdot Q(\{\dfrac{R^2}{OA_i \cdot OA_j}\}) = Q(\{A_iA_j\}) \cdot Q(\{\dfrac{R}{OA_i} \cdot \dfrac{R}{OA_j}\})$

3. $Q(\{x_ix_j\}) = \prod_{1\le i,j\le N}(x_ix_j)^{b_{ij}} = \prod_{1\le i\le N} x_i^{\sum_{1\le j\le N} b_{ij}} = \prod_{1\le i\le N} x_i^0 = 1$

4. $Q(\{\dfrac{R}{OA_i} \cdot \dfrac{R}{OA_j}\}) = 1$ по (c).

5. $Q(\{A'_iA'_j\}) = Q(\{A_iA_j\}) \cdot Q(\{\dfrac{R}{OA_i} \cdot \dfrac{R}{OA_j}\}) = Q(\{A_iA_j\}) \cdot 1 = Q(\{A_iA_j\})$

$$Q(\{A'_iA'_j\}) = Q(\{A_iA_j\})$$

□

Рассмотрим два одночлена P_1 и P_2 N-птолемейного многочлена P. Тогда $\dfrac{P_1(\{A_iA_j\})}{P_2(\{A_iA_j\})} = \dfrac{P_1(\{A'_iA'_j\})}{P_2(\{A'_iA'_j\})}$, т.к. $\dfrac{P_1(\{A_iA_j\})}{P_2(\{A_iA_j\})}$ - N-ное отношение по первому свойству птолемейного многочлена.

Доказательство теоремы

Доказательство. 1. Выберем произвольную точку O на Ω так,что O, A_1, A_2, ... A_n расположены на ней по порядку

2. Нам нужно для произвольного птолемейного многочлена P() доказать равенство $P(\{L_{ij}\}) = 0$.

3. Рассмотрим инверсию в точке O.

4. Отношения между одночленами в птолемейном многочлене $P(\{L_{ij}\})$ являются N-ными отношениями. Значит, при инверсии они не меняются. Т.о. значения всех одночленов изменятся в одно и то же количество раз. Пусть в k.

   Тогда $P(\{L_{ij}\}) = P(\{L'_{ij}\})/k$, где $k \in \mathbb{R}/\{0\}$

5. Заметим, что Ω после инверсии перейдёт в прямую.

6. Пусть A_1 ... A_n - точки касания этой прямой и образов соответствующих окружностей.

7. Пусть $X_k = A_n A_k$. Тогда $L'_{ij} = A_i A_j = A_n A_i - A_n A_j = X_i - X_j$. $P(\{L_{ij}\}) = P(\{L'_{ij}\})/k = P(\{X_i - X_j\})/k = 0/k = 0$

$$P(\{L_{ij}\}) = 0$$

   Ч.Т.Д.

□