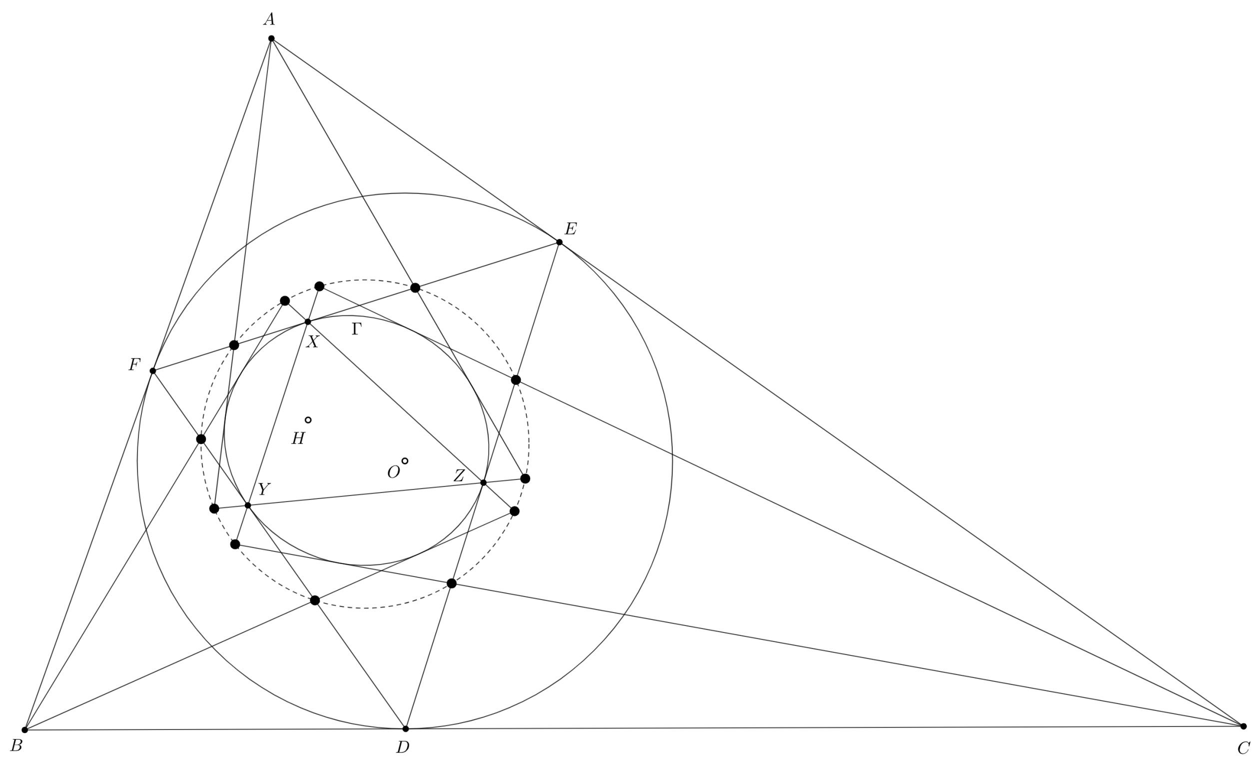
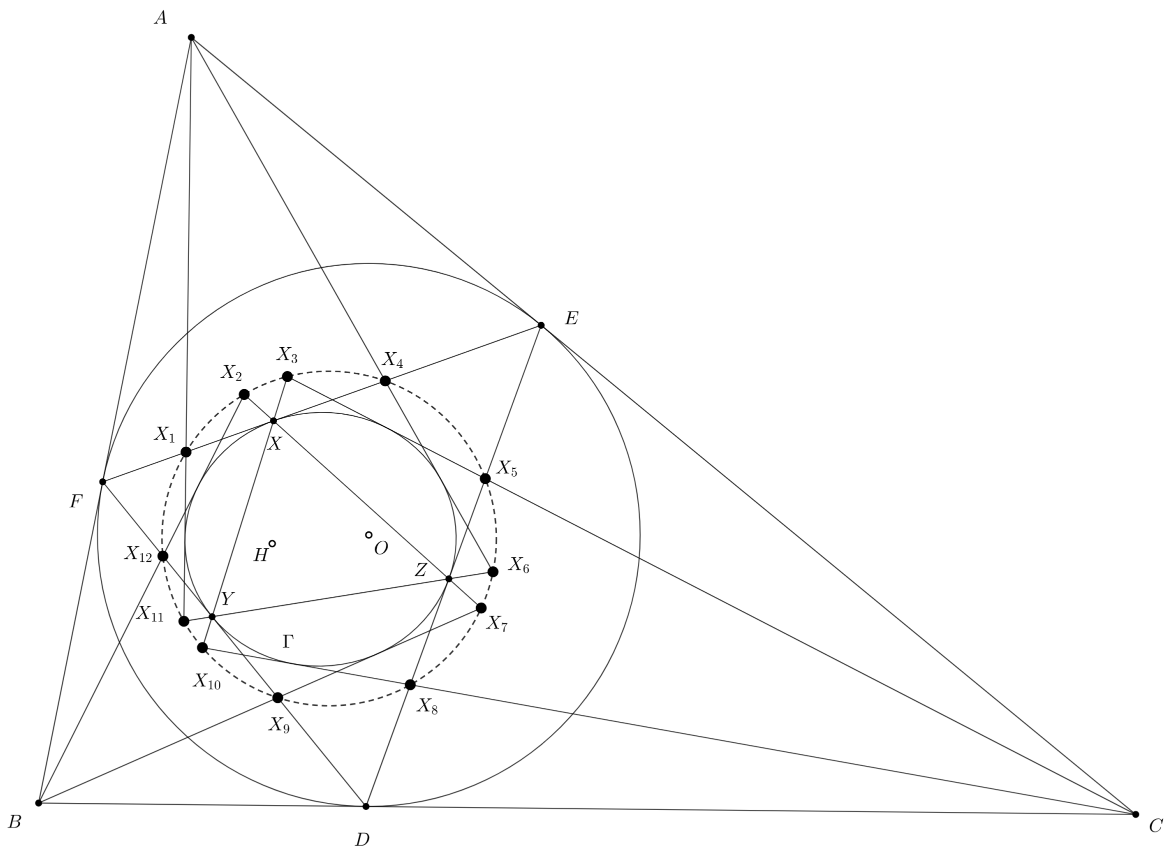
12(18) точек на одной окружности и касательные к эллипсу Макбита

Кирилл Бельский

Теорема.
Вписанная окружность $\triangle ABC$ касается сторон BC, AC, AB в точках D, E, F соответственно. Точки O, H центр описанной окружности и ортоцентр $\triangle DEF$ соответственно. Эллипс Γ с фокусами O, H касается сторон EF, DF, DE в точках X, Y, Z соответственно. Отметим следующие 12 точек: пересечение касательных из точки A к Γ с прямыми EF, YZ, пересечение касательных из точки B к Γ с прямыми DF, XZ и пересечение касательных из точки C к Γ с прямыми DE, XY. Тогда 12 отмеченных точек лежат на одной окружности.



Обозначим отмеченные точки,как на картинке ниже.



Текстовая форма.

Касательные из точки A к Γ пересекают прямую EF в точках X_1, X_4 так, что F, X_1, X_4, E лежат на прямой в таком порядке. Касательные из точки A к Γ пересекают прямую YZ в точках X_{11}, X_6 так, что X_{11}, Y, Z, X_6 лежат на прямой в таком порядке и $X_{11} \in AX_1, X_6 \in AX_4$. Касательные из точки B к Γ пересекают прямую DF в точках X_9, X_{12} так, что D, X_9, X_{12}, F лежат на прямой в таком порядке. Касательные из точки B к Γ пересекают прямую XZ в точках X_2, X_7 так, что X_7, Z, X, X_2 лежат на прямой в таком порядке и $X_2 \in AX_{12}, X_7 \in AX_9$. Касательные из точки C к Γ пересекают прямую DE в точках X_5, X_8 так, что E, X_5, X_8, D лежат на прямой в таком порядке. Касательные из точки C к Γ пересекают прямую XY в точках X_3, X_{10} так, что X_{10}, Y, X, X_3 лежат на прямой в таком порядке и $X_3 \in AX_5, X_{10} \in AX_8$.

План доказательства теоремы.

Утверждение 1. X_1, X_4, X_6, X_{11} лежат на одной окружности с центром на прямой OH.
Утверждение 2. $X_1, X_4, X_5, X_8, X_9, X_{12}$ лежат на одной окружности с центром на OH.
Доказательство теоремы.
Из *утверждения 1* следует, что серединный перпендикуляр к отрезку X_1X_4 пересекает прямую OH в центре окружности, на которой лежат точки X_1, X_4, X_6, X_{11}, с другой стороны по *утверждению 2* этот центр совпадает с центром окружности, на которой лежат точки $X_1, X_4, X_5, X_8, X_9, X_{12}$. Следовательно, точки $X_1, X_4, X_5, X_6, X_8, X_9, X_{11}, X_{12}$ лежат на одной окружности. Аналогично точки $X_1, X_2, X_4, X_5, X_7, X_8, X_9, X_{12}$ лежат на одной окружности и точки $X_1, X_3, X_4, X_5, X_8, X_9, X_{10}, X_{12}$ лежат на одной окружности.
$\blacksquare$
Далее будем обозначать за $\odot(M)$ описанную окружность многоугольника M и за $Pow(X, \Omega)$ степень точки X относительно окружности Ω.
Доказательство лемм, которые сформулированы ниже можно найти в [1].

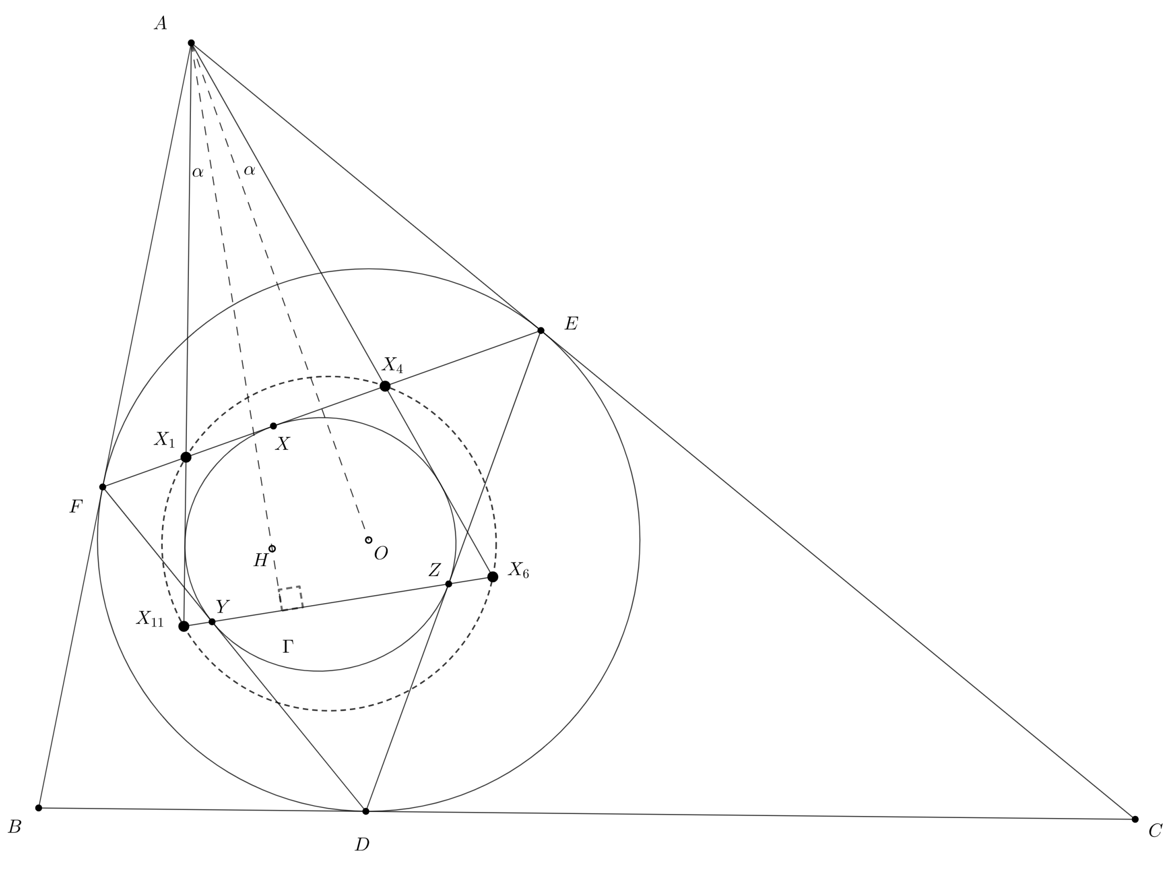
1. Доказательство утверждения 1.

Шаг 1.1. $AH \perp YZ$.
Доказательство.
Сформулируем лемму.
Лемма 1.
Даны $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$. Оказалось, что перпендикуляры из точки A к прямой EF, из точки B к прямой DF, из точки C к прямой DE пересекаются в одной точке. Тогда перпендикуляры из точки D к прямой BC, из точки E к прямой AC, из точки F к прямой AB также пересекаются в одной точке.

Вернёмся к доказательству. Так как $\angle(XH, EF) = 90^\circ - \angle ODH$. Следовательно, $HX \perp BC$. Аналогично $HY \perp AC$ и $HZ \perp AB$. Тогда $AH \perp YZ$ по *лемме 1* для $\triangle DYZ$ и $\triangle AEF$. $\blacksquare$

Шаг 1.2. Точки X_1, X_4, X_6, X_{11} лежат на одной окружности.
Доказательство.
Сформулируем лемму и некоторые её следствия.
Лемма 2.
Дан эллипс с фокусами F_1, F_2 и точка A, которая лежит вне эллипса. Тогда биссектриса угла F_1AF_2 совпадает с биссектрисой угла, образованного касательными из точки A к эллипсу.
Следствие 2.1.
Точки O, H центр описанной окружности и ортоцентр $\triangle ABC$ соответственно. Обозначим за Γ эллипс с фокусами O, H, который касается сторон $\triangle ABC$. Прямая l касается эллипса Γ. Тогда проекции точек O и H на прямую l лежат на окружности девяти точек $\triangle ABC$.

Следствие 2.2.
Дан $\triangle ABC$ с центром описанной окружности O и ортоцентром H. Эллипс с фокусами O, H касается стороны BC в точке X и сторон AB, AC. Точка X' симметрична точке X относительно середины стороны BC. Тогда точки A, O, X' лежат на одной прямой.
Доказательство следствия 2.2.
Обозначим за H' повторное пересечение прямой AH и окружности $\odot(ABC)$. Тогда по *лемме 2* точки O, H', X лежат на одной прямой. Обозначим за A' точку диаметрально противоположную точке A в окружности $\odot(ABC)$. Тогда $A'H' \parallel BC$. Следовательно, точки H' и A' симметричны относительно серединного перпендикуляра к BC, поэтому точки A', X', O лежат на одной прямой. $\blacksquare$
Вернёмся к доказательству *шага 1.2.* Так как $AO \perp EF$ и по *лемме 2* прямые AO, AH изогонали относительно $\angle X_1AX_4$. Следовательно, $\angle AX_1X_4 = \angle AX_6X_{11}$. $\blacksquare$

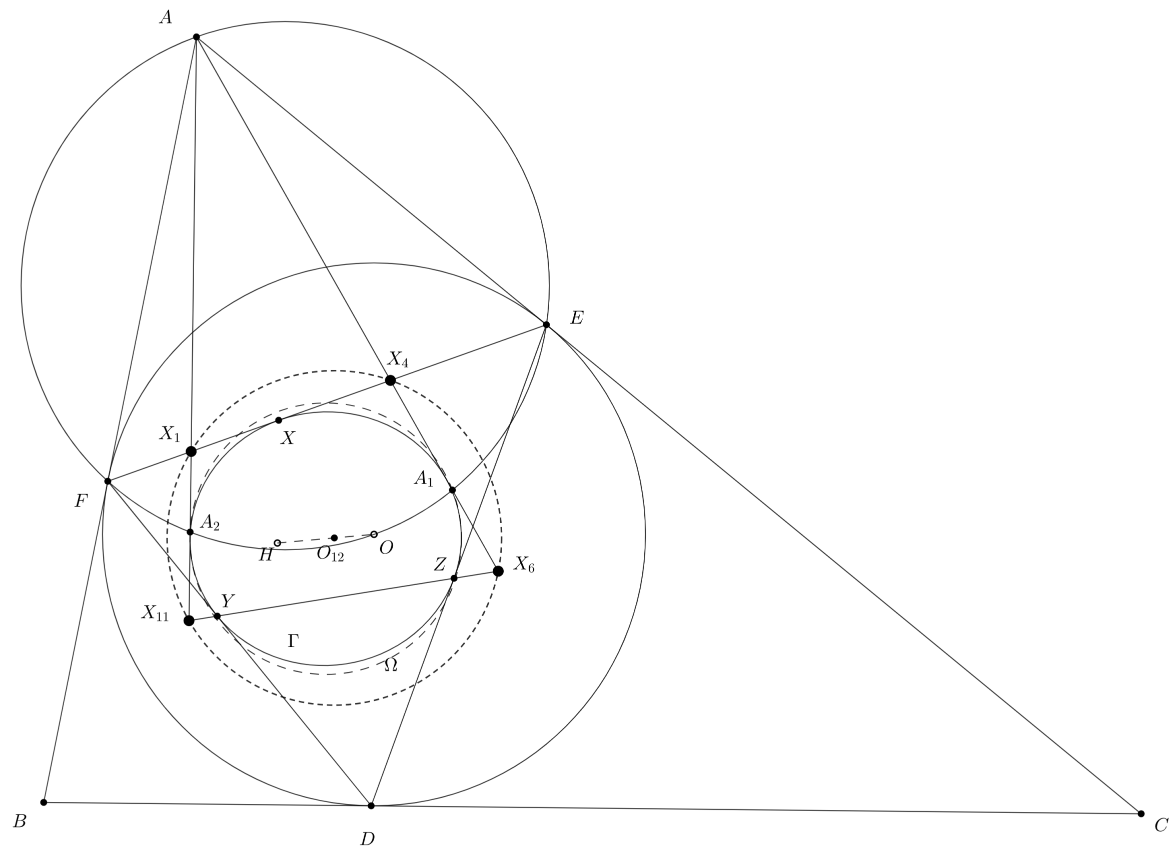


Основания перпендикуляров на прямые AX_1 и AX_4 из точек O, H по *следствию 2.1* будут лежать на окружности девяти точек треугольника $\triangle DEF$. Обозначим её Ω. Обозначим за A_1, A_2 две точки пересечения окружностей Ω и $\odot(AEFO)$ так, что $A_1 \in AX_4$ и $A_2 \in AX_1$.

Шаг 1.3. $A_1A_2 \parallel YZ$.

Доказательство.

Так как прямая AH получается из линии центров окружностей Ω и $\odot(AEFO)$ гомотетией с центром в точке O и коэффицентом 2 и A_1A_2 радикальная ось Ω и $\odot(AEFO)$. Следовательно, $A_1A_2 \parallel YZ$. ■



Шаг 1.4. Касательная в точке A к окружности $\odot(ABC)$ и EF и YZ пересекаются в одной точке.

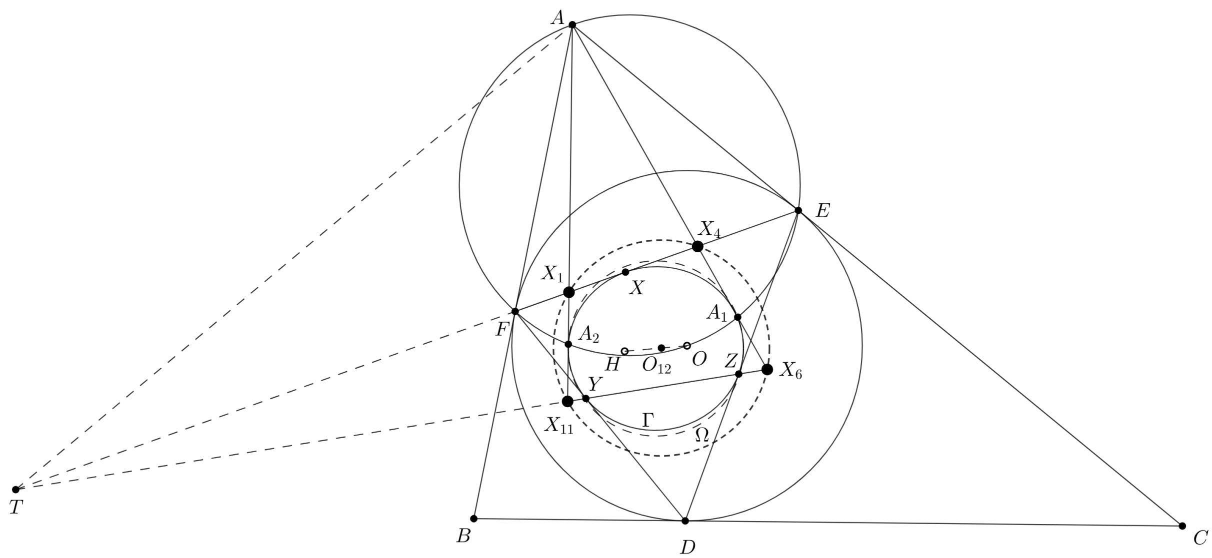
Доказательство.

Сформулируем лемму.

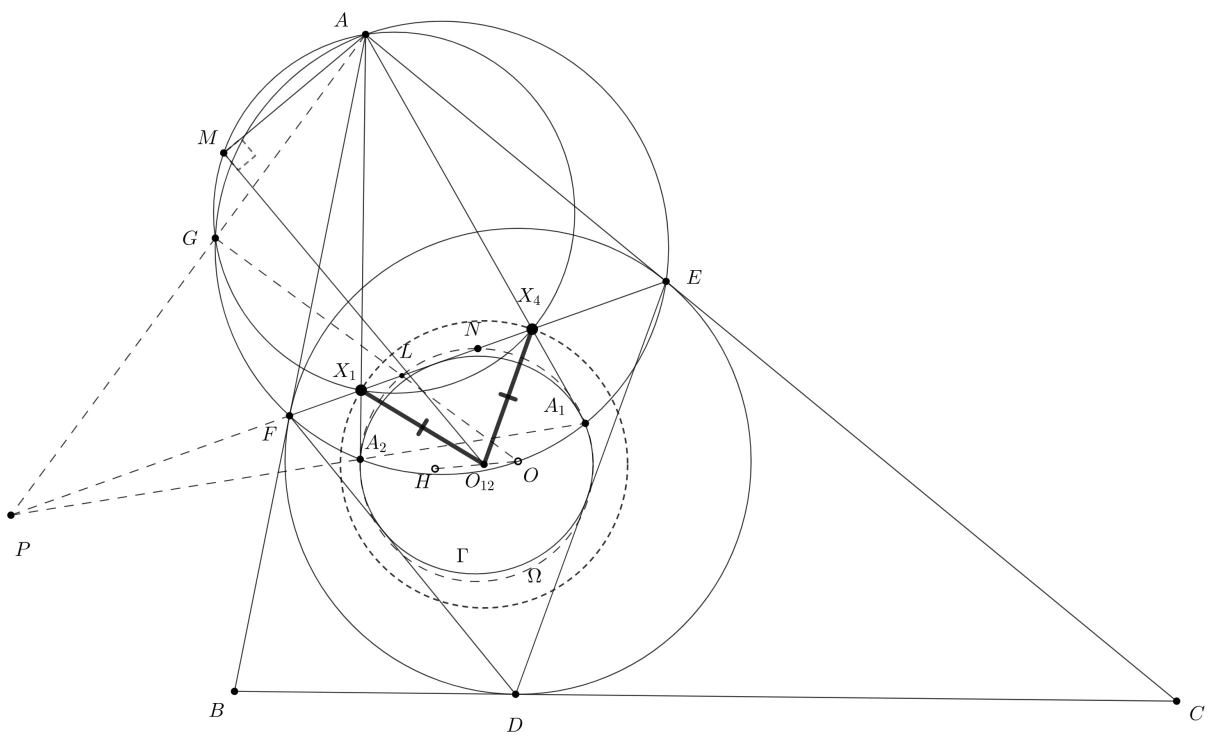
Лемма 3.

Вписанная окружность $\triangle ABC$ с центром в точке I касается сторон BC, AC, AB в точках D, E, F соответственно. Тогда точка пересечение прямых ID и EF лежит на медиане из вершины A в $\triangle ABC$.

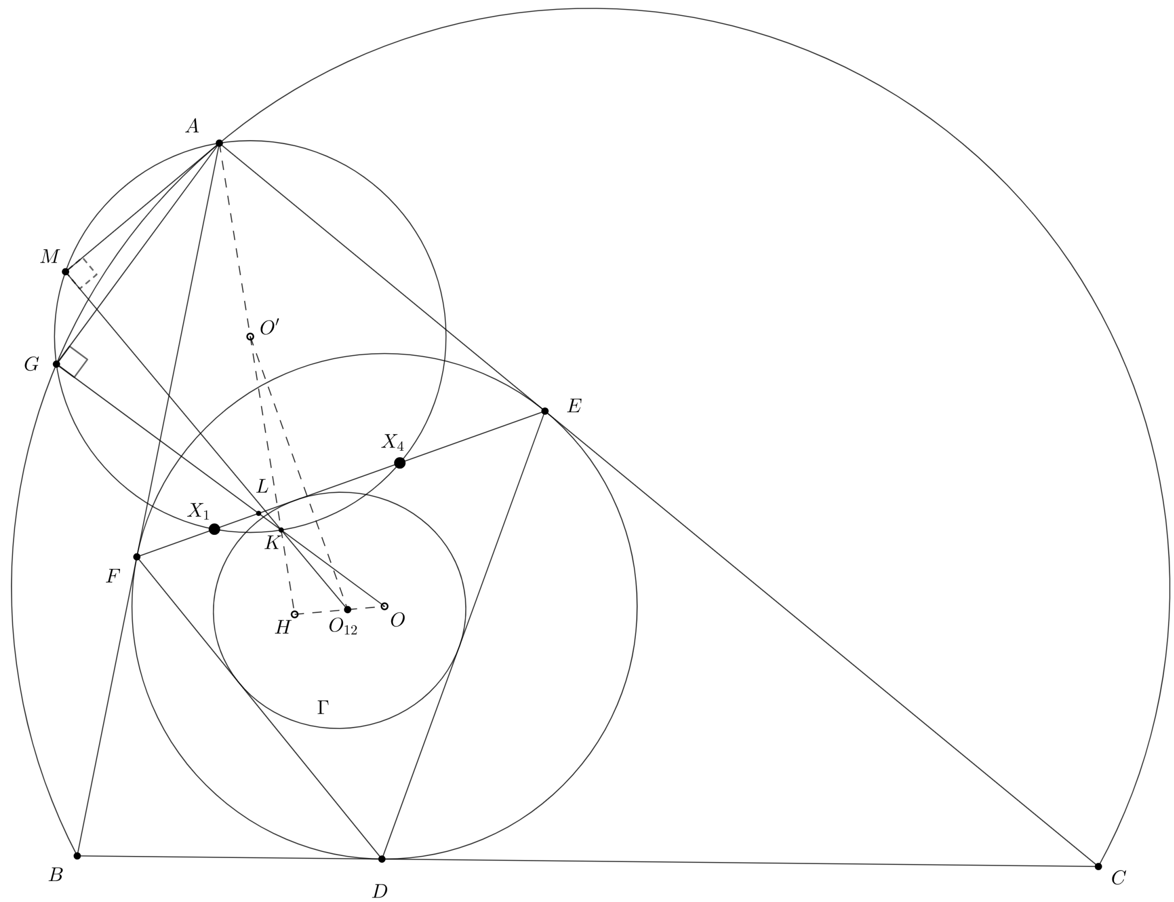
Вернёмся к доказательству. Прямая AX симедиана в $\triangle ABC$ так, как по *лемме 3* прямые OD, EF пересекаются на медиане из вершины A в $\triangle ABC$. Обозначим за T пересечения прямых YZ и EF. Заметим,что $(E, F, X, T) = -1$ так, как по *следствию 2.2* прямые DX, EY, CZ пересекаются в одной точке, которая изотомически сопряжена точке O относительно $\triangle DEF$. Следовательно прямая TA касается окружности $\odot(ABC)$. ■



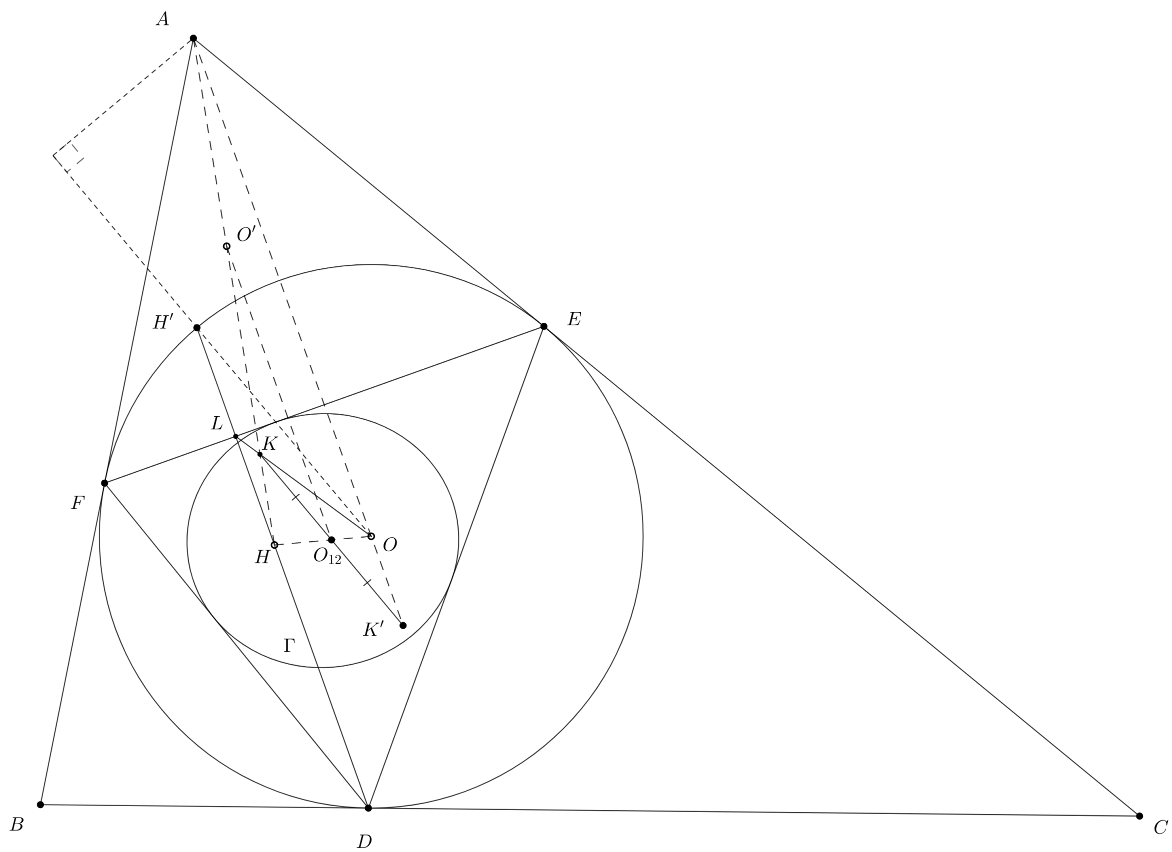
Шаг 1.5. Окружности $\odot(ABC), \odot(AEF), \odot(AX_1X_4)$ соосны.
Доказательство.
Обозначим за G точку Микеля $X_1X_4A_1A_2$. Прямые A_1A_2 и EF пересекаются в точке P. Тогда $G \in AP, G \in \odot(AX_1X_4), G \in \odot(AEF)$. Обозначим за N середину отрезка EF. DL высота треугольника $\triangle DEF$. Тогда $PA_2 * PA_1 = PL * PN = PG * PA$. Следовательно, $\angle AGL = 90°$ и O, G, L лежат на одной прямой, поэтому $G \in \odot(ABC)$ так, как окружности $\odot(ABC)$ и Ω инверсны относительно окружности $\odot(DEF)$. ■



Обозначим O_{12} центр окружности $\odot(X_1X_4X_6X_{11})$. Обозначим за M точка Микеля $X_1X_4X_6X_{11}$. Следовательно, $M \in AT, M \in \odot(AX_1X_4)$ и $MO_{12} \perp AT$. Обозначим за K точку диаметрально противоположную точке A в окружности $\odot(AX_1X_4)$. Тогда $K \in OG$ и $K \in O_{12}K$. Далее мы будем считать, что точка O_{12} лежит на прямых OH и MK и надо доказать, что $O_{12}X_1 = O_{12}X_4$. Обозначим за O' центр окружности $\odot(AX_1X_4)$. Тогда точка O' середина отрезка AK. Достаточно доказать,что $O'O_{12} \perp EF \parallel AO$.

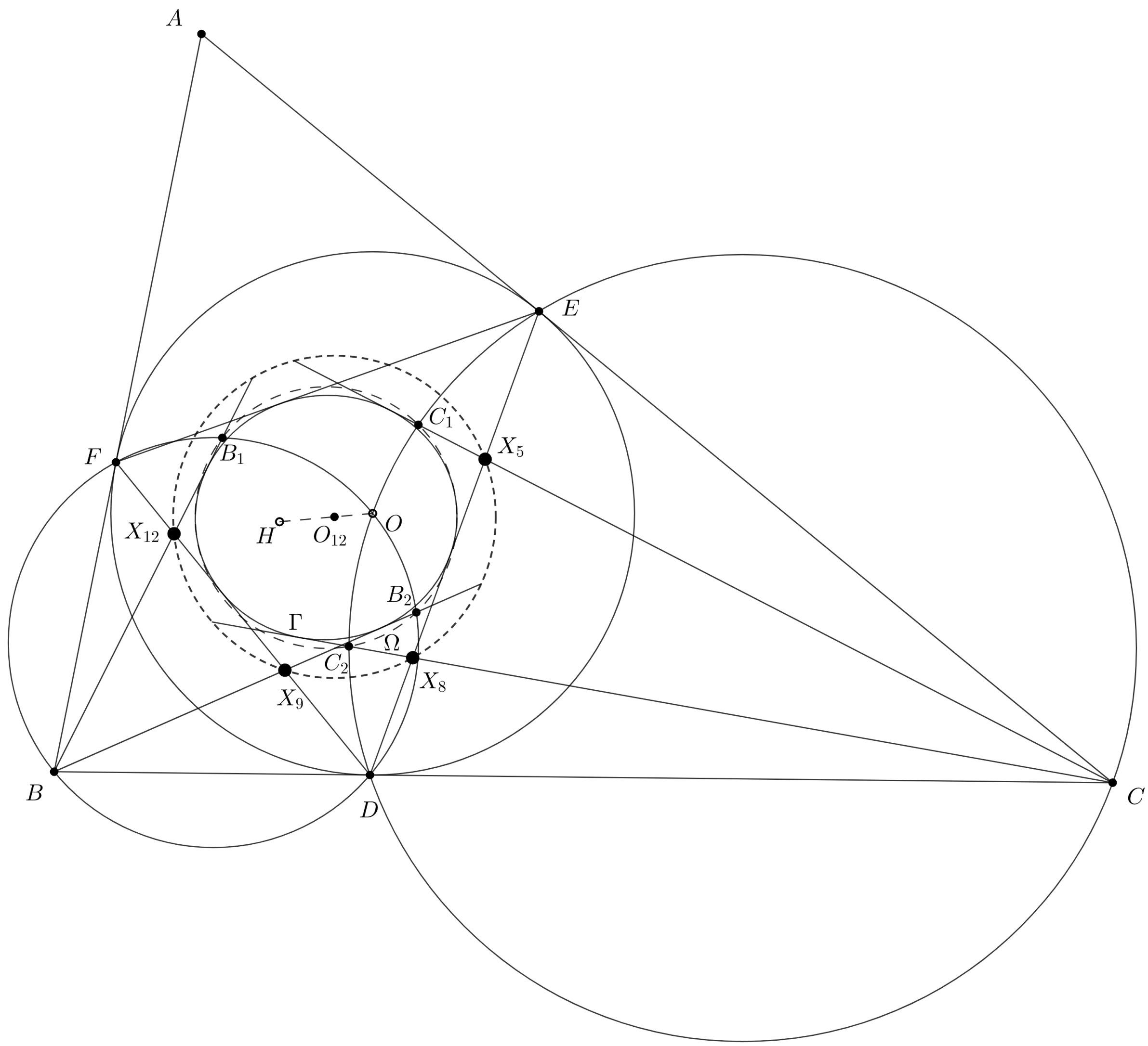


Шаг 1.6. $O'O_{12} \parallel AO$.
Доказательство.
Обозначим за H' точку симметричную точке H относительно EF. Точка K' симметрична точке K относительно O_{12}. Следовательно, прямая $OH' \perp$ касательной из точки H' к окружности $\odot(DEF)$, которая $\parallel$ касательной из точки A к окружности $\odot(ABC)$. Тогда $-1 = (H, H', L, \infty_{HD}) = O(O_{12}, \infty_{O_{12}K}, K, AO \cap O_{12}K)$. Следовательно, $K' \in AO$. $\blacksquare$



2. *Доказательство утверждения 2.*

Достаточно доказать,что точки X_5, X_8, X_9, X_{12} лежат на одной окружности с центром на прямой OH так, как прямые $X_5X_8, X_9X_{12}, X_4X_1$ не пересекаются в одной точке. Определим пары точек $(B_2, B_1), (C_2, C_1)$ как проекции точки O на касательные из точек B, C к Γ соответственно. Тогда по *Следствию 2.1* $B_1, B_2, C_1, C_2 \in \Omega$. Будем доказывать, что четырёхугольник $X_5X_8X_9X_{12}$ вписанный и центр его описанной окружности лежит на прямой OH. Обозначать его на картинке будем тоже O_{12}.



Будем обозначать образы при инверсии относительно окружности $\odot(DEF)$ штрихами. Для начала посмотрим на образы точек B_1, B_2, C_1, C_2. Тогда $B_1', B_2', C_1', C_2' \in \odot(ABC)$, $B_1', B_2' \in DF, C_1', C_2' \in DE$. Теперь посмотрим на образы точек X_5, X_8, X_9, X_{12}. Тогда $X_5', X_8', X_9', X_{12}'$ проекции точки O на прямые $CC_1', CC_2', BB_1', BB_2'$ соответственно. Также отметим образы точек A, B, C. Слдеовательно точки A', B', C' середины отрезков EF, DF, DE соответственно. Обозначим за J центр окружности $\odot(ABC)$. Широко известно, что $J \in OH$. Достаточно доказать, что $X_5', X_8', X_9', X_{12}'$ лежат на одной окружности с центром на прямой OJ. Обозначим точки R, S середины отрезков BB'_2, CC'_2 соответственно, то есть проекции точки J на прямые BB'_2, CC'_2.

Шаг 2.1. Прямые BO и BJ симметричны относительно биссектрисы угла $B'_1BB'_2$ и прямые CO и CJ симметричны относительно биссектрисы угла $C'_1CC'_2$.

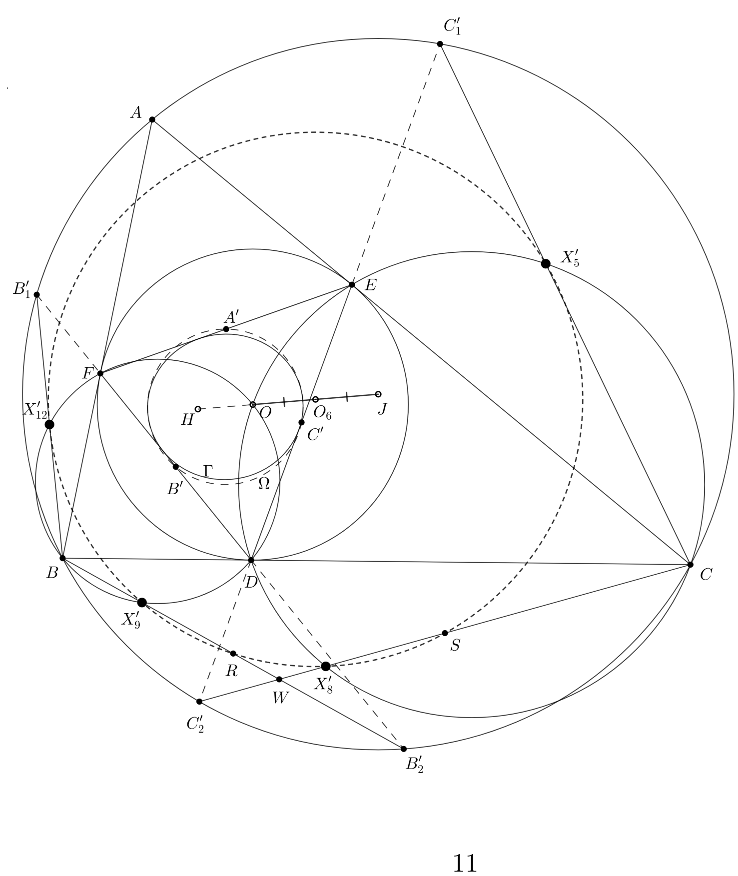
Доказательство.

Это верно так, как $BO \perp B'_1B'_2$ и $CO \perp C'_1C'_2$. ■

Шаг 2.2. Точки O, J изогонально сопряжены в четырёхугольнике, образованном прямыми $BB'_1, BB'_2, CC'_1, CC'_2$.

Доказательство.

Точки R, S центры окружностей $\odot(BB'B'_2), \odot(CC'C'_2)$. Тогда $-Pow(W, \odot(BB'B'_2)) = WB * WB'_2 = WC * WC'_2 = -Pow(W, \odot(CC'C'_2))$ и $Pow(O, \odot(BB'B'_2)) = OB * OB' = OD^2 = OC * OC' = Pow(O, \odot(CC'C'_2))$, поэтому $RS \perp OW$. Также прямые OW и JW симметричны относительно биссектрисы угла BWC, поэтому точки O, J изогонально сопряжены в четырёхугольнике, образованном прямыми $BB'_1, BB'_2, CC'_1, CC'_2$. Следовательно,точки $X'_5, X'_8, X'_9, X'_{12}$ лежат на одной окружности с центром в середине OJ. Отметим, что мы доказали,что образы при инверсии относительно $\odot(DEF)$ средних точек отрезков $CC'_1, CC'_2, BB'_2, BB'_1, AA'_1, AA'_2$ также лежат на этой окружности. ■



References

[1] - Акопян А., Заславский А. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2007.