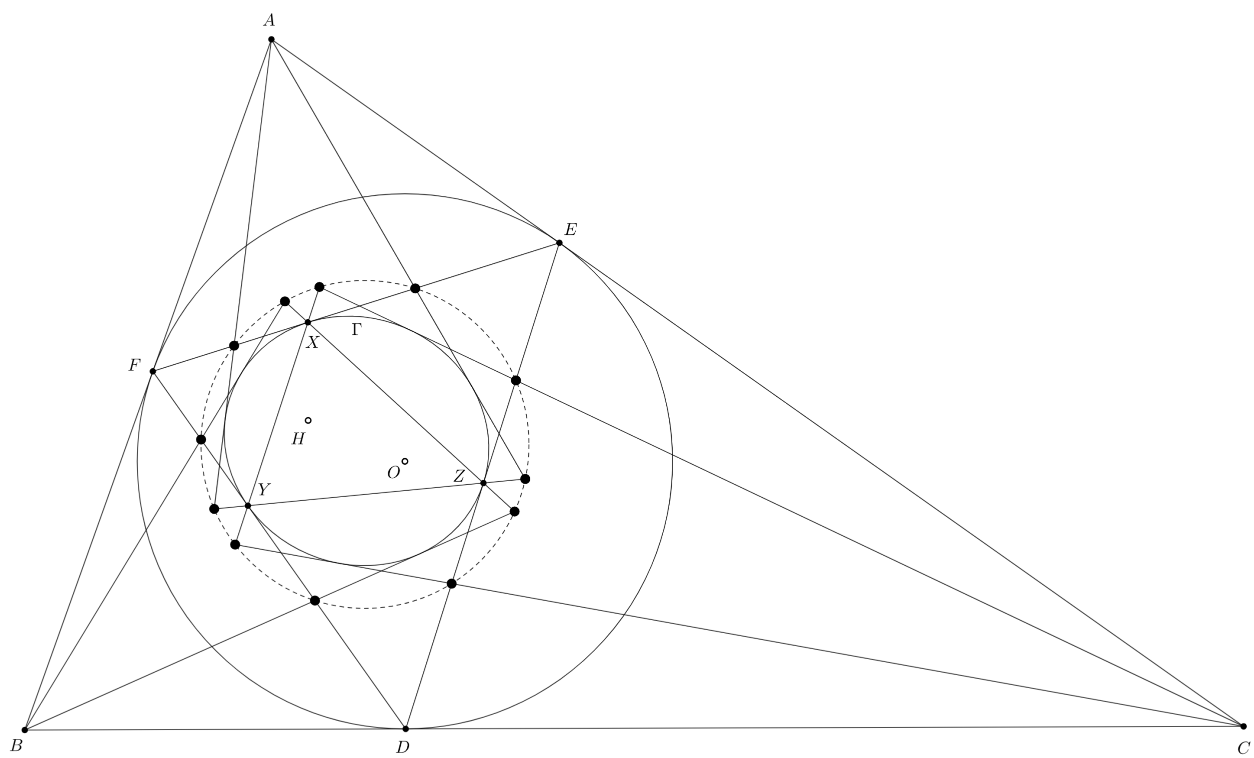
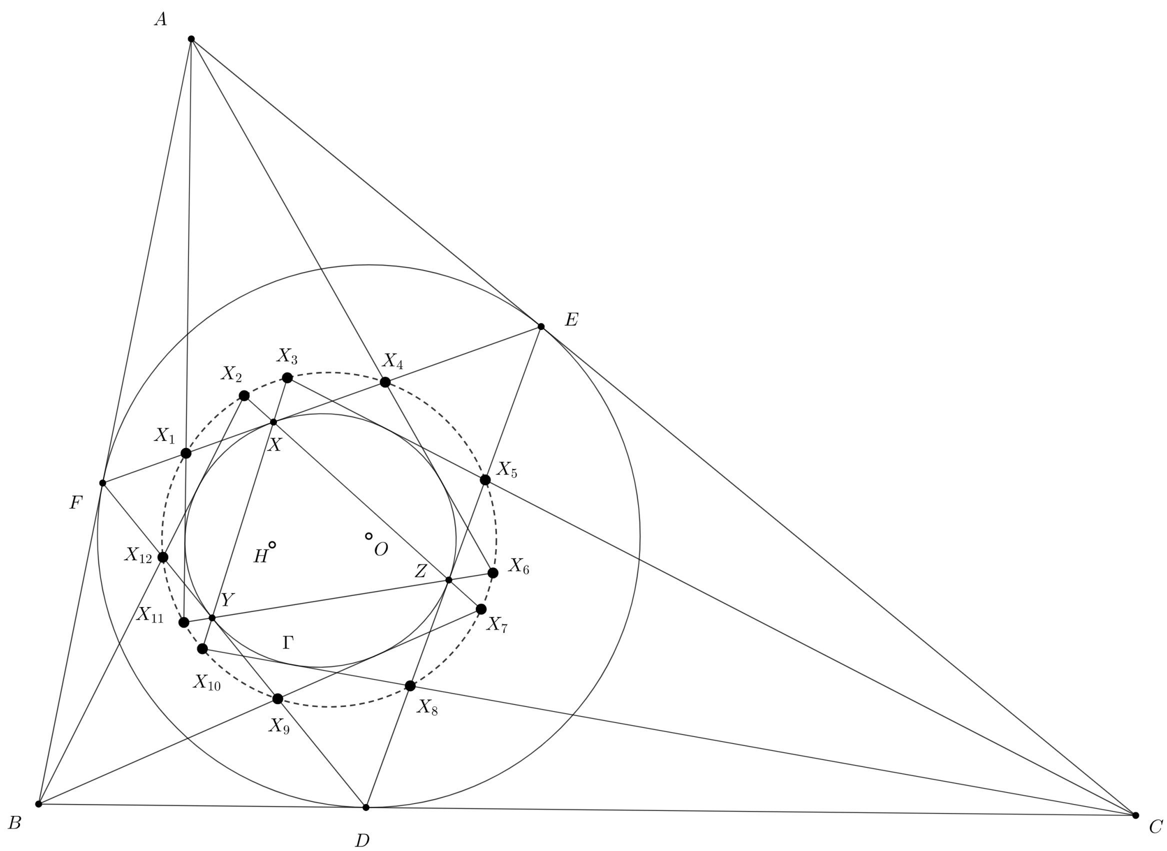
12(18) точек на одной окружности и касательные к эллипсу Макбита

Кирилл Бельский

Гипотеза:
Вписанная окружность треугольника $\triangle ABC$ касается сторон BC, AC, AB в точках D, E, F соответственно. Точки O, H центр описанной окружности и ортоцентр треугольника $\triangle DEF$ соответственно. Эллипс Γ с фокусами O, H касается сторон EF, DF, DE в точках X, Y, Z соответственно. Отметим слудующие 12 точек: пересечение касательных из точки A к Γ с прямыми EF, YZ, пересечение касательных из точки B к Γ с прямыми DF, XZ и пересечение касательных из точки C к Γ с прямыми DE, XY. Тогда 12 отмеченных точек лежат на одной окружности.



Обозначим отмеченные точки,как на картинке ниже.



0. План доказательства основного результата:

Утверждение 1. X_1, X_4, X_6, X_{11} лежат на одной окружности.
Утверждение 2. Центр окружности из **утверждения 1** лежит на прямой OH.
Утверждение 3. X_5, X_8, X_9, X_{12} лежат на одной окружности и центр этой окружности лежит на прямой OH.
Утверждение 4. $X_1, X_4, X_5, X_8, X_9, X_{12}$ лежат на одной окружности с центром на OH
Давайте докажем **утверждение** 4 используя результат **утверждения** 3.
Доказательство утверждения 4.
Из **утверждения 3** следует, что четвёрки точек X_5, X_8, X_9, X_{12} и X_9, X_{12}, X_1, X_4 и X_1, X_4, X_5, X_8 лежат на одной окружности с центром на прямой OH. Заметим, что прямые $X_1X_4, X_5X_8, X_9X_{12}$ не пересекаются в одной точке. Следовательно, точки $X_1, X_4, X_5, X_8, X_9, X_{12}$ лежат на одной окружности с центром на прямой OH.

Теперь докажем основной результат с помощью результатов утверждений.
Доказательство основного результа.
Из **утверждения 2** следует, что серединный перпендикуляр к отрезку X_1X_4 пересекает прямую OH в центре окружности, на которой лежат точки X_1, X_4, X_6, X_{11}, с другой стороны по **утверждению 4** этот центр совпадает с центром окружности, на которой лежат точки $X_1, X_4, X_5, X_8, X_9, X_{12}$. Следовательно, точки $X_1, X_4, X_5, X_6, X_8, X_9, X_{11}, X_{12}$ лежат на одной окружности. Аналогичные расссуждения можно проделать для пар точек X_2, X_7 и X_3, X_{10}.

0.5. Обозначения и известные леммы.

Обозначим за $\odot(XYZ)$ описанную окружность треугольника или многоугольника $\triangle XYZ$. Также обозначим некоторые известные леммы.
Лемма 1 (Оптическое свойство эллипса).
Дан эллипс с фокусами F_1, F_2 и точка A на нём. Тогда касательная в точке A к эллипсу внешняя биссектриса угла $\angle F_1AF_2$.
Лемма 2.
Дан эллипс с фокусами F_1, F_2 и точка A, которая лежит вне эллипса. Тогда биссектриса угла $\angle F_1AF_2$ совпадает с биссектрисой угла образованного касательными из точки A к эллипсу.
Следствие 2.1.
Проекции фокусов эллипса на касательную к нему лежат на фиксированной окружности с центром в середине отрезка, который соединяет фокусы.
Следствие 2.2.
Дан треугольник $\triangle ABC$ с центром описанной окружности O и ортоцентром H. Эллипс с фокусами O, H касается стороны BC в точке X и сторон AB, AC. Точка X' симметрична точке X относительно середины стороны BC. Тогда точки A, O, X' лежат на одной прямой.
Доказательство следствия 2.2:
Пусть H' повторное пересечение прямой AH и окружности $\odot(ABC)$. Тогда по **лемме 2** точки O, H', X лежат на одной прямой. Пусть A' диаметрально противоположна точке A относительно окружности $\odot(ABC)$. Тогда $A'H' \parallel BC$. Следовательно точки H' и A' симметричны относительно серединного перпендикулра к $BC \Rightarrow A', X', O$ лежат на одной прямой.
Лемма 3 (Теорема Штейнера).
Даны два треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$. Оказалось, что перпендикуляры из точек A, B, C к прямым EF, DF, DE пересекаются в одной точке. Тогда перпендикуляры из точек D, E, F к прямым BC, AC, AB также пересекаются в одной точке.
Лемма 4.
Вписанная окружность $\triangle ABC$ с центром в точке I касается сторон BC, AC, AB в точках D, E, F соответственно. Тогда точка пересечение прямых ID и EF лежит на медиане из вершины A в треугольнике $\triangle ABC$.
Доказательство лемм можно найти в книге "Геометрические свойства кривых второго порядка"(А.А.Заславский и А.В.Акопян) по ссылке [1].

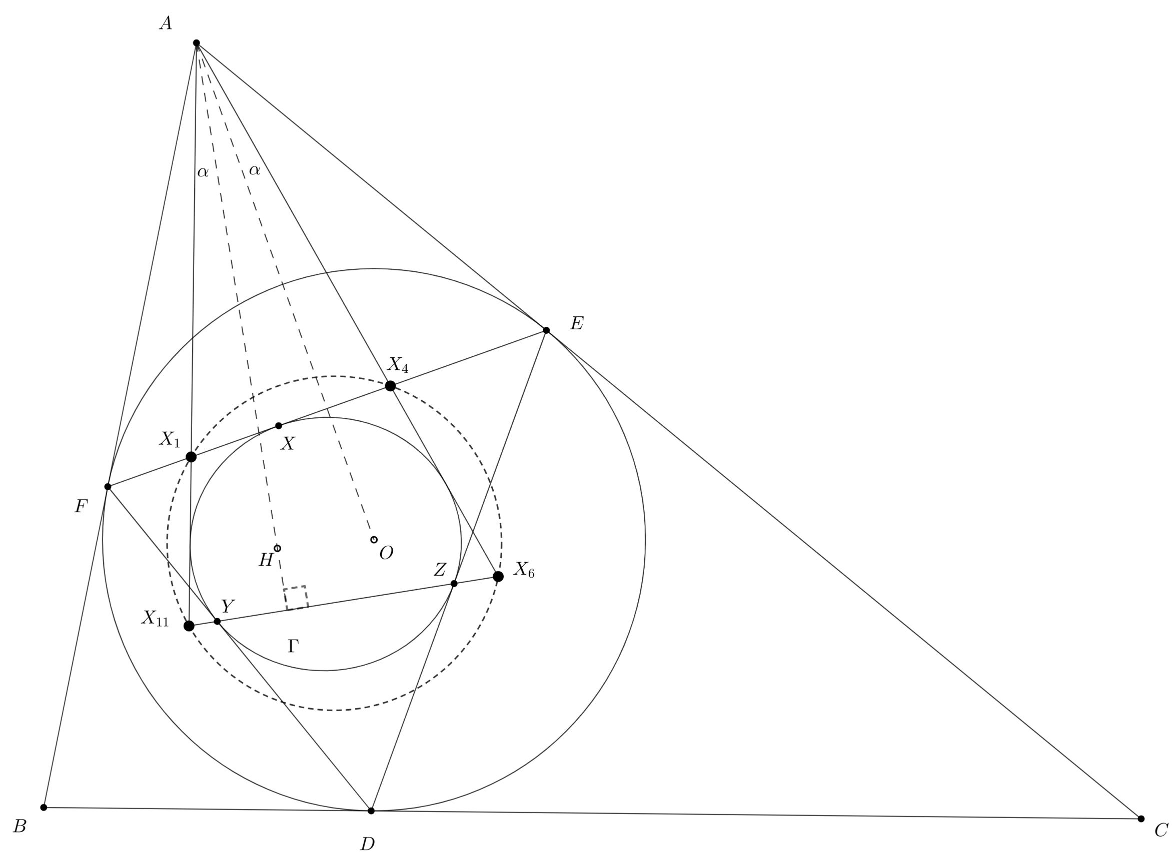
1. Доказательство утверждения 1.

Шаг 1.1. $AH \perp YZ$.

Доказательство.

Заметим,что $\angle(XH, EF) = 90^\circ - \angle ODH \Rightarrow HX \perp BC$. Аналогично $HY \perp AC$ и $HZ \perp AB$. Тогда по **лемме 3** для треугольников $\triangle DYZ$ и $\triangle AEF \Rightarrow AH \perp YZ$.

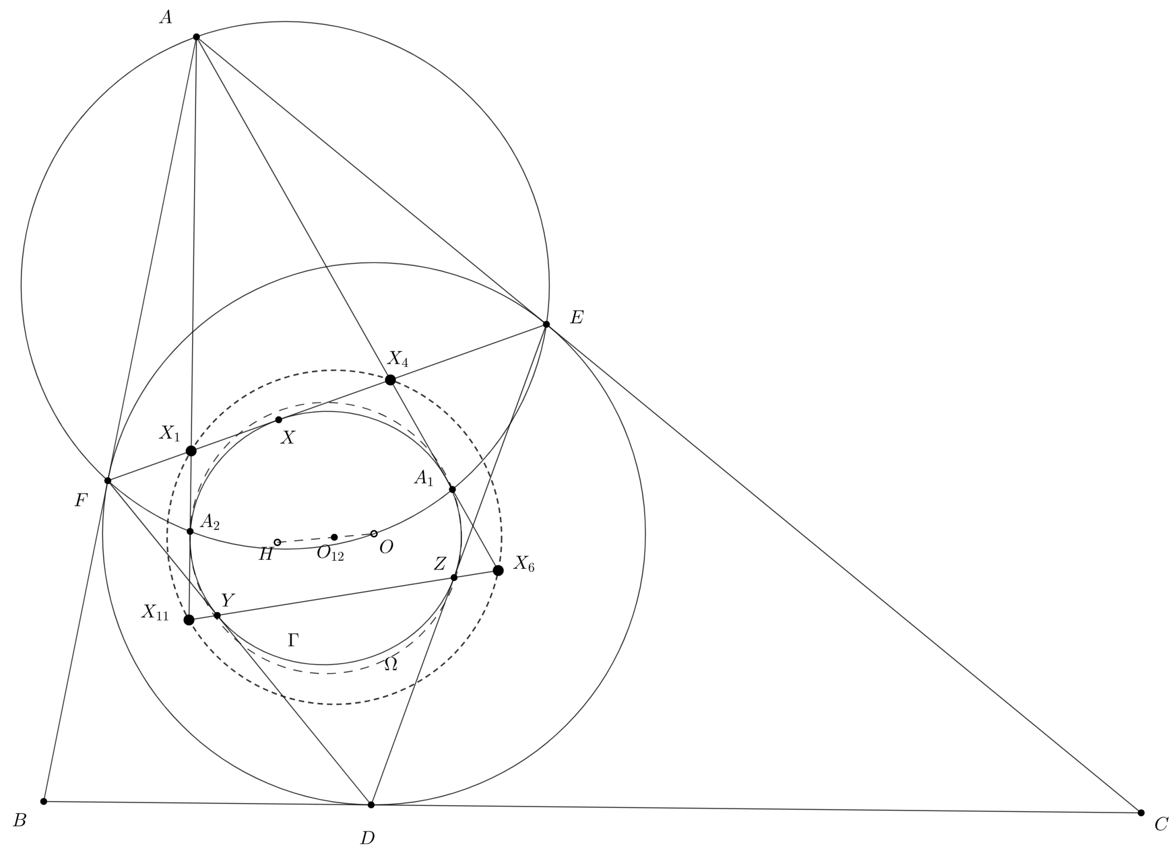
Заметим,что $AO \perp EF$ и по **лемме 1** прямые AO, AH изогонали относительно угла $\angle X_1AX_4 \Rightarrow \angle AX_1X_4 = \angle AX_6X_{11}$.



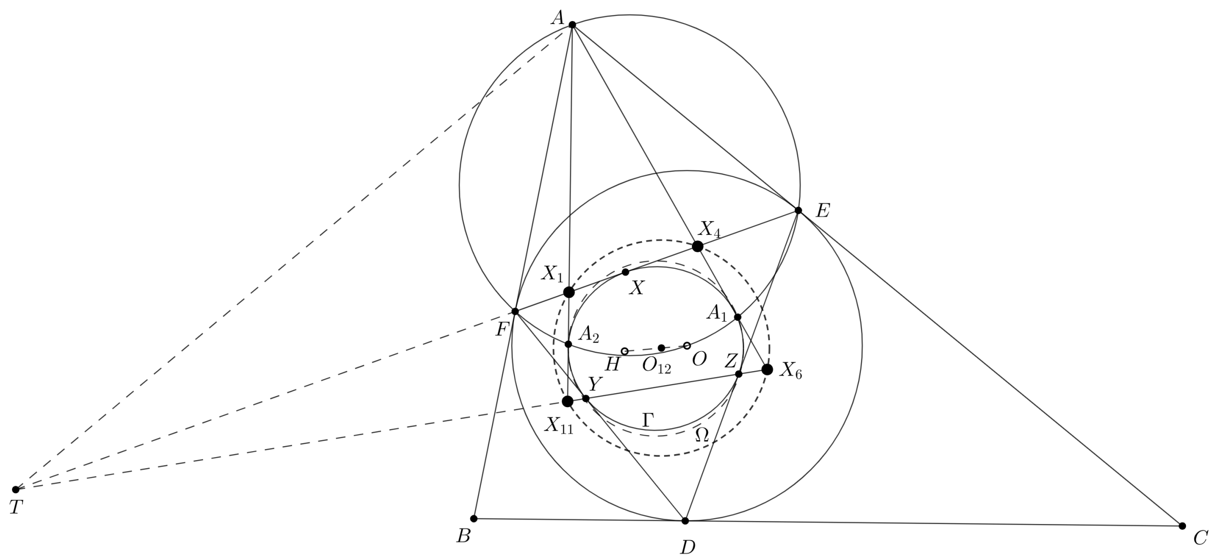
2. Доказательство утверждения 2:

Пусть O_{12} центр окружности $\odot(X_1X_4X_6X_{11})$. Если опустить перпендикуляры на прямые AX_1 и AX_4 из точек O, H, то по **следствию 2.1** они будут лежать на окружности девяти точек треугольника $\triangle DEF$. Обозначим её Ω. Поэтому нам будет удобно использовать точки A_1, A_2, которые определяются, как две точки пересечения окружности Ω и окружности $\odot(AEFO)$,

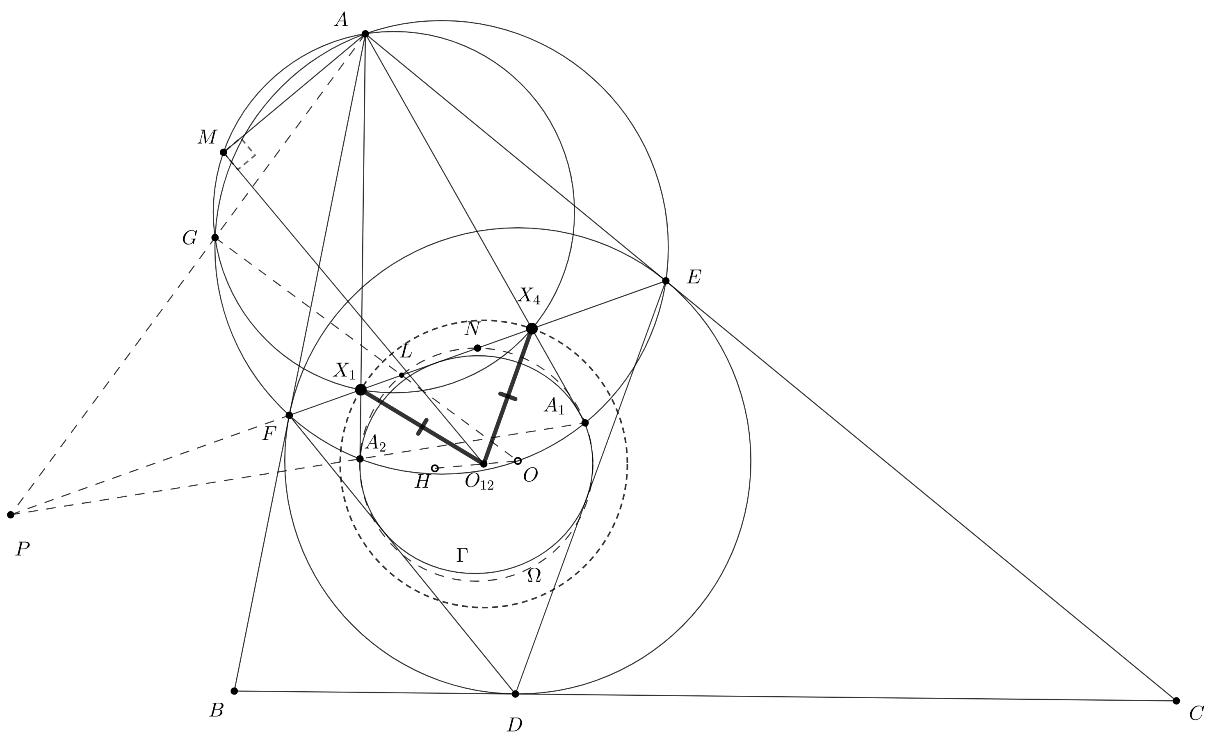
пусть они будут лежать на прямых AX_4, AX_1 соответственно .
Шаг 2.1. $A_1A_2 \parallel YZ$.
Доказательство.
Заметим,что прямая AH получается из линии центров окружностей Ω и $\odot(AEFO)$ гомотетией с центром в точке O и коффицентом 2 и A_1A_2 радикальная ось Ω и $\odot(AEFO)$ => $A_1A_2 \parallel YZ$.



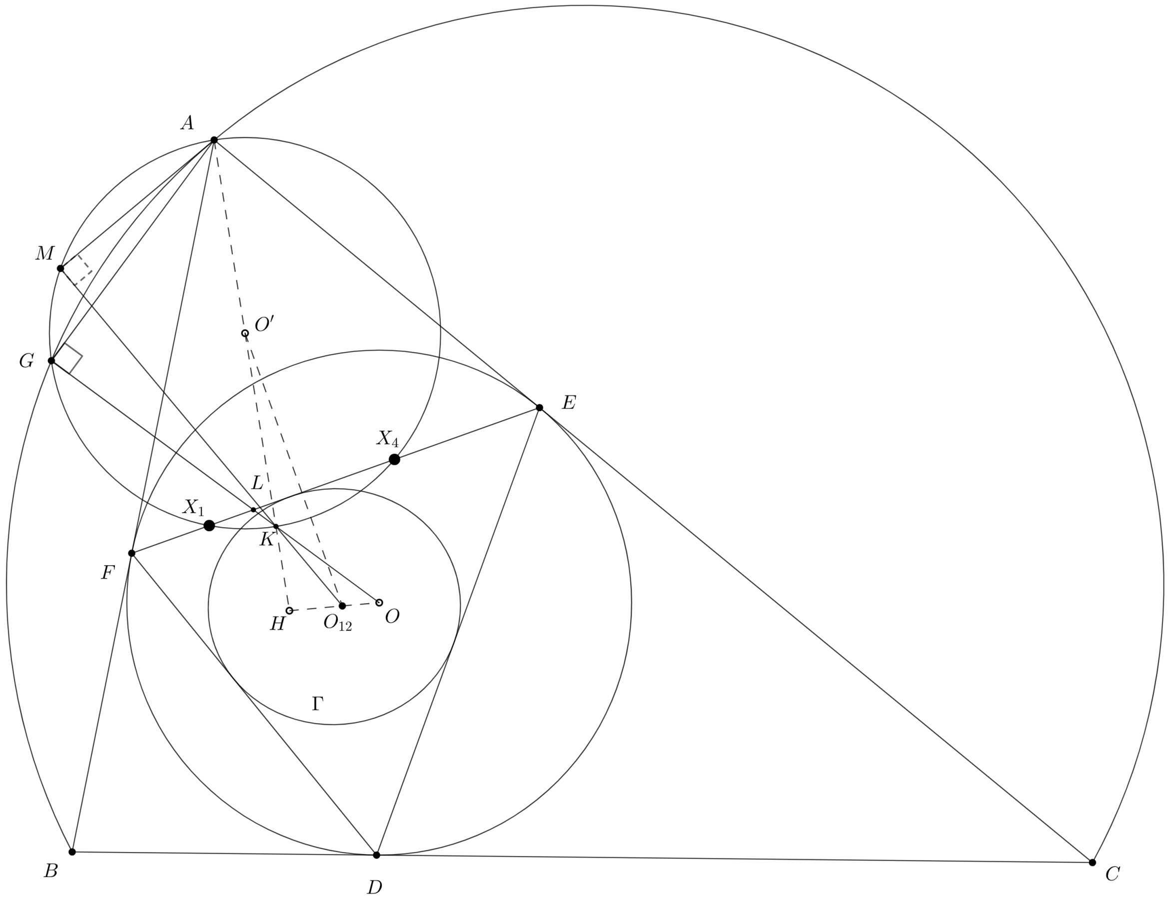
Шаг 2.2. Касательная в точке A к $\odot(ABC)$ и EF и YZ пересекаются в одной точке.
Доказательство.
AX симедиана в треугольнике $\triangle ABC$ так, как по **лемме 4** OD, EF пересекаются на медиане из вершины A в треугольнике $\triangle ABC$. Пусть прямые YZ и EF пересекаются в точке T. Заметим,что $(E, F, X, T) = -1$ так, как по **следствию 2.2** прямые DX, EY, CZ пересекаются в одной точке, которая изотомически сопряжена точке O относительно треугольника $\triangle DEF$ => TA касается $\odot(ABC)$.



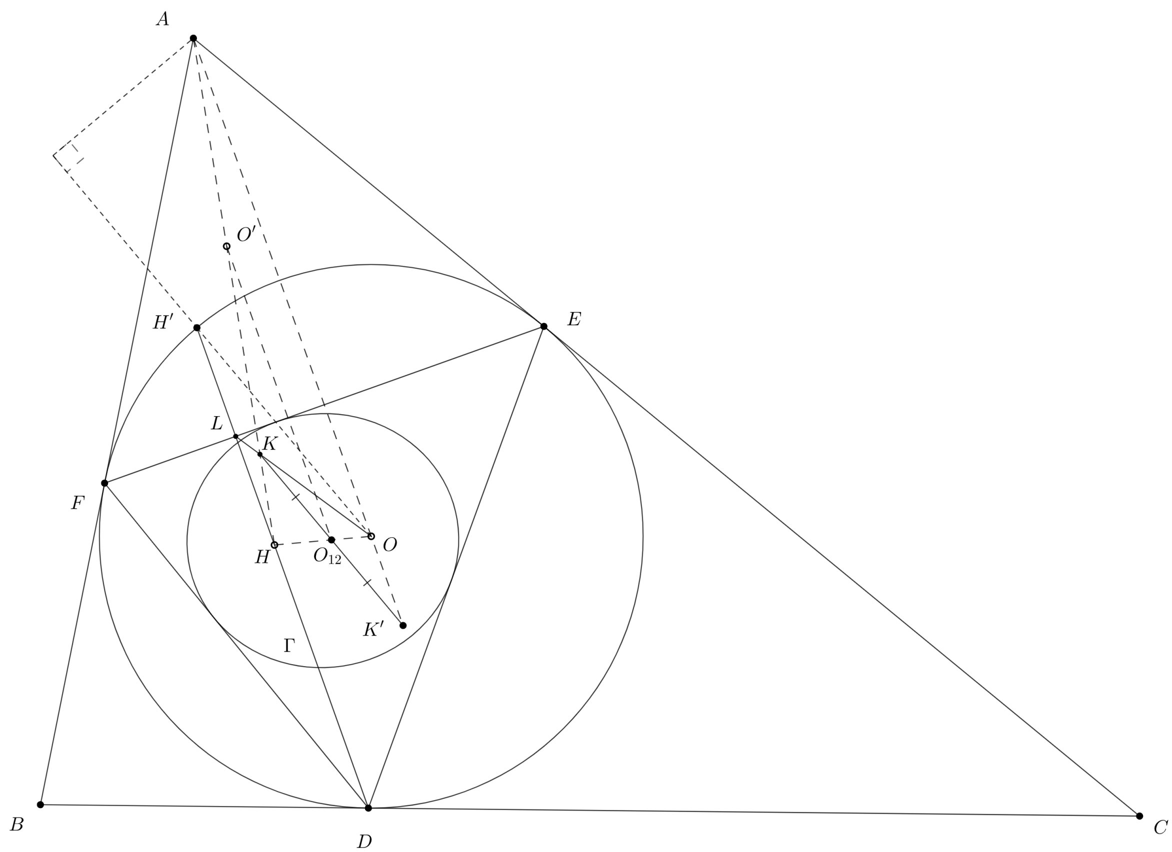
Шаг 2.3. Окружности $\odot(ABC), \odot(AEF), \odot(AX_1X_4)$ соосны.
Доказательство.
Пусть G точка Микеля $X_1X_4A_1A_2$. А прямые A_1A_2 и EF пересекаются в точке P. Тогда $G \in AP, G \in \odot(AX_1X_4), G \in \odot(AEF)$. Пусть N середина EF. Пусть DL высота треугольника $\triangle DEF$. Тогда $PA_2 * PA_1 = PL * PN = PG * PA$. Следовательно, $\angle AGL = 90°$ и O, G, L лежат на одной прямой $=> G \in \odot(ABC)$ так, как окружности $\odot(ABC)$ и Ω инверсы относительно $\odot(DEF)$.



Определим точку O_{12} через точку Микеля. Пусть M точка Микеля $X_1X_4X_6X_{11}$ => $M \in AT, M \in \odot(AX_1X_4)$ и $MO_{12} \perp AT$. Пусть точка K диаметрально противоположна точке A в окружности $\odot(AX_1X_4)$. Тогда $K \in OG$ и $K \in O_{12}K$. Далее мы будем считать, что точка O_{12} лежит на прямых OH и MK и надо доказать, что $O_{12}X_1 = O_{12}X_4$. Пусть O' центр окружности $\odot(AX_1X_4)$. Тогда точка O' середина AK. Достаточно доказать,что $O'O_{12} \perp EF \parallel AO$.

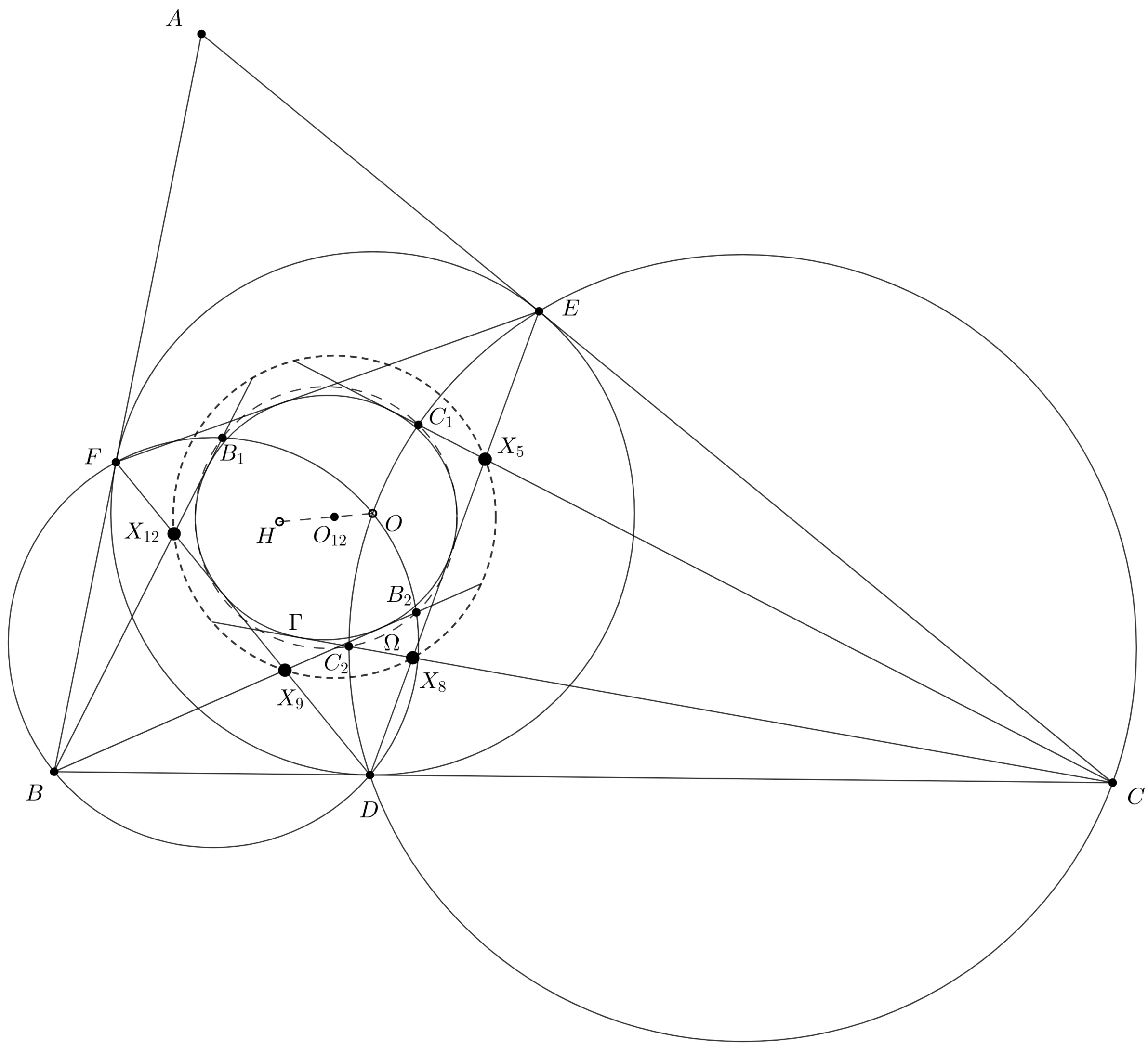


Шаг 2.4. $O'O_{12} \parallel AO$.
Доказательство.
Пусть H' симметрична точке H относительно EF. Точка K' симметрична точке K относительно O_{12}. Для начала $OH' \perp$ касательной из точки H' к окружности $\odot(DEF)$, которая $\parallel$ касательной из точки A к окружности $\odot(ABC) => -1 = (H, H', L, \infty_{HD}) = O(O_{12}, \infty_{O_{12}K}, K, AO \cap O_{12}K)$ $=> K' \in AO$.



3. Доказательство утверждения 3.

Определим пары точек $(B_2, B_1), (C_2, C_1)$ как проекции точки O на касательные из точек B, C к Γ. Тогда по **Следствию 2.1** $B_1, B_2, C_1, C_2 \in \Omega$. Мы будем доказывать,что четырёхугольник $X_5X_8X_9X_{12}$ вписанный и центр его описанной окружности лежит на прямой OH. Обозначать его на картинке будем тоже O_{12}.



Будем обозначать образы при инверсии относительно окружности $\odot(DEF)$ штрихами. Для начала посмотрим на образы точек $B_1, B_2, C_1, C_2 => B_1', B_2', C_1', C_2' \in \odot(ABC)$, $B_1', B_2' \in DF, C_1', C_2' \in DE$. Теперь посмотрим на образы точек $X_5, X_8, X_9, X_{12} => X_5', X_8', X_9', X_{12}'$ проекции точки O на прямые $CC_1', CC_2', BB_1', BB_2'$ соответственно. Также отметим образы точек $A, B, C => A', B', C'$ середины отрезков EF, DF, DE соответственно. Пусть J центр окружности $\odot(ABC)$. Широко известно,что $J \in OH$. Заметим, что достаточно доказать, что $X_5', X_8', X_9', X_{12}'$ лежат на одной окружности с центром на прямой OJ. Пусть R, S середины BB_2', CC_2' соответственно, то есть проекции точки J на прямые BB'_2, CC'_2.

Шаг 3.1. Прямые BO и BJ симметричны относительно биссектрисы угла $\angle B'_1BB'_2$ и прямые CO и CJ симметричны относительно биссектрисы угла $\angle C'_1CC'_2$.

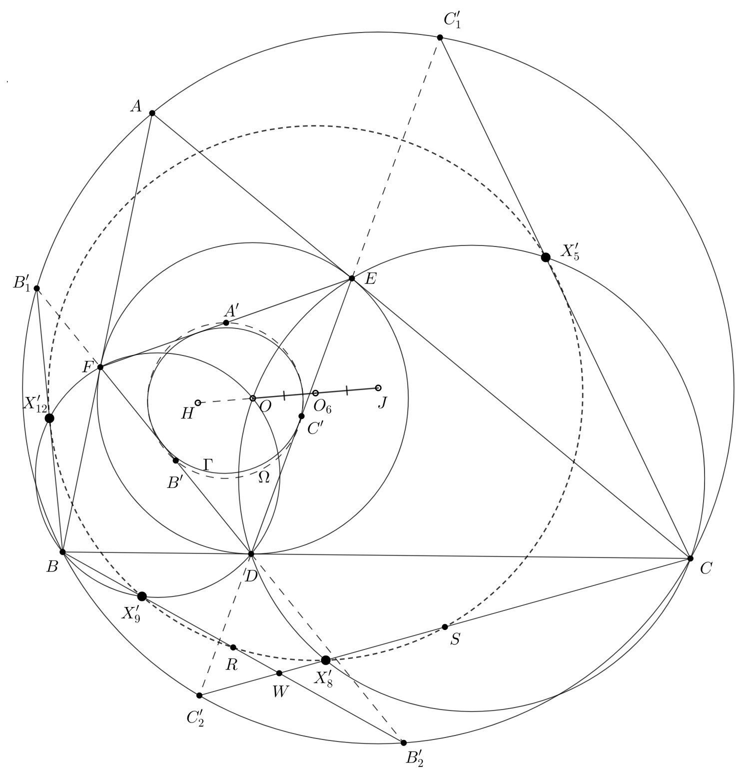
Доказательство.

Это верно так, как $BO \perp B'_1B'_2$ и $CO \perp C'_1C'_2$.

Шаг 3.2. O, J изогонально сопряжены в четырёхугольнике образованом прямыми $BB'_1, BB'_2, CC'_1, CC'_2$.

Доказательство.

Точки R, S центры окружностей $\odot(BB'B'_2), \odot(CC'C'_2)$. Тогда $-Pow(W, \odot(BB'B'_2)) = WB * WB'_2 = WC * WC'_2 = -Pow(W, \odot(CC'C'_2))$ и $Pow(O, \odot(BB'B'_2)) = OB * OB' = OD^2 = OC * OC' = Pow(O, \odot(CC'C'_2)) => RS \perp OW$. Следовательно, прямые OW и JW симметричны относительно угла $\angle BWC =>$ O, J изогонально сопряжены в четырёхугольнике образованном прямыми $BB'_1, BB'_2, CC'_1, CC'_2$. Следовательно, $X'_5, X'_8, X'_9, X'_{12}$ лежат на одной окружности с центром в середине OJ. Отметим, что мы доказали,что образы при инверсии относительно $\odot(DEF)$ средних точек отрезков $CC'_1, CC'_2, BB'_2, BB'_1, AA'_1, AA'_2$ также лежат на этой окружности.



References

[1] - https://mccme.ru/free-books/akopyan/Zaslavky-Akopyan.pdf