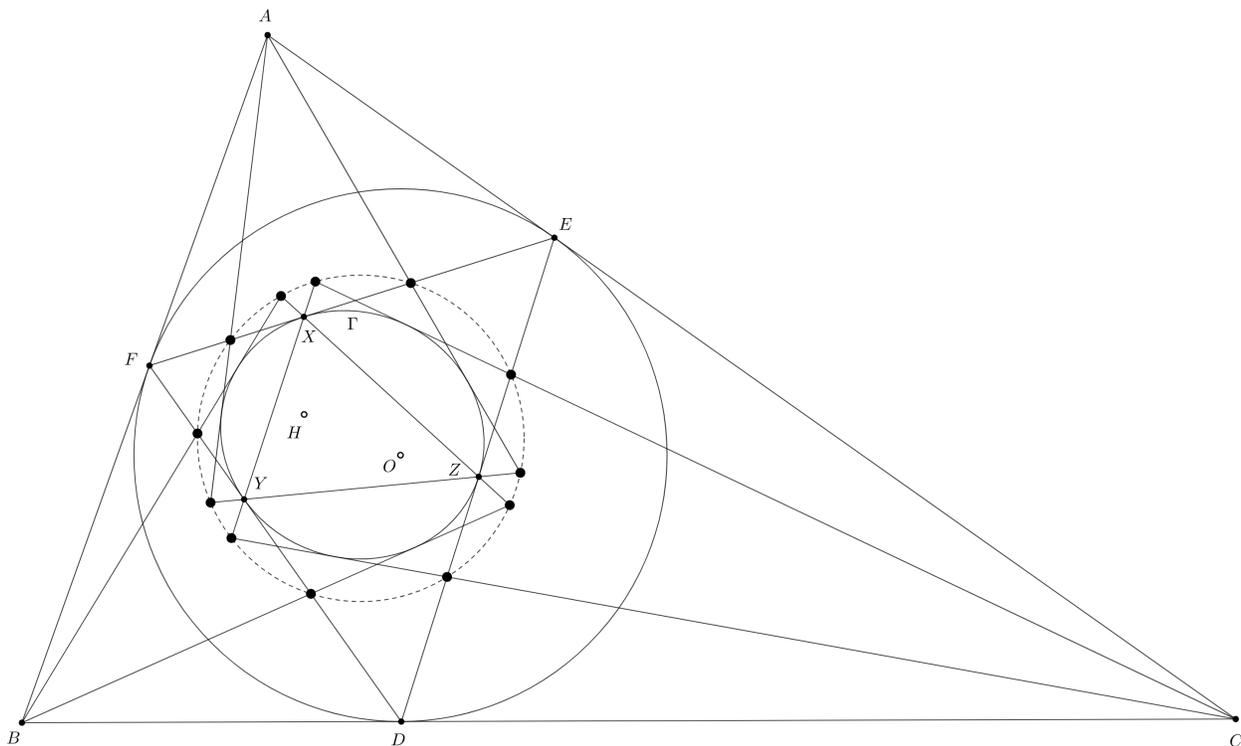


12(18) точек на одной окружности и касательные к эллипсу Макбита

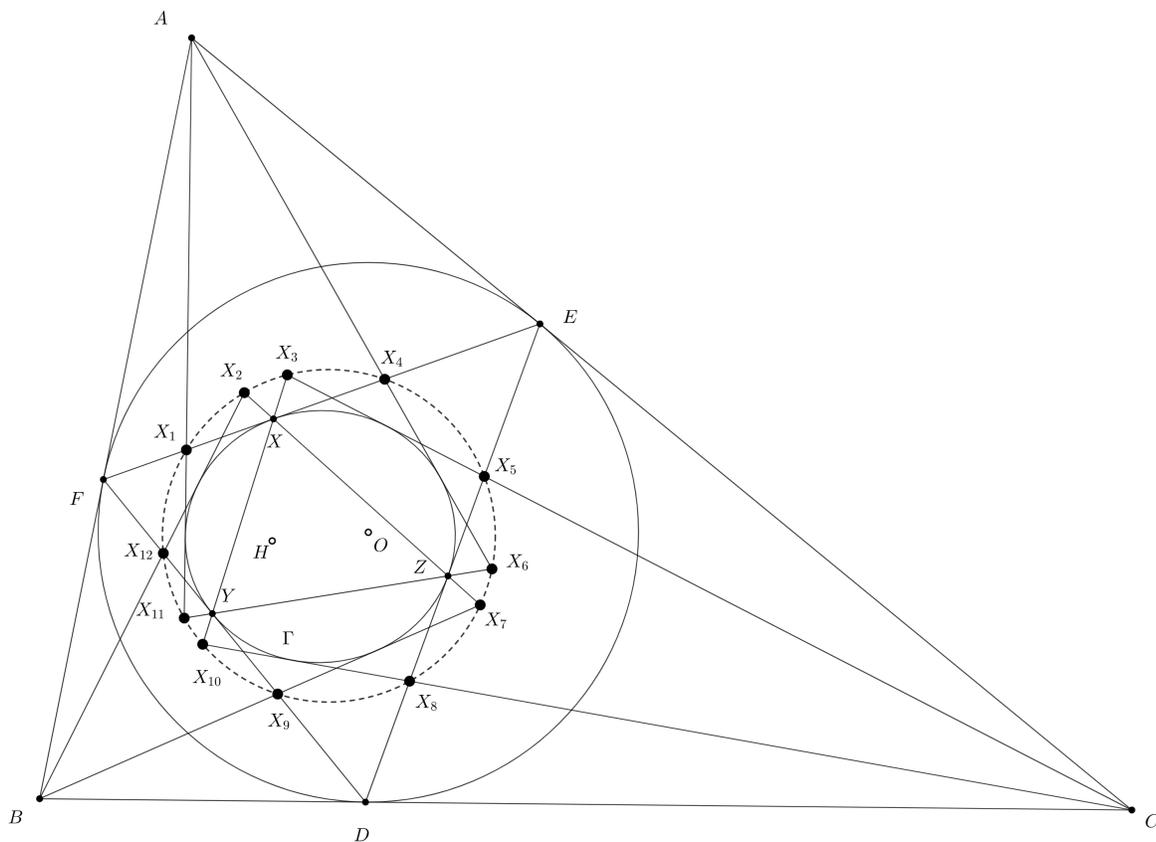
Кирилл Бельский

Гипотеза:

Вписанная окружность треугольника $\triangle ABC$ касается сторон BC, AC, AB в точках D, E, F соответственно. Точки O, H центр описанной окружности и ортоцентр треугольника $\triangle DEF$ соответственно. Эллипс Γ с фокусами O, H касается сторон EF, DF, DE в точках X, Y, Z соответственно. Отметим следующие 12 точек: пересечение касательных из точки A к Γ с прямыми EF, YZ , пересечение касательных из точки B к Γ с прямыми DF, XZ и пересечение касательных из точки C к Γ с прямыми DE, XY . Тогда 12 отмеченных точек лежат на одной окружности.



Обозначим отмеченные точки, как на картинке ниже.



0. План доказательства основного результата:

Утверждение 1. X_1, X_4, X_6, X_{11} лежат на одной окружности с центром на прямой OH .

Утверждение 2. $X_1, X_4, X_5, X_8, X_9, X_{12}$ лежат на одной окружности с центром на OH

Доказательство основного результата.

Из **утверждения 1** следует, что серединный перпендикуляр к отрезку X_1X_4 пересекает прямую OH в центре окружности, на которой лежат точки X_1, X_4, X_6, X_{11} , с другой стороны по **утверждению 2** этот центр совпадает с центром окружности, на которой лежат точки $X_1, X_4, X_5, X_8, X_9, X_{12}$. Следовательно, точки $X_1, X_4, X_5, X_6, X_8, X_9, X_{11}, X_{12}$ лежат на одной окружности. Аналогичные рассуждения можно проделать для пар точек X_2, X_7 и X_3, X_{10} . ■

0.5. Обозначения и известные леммы.

Обозначим за $\odot(XYZ)$ описанную окружность треугольника или многоугольника $\triangle XYZ$. Также обозначим некоторые известные леммы.

Лемма 1.

Дан эллипс с фокусами F_1, F_2 и точка A на нём. Тогда касательная в точке A к эллипсу внешняя биссектриса угла $\angle F_1AF_2$.

Лемма 2.

Дан эллипс с фокусами F_1, F_2 и точка A , которая лежит вне эллипса. Тогда биссектриса угла $\angle F_1AF_2$ совпадает с биссектрисой угла образованного касательными из точки A к эллипсу.

Следствие 2.1.

Проекция фокусов эллипса на касательную к нему лежат на фиксированной окружности с центром в середине отрезка, который соединяет фокусы.

Следствие 2.2.

Дан треугольник $\triangle ABC$ с центром описанной окружности O и ортоцентром H . Эллипс с фокусами O, H касается стороны BC в точке X и сторон AB, AC . Точка X' симметрична точке X относительно середины стороны BC . Тогда точки A, O, X' лежат на одной прямой.

Доказательство следствия 2.2:

Пусть H' повторное пересечение прямой AH и окружности $\odot(ABC)$. Тогда по **лемме 2** точки O, H', X лежат на одной прямой. Пусть A' диаметрально противоположна точке A относительно окружности $\odot(ABC)$. Тогда $A'H' \parallel BC$. Следовательно точки H' и A' симметричны относительно среднего перпендикуляра к $BC \Rightarrow A', X', O$ лежат на одной прямой. ■

Лемма 3.

Даны два треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$. Оказалось, что перпендикуляры из точек A, B, C к прямым EF, DF, DE пересекаются в одной точке. Тогда перпендикуляры из точек D, E, F к прямым BC, AC, AB также пересекаются в одной точке.

Лемма 4.

Вписанная окружность $\triangle ABC$ с центром в точке I касается сторон BC, AC, AB в точках D, E, F соответственно. Тогда точка пересечения прямых ID и EF лежит на медиане из вершины A в треугольнике $\triangle ABC$.

Доказательство лемм можно найти в книге "Геометрические свойства кривых второго порядка" (А.А.Заславский и А.В.Акопян) по ссылке [1].

1. Доказательство утверждения 1.

Шаг 1.1. $AH \perp YZ$.

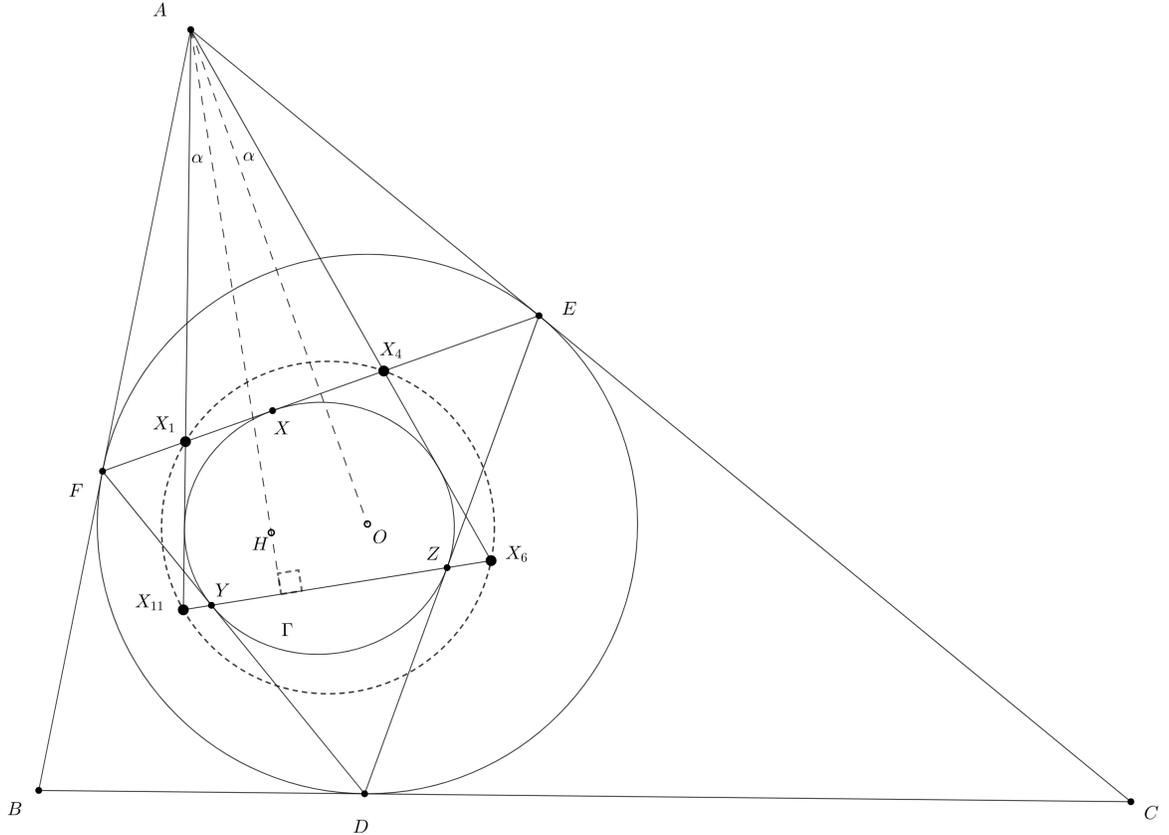
Доказательство.

Заметим, что $\angle(XH, EF) = 90^\circ - \angle ODH \Rightarrow HX \perp BC$. Аналогично $HY \perp AC$ и $HZ \perp AB$. Тогда по **лемме 3** для треугольников $\triangle DYZ$ и $\triangle AEF \Rightarrow AH \perp YZ$. ■

Шаг 1.2. Точки X_1, X_4, X_6, X_{11} лежат на одной окружности.

Доказательство.

Заметим, что $AO \perp EF$ и по *лемме 1* прямые AO, AH изогоналы относительно угла $\angle X_1AX_4 \Rightarrow \angle AX_1X_4 = \angle AX_6X_{11}$. ■

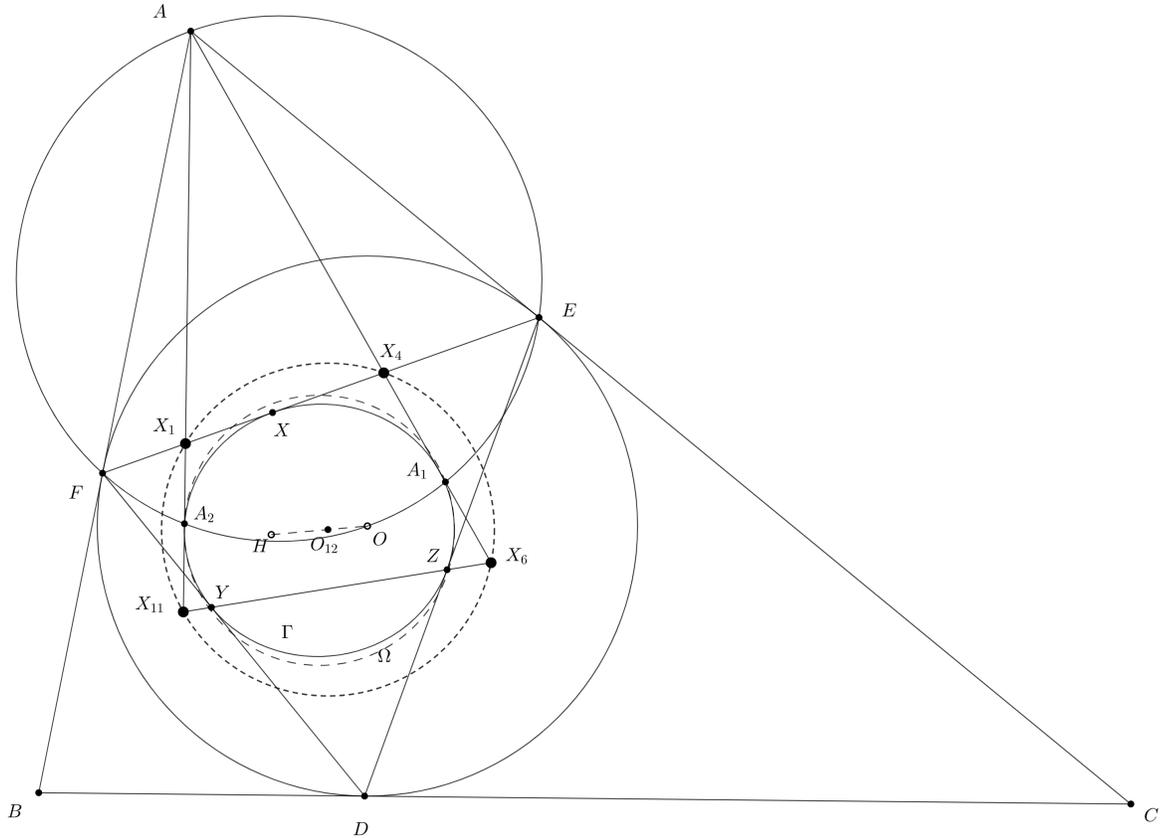


Пусть O_{12} центр окружности $\odot(X_1X_4X_6X_{11})$. Если опустить перпендикуляры на прямые AX_1 и AX_4 из точек O, H , то по *следствию 2.1* они будут лежать на окружности девяти точек треугольника $\triangle DEF$. Обозначим её Ω . Поэтому нам будет удобно использовать точки A_1, A_2 , которые определяются, как две точки пересечения окружности Ω и окружности $\odot(AEFO)$, пусть они будут лежать на прямых AX_4, AX_1 соответственно.

Шаг 1.3. $A_1A_2 \parallel YZ$.

Доказательство.

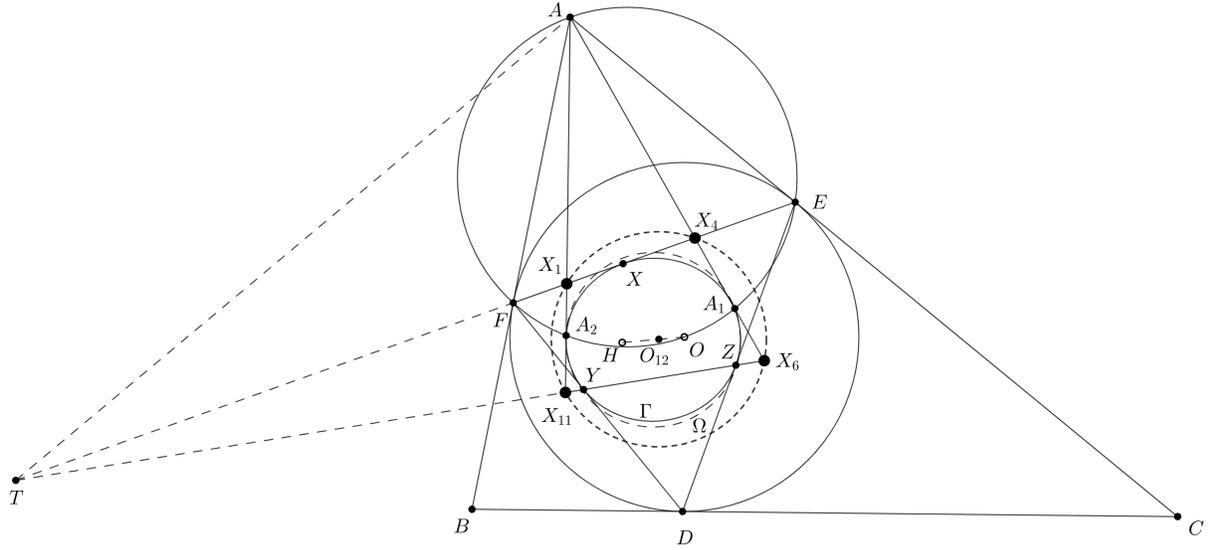
Заметим, что прямая AH получается из линии центров окружностей Ω и $\odot(AEFO)$ гомотетией с центром в точке O и коэффициентом 2 и A_1A_2 радикальная ось Ω и $\odot(AEFO) \Rightarrow A_1A_2 \parallel YZ$. ■



Шаг 1.4. Касательная в точке A к $\odot(ABC)$ и EF и YZ пересекаются в одной точке.

Доказательство.

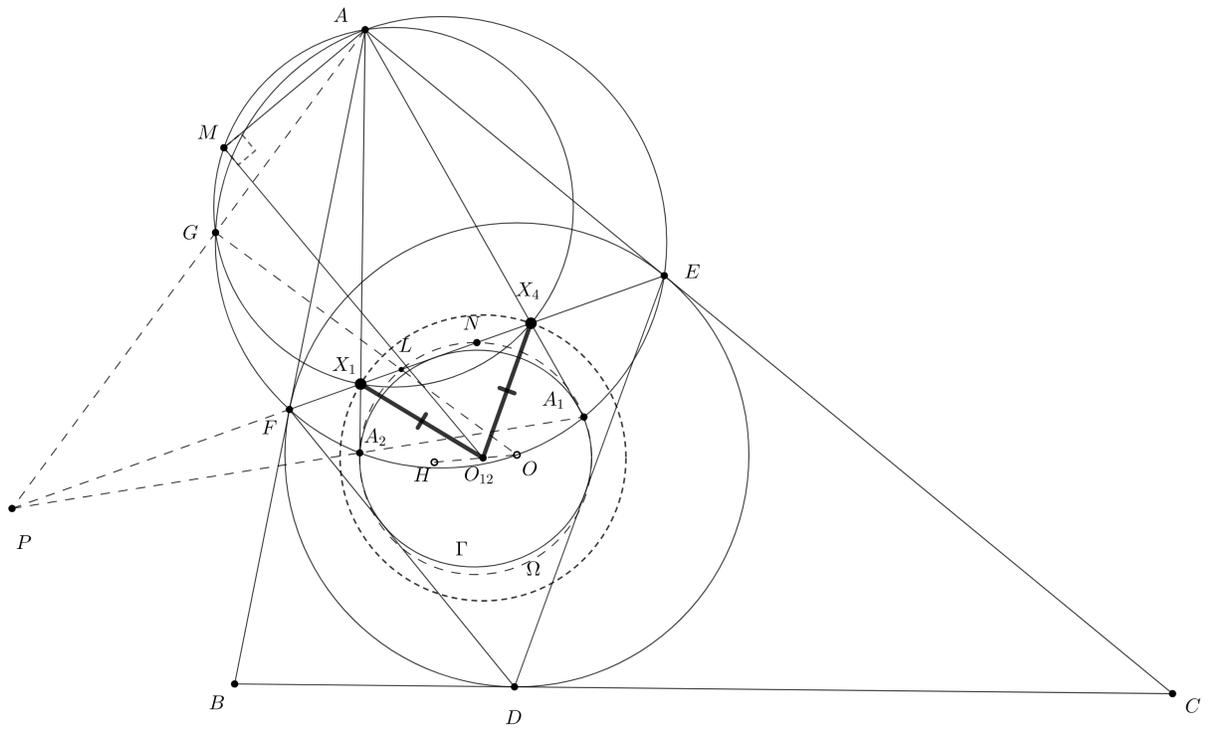
AX симедиана в треугольнике $\triangle ABC$ так, как по *лемме 4* OD, EF пересекаются на медиане из вершины A в треугольнике $\triangle ABC$. Пусть прямые YZ и EF пересекаются в точке T . Заметим, что $(E, F, X, T) = -1$ так, как по *следствию 2.2* прямые DX, EY, CZ пересекаются в одной точке, которая изотомически сопряжена точке O относительно треугольника $\triangle DEF \Rightarrow TA$ касается $\odot(ABC)$. ■



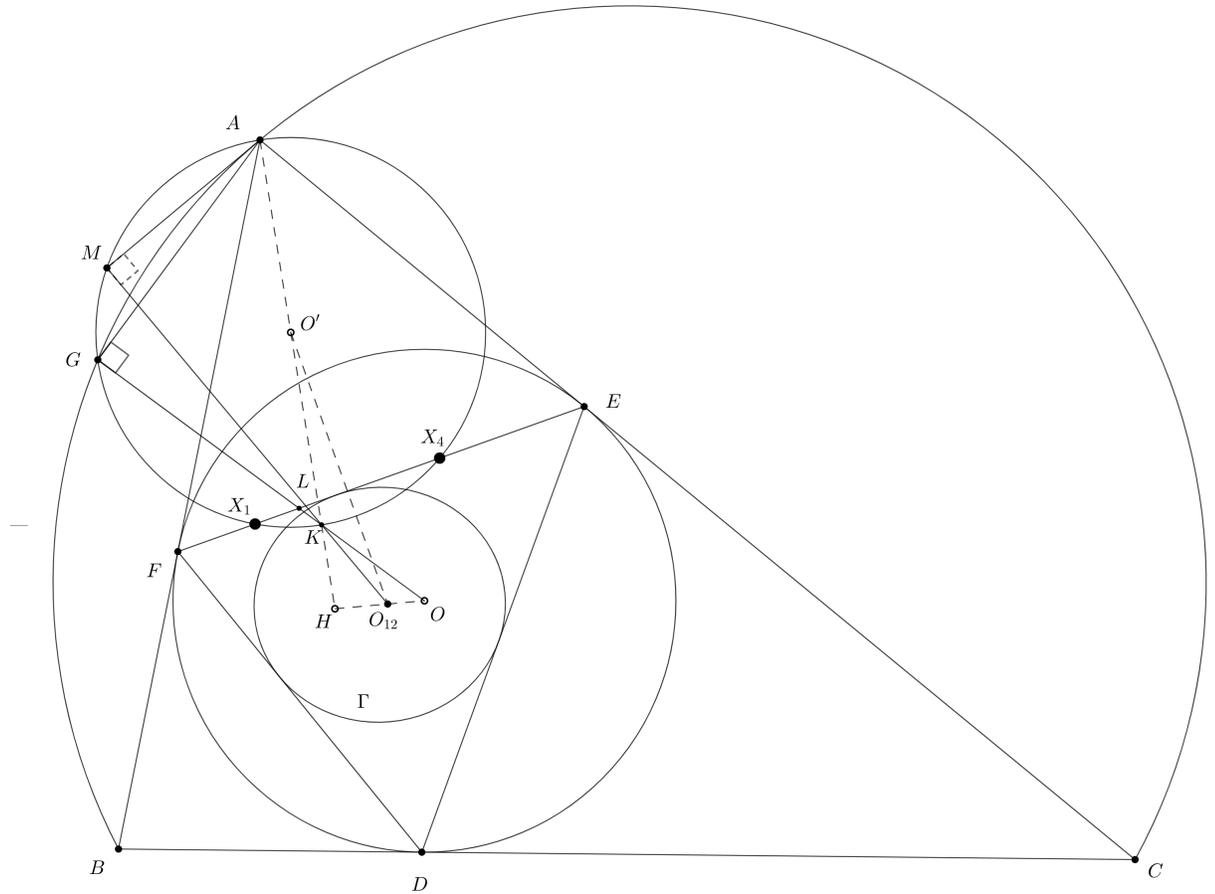
Шаг 1.5. Окружности $\odot(ABC), \odot(AEF), \odot(AX_1X_4)$ соосны.

Доказательство.

Пусть G точка Микеля $X_1X_4A_1A_2$. А прямые A_1A_2 и EF пересекаются в точке P . Тогда $G \in AP, G \in \odot(AX_1X_4), G \in \odot(AEF)$. Пусть N середина EF . Пусть DL высота треугольника $\triangle DEF$. Тогда $PA_2 * PA_1 = PL * PN = PG * PA$. Следовательно, $\angle AGL = 90^\circ$ и O, G, L лежат на одной прямой $\Rightarrow G \in \odot(ABC)$ так, как окружности $\odot(ABC)$ и Ω инверсны относительно $\odot(DEF)$. ■



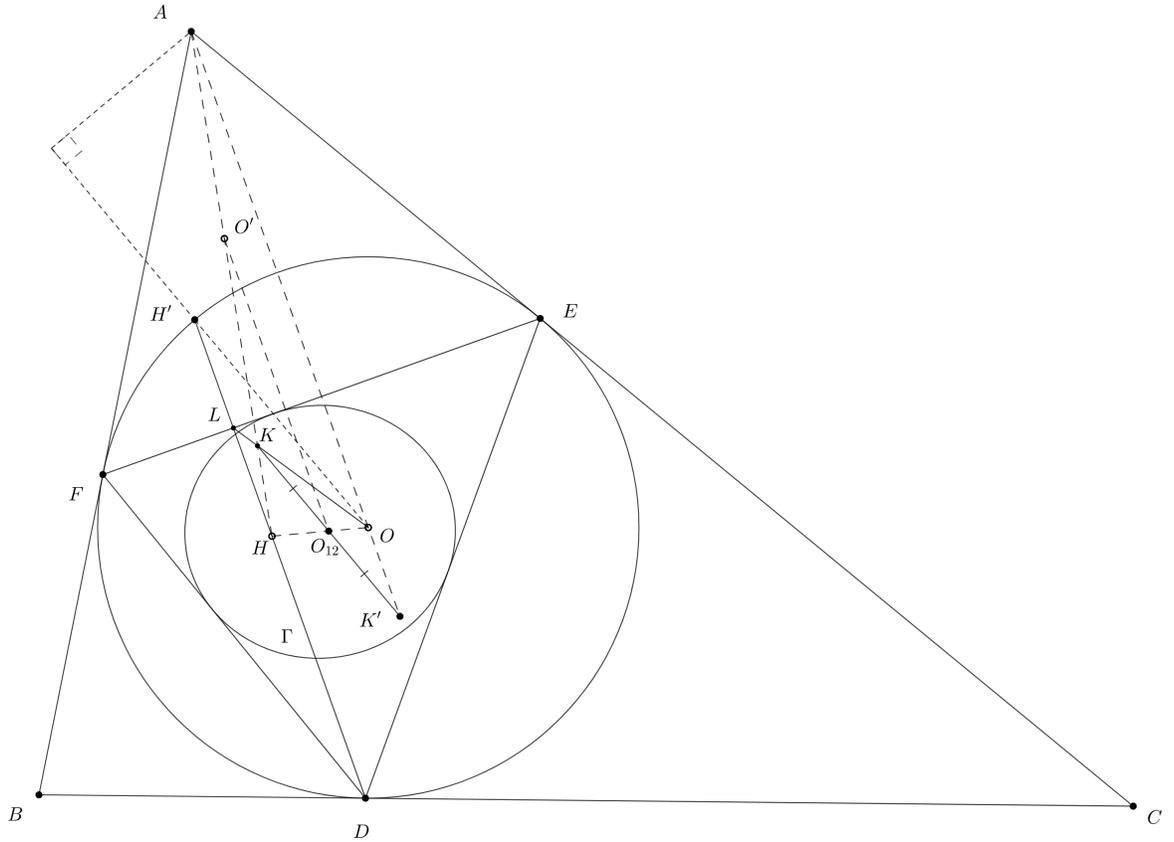
Определим точку O_{12} через точку Микеля. Пусть M точка Микеля $X_1X_4X_6X_{11}$
 $\Rightarrow M \in AT, M \in \odot(A X_1 X_4)$ и $MO_{12} \perp AT$. Пусть точка K диаметрально
 противоположна точке A в окружности $\odot(A X_1 X_4)$. Тогда $K \in OG$ и
 $K \in O_{12}K$. Далее мы будем считать, что точка O_{12} лежит на прямых
 OH и MK и надо доказать, что $O_{12}X_1 = O_{12}X_4$. Пусть O' центр окруж-
 ности $\odot(A X_1 X_4)$. Тогда точка O' середина AK . Достаточно доказать, что
 $O'O_{12} \perp EF \parallel AO$.



Шаг 1.6. $O'O_{12} \parallel AO$.

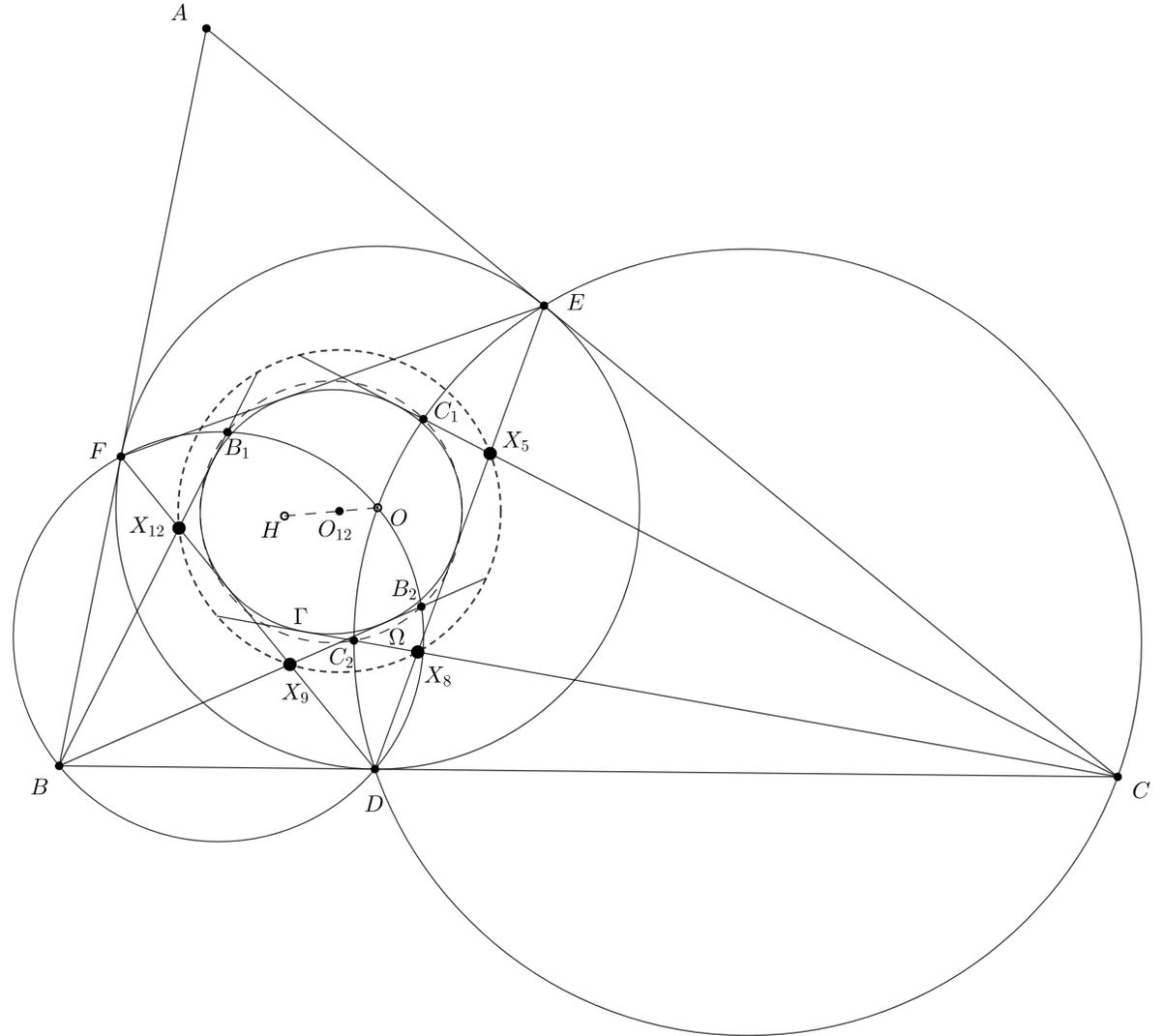
Доказательство.

Пусть H' симметрична точке H относительно EF . Точка K' симметрична на точке K относительно O_{12} . Для начала $OH' \perp$ касательной из точки H' к окружности $\odot(DEF)$, которая \parallel касательной из точки A к окружности $\odot(ABC) \Rightarrow -1 = (H, H', L, \infty_{HD}) = O(O_{12}, \infty_{O_{12}K}, K, AO \cap O_{12}K) \Rightarrow K' \in AO$. ■



2. Доказательство утверждения 2.

Заметим, что достаточно доказать, что точки X_5, X_8, X_9, X_{12} лежат на одной окружности с центром на прямой OH . Определим пары точек $(B_2, B_1), (C_2, C_1)$ как проекции точки O на касательные из точек B, C к Γ . Тогда по **Следствию 2.1** $B_1, B_2, C_1, C_2 \in \Omega$. Мы будем доказывать, что четырёхугольник $X_5 X_8 X_9 X_{12}$ вписанный и центр его описанной окружности лежит на прямой OH . Обозначать его на картинке будем тоже O_{12} .



Будем обозначать образы при инверсии относительно окружности $\odot(DEF)$ штрихами. Для начала посмотрим на образы точек $B_1, B_2, C_1, C_2 \Rightarrow B'_1, B'_2, C'_1, C'_2 \in \odot(ABC)$, $B'_1, B'_2 \in DF, C'_1, C'_2 \in DE$. Теперь посмотрим на образы точек $X_5, X_8, X_9, X_{12} \Rightarrow X'_5, X'_8, X'_9, X'_{12}$ проекции точки O на прямые $CC'_1, CC'_2, BB'_1, BB'_2$ соответственно. Также отметим образы точек $A, B, C \Rightarrow A', B', C'$ середины отрезков EF, DF, DE соответственно. Пусть J центр окружности $\odot(ABC)$. Широко известно, что $J \in OH$. Заметим, что достаточно доказать, что $X'_5, X'_8, X'_9, X'_{12}$ лежат на одной окружности с центром на прямой OJ . Пусть R, S середины BB'_2, CC'_2 соответственно, то есть проекции точки J на пря-

мые BB'_2, CC'_2 .

Шаг 2.1. Прямые BO и BJ симметричны относительно биссектрисы угла $\angle B'_1BB'_2$ и прямые CO и CJ симметричны относительно биссектрисы угла $\angle C'_1CC'_2$.

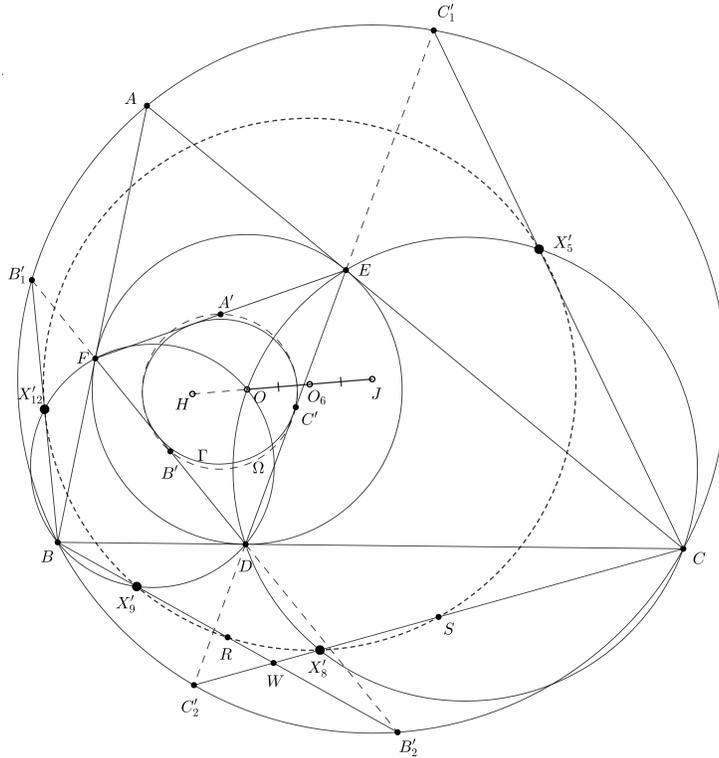
Доказательство.

Это верно так, как $BO \perp B'_1B'_2$ и $CO \perp C'_1C'_2$. ■

Шаг 2.2. O, J изогонально сопряжены в четырёхугольнике образованном прямыми $BB'_1, BB'_2, CC'_1, CC'_2$.

Доказательство.

Точки R, S центры окружностей $\odot(BB'B'_2), \odot(CC'C'_2)$. Тогда $-Pow(W, \odot(BB'B'_2)) = WB * WB'_2 = WC * WC'_2 = -Pow(W, \odot(CC'C'_2))$ и $Pow(O, \odot(BB'B'_2)) = OB * OB' = OD^2 = OC * OC' = Pow(O, \odot(CC'C'_2)) \Rightarrow RS \perp OW$. Следовательно, прямые OW и JW симметричны относительно угла $\angle BWC \Rightarrow O, J$ изогонально сопряжены в четырёхугольнике образованном прямыми $BB'_1, BB'_2, CC'_1, CC'_2$. Следовательно, $X'_5, X'_8, X'_9, X'_{12}$ лежат на одной окружности с центром в середине OJ . Отметим, что мы доказали, что образы при инверсии относительно $\odot(DEF)$ средних точек отрезков $CC'_1, CC'_2, BB'_2, BB'_1, AA'_1, AA'_2$ также лежат на этой окружности. ■



References

- [1] - <https://mccme.ru/free-books/akopyan/Zaslavky-Akopyan.pdf>