

ОТЗЫВ НА РАБОТУ К. БЕЛЬСКОГО «12(18) точек на одной окружности и касательные к эллипсу Макбита»

В работе исследуется оригинальная конструкция, связанная с эллипсом, вписанным в треугольник, образованный точками касания вписанной окружности треугольника с его сторонами, и фокусами в ортоцентре и центре описанной окружности этого треугольника (эллипс Макбита). С этим эллипсом связываются 12 точек, лежащих на касательных, проведенных к эллипсу Макбита. Основным результатом работы заключается в доказательстве того, что эти 12 точек лежат на одной окружности.

Результаты, представленные в работе, являются верными, однако не все доказательства этих результатов являются завершенными, часть рассуждений в них обрывочна и непонятна при чтении. Некоторые логические шаги пропущены, и читателю приходится восстанавливать их самостоятельно (что не всегда просто сделать без отдельного чертежа). В связи с этим не могу рекомендовать текущую версию работы к принятию в номинацию учебно-исследовательских работ.

Так, следующие замечания не позволяют считать указанные ниже рассуждения завершенными и логически верными.

- Шаг 1.1. Фраза «Так как $\angle(XH, EF) = 90^\circ - \angle ODH$ » выглядит очень странно: само равенство не является очевидным, сам смысл предложения непонятен.
- Шаг 1.2. 1) Не приводится доказательство следствия 1.2. Непонятно, как именно оно следует из леммы 2 (опять же, хорошо известной и вряд ли нуждающейся в отдельном упоминании). 2) В рассуждении «Так как $AO \perp EF$ и по лемме 2 прямые AO , AH изогнали относительно $\angle X_1AX_4$. Следовательно, $\angle AX_1X_4 = \angle AX_6X_{11}$ », которое и составляет доказательство утверждения из шага 1.2, пропущена ссылка на результат шага 1.1, без которого фраза «Следовательно, $\angle AX_1X_4 = \angle AX_6X_{11}$ » не будет следовать из написанного ранее.
- Шаг 1.4. 1) Утверждение «Прямая AX симедиана в $\triangle ABC$ так, как по лемме 3 прямые OD , EF пересекаются на медиане из вершины A в $\triangle ABC$ » нуждается в пояснении: в лемме 3 никак не фигурировала точка X , и непонятно, какими ее свойствами нужно воспользоваться, чтобы понять, что AX — симедиана. 2) «Следовательно прямая TA касается окружности (ABC) » — все же стоит перейти от гармонической четверки точек к гармонической четверке прямых.
- Шаг 1.5. 1) «Тогда $PA_2 * PA_1 = PL * PN = PG * PA$ » Первое равенство в этой цепочке определенно нуждается в пояснении, а второе вообще непонятно; скорее порядок должен быть таким: $PG * PA = PA_2 * PA_1 = PL * PN$. 2) «Следовательно, $\angle AGL = 90^\circ$ » — тоже нужно пояснение, поскольку это следует из одного из предыдущих равенств (а именно, из равенства $PG * PA = PL * PN$) и из подобия треугольников PGL и PNA , о котором ничего не сказано. 3) «[...] так, как окружности (ABC) и Ω инверсны относительно окружности (DEF) » Вот это утверждение точно необходимо выделить как-то отдельно: или сослаться на источник, где оно имеется, или сформулировать явно.
- Стр. 7. 1) «Тогда $K \in OG$ и $K \in O_{12}K$ » Первое утверждение нужно пояснить, во втором — исправить опечатку (должно быть $K \in O_{12}M$). 2) «Достаточно доказать, что $O'O_{12} \perp EF \parallel AO$ » Во-первых, непонятно, почему достаточно доказать только это, во-вторых, как надо читать данную формулу: что в ней дано, что доказывается. Ну и EF , конечно, перпендикулярно AO , а не параллельно.

- Стр. 8. 1) «Следовательно, прямая $OH' \perp$ касательной из точки H' к окружности (DEF) , которая \parallel касательной из точки A к окружности (ABC) ». Все наоборот: прямая OH' перпендикулярна касательной из H' к (DEF) , поскольку содержит радиус, проведенный в точку касания, а касательные параллельны, поскольку касательная из A содержит точку M . Возможно, автор имел в виду именно это, но написанное имеет совершенно другой смысл. 2) « $-1 = (H, H', L, \infty_{HD}) = O(O_{12}, \infty_{O_{12}K}, K, AO \cap O_{12}K)$ ». Нужно указать, на какую прямую мы проектируем четверку точек, и центр проекции вынести в верхний индекс.
- Стр. 10. 1) «Тогда $X'_5, X'_8, X'_9, X'_{12}$ проекции точки O на прямые $CC'_1, CC'_2, BB'_1, BB'_2$ соответственно.» Это утверждение нужно пояснить. 2) «Следовательно точки A', B', C' середины отрезков EF, DF, DE соответственно.» Опечатка в первом слове, и этот факт не следует из того, что мы просто отметили какие-то точки; нужно сказать по-другому, например, сославшись на равенство $AO \cdot A'O = OE^2$ в прямоугольном треугольнике AEO и высотой EA' . 3) «Широко известно, что $J \in OH$.» Нужна ссылка на этот факт.
- Шаг 2.1. «Это верно так, как $BO \perp B'_1B'_2$ и $CO \perp C'_1C'_2$.» Нужно провести рассуждение более подробно, например, выделить явно треугольник $BB'_1B'_2$, в котором проведены радиус описанной окружности и высота из вершины B .
- Шаг 2.2. 1) «[...] поэтому $RS \perp OW$.» Нужно пояснить, почему это следует из формул выше: точки R и S лежат на радикальной оси окружностей $(BB'_1B'_2)$ и $(CC'_1C'_2)$. 2) «Также прямые OW и JW симметричны относительно биссектрисы угла BWC , [...]» Складывается впечатление, что это утверждение не зависит от предыдущего, в котором доказана перпендикулярность прямых RS и OW , но это не так. Необходимо поправить формулировку. 3) «Следовательно, точки $X'_5, X'_8, X'_9, X'_{12}$ лежат на одной окружности с центром в середине OJ .» Как именно это следует из предыдущего? Необходимо пояснение в виде ссылки на свойства изогонального сопряжения в четырехугольнике. 4) «Отметим, что мы доказали, что образы при инверсии относительно (DEF) средних точек отрезков $CC'_1, CC'_2, BB'_2, BB'_1, AA'_1, AA'_2$ также лежат на этой окружности.» Вновь необходимо пояснение со ссылкой на свойства изогонального сопряжения в четырехугольнике.

Помимо указанных пробелов, чтение текста затрудняют следующие моменты.

- Выбранная автором система обозначений крайне затрудняет восприятие текста. Особенно трудно держать в голове нумерацию точек X_i . Приходится постоянно обращаться к основному чертежу, чтобы вспомнить, о каких именно точках идет речь в том или ином фрагменте текста. Также треугольник ABC , заявленный как основной, на самом деле выглядит второстепенным, поэтому кажется более правильным взять за основу треугольник DEF .
- Хотелось бы иметь некоторый план доказательства. Сейчас оно разбито на шаги, но при этом мотивировки для каждого отдельного шага не приводятся, поэтому в некоторых ситуациях совершенно непонятно, зачем делается тот или иной шаг. Например, дойдя до шага 1.6, который завершает доказательство утверждения 1 фразой «Следовательно, $K' \in AO$ », уже не помнишь, а что мы вообще доказывали, и почему это действительно доказано.
- Очень трудно, когда в процессе доказательства какого-то утверждения внезапно формулируется и доказывается новое утверждение: приходится отвлекаться на него, потом возвращаясь к основному результату. Логичнее было бы вынести все вспомогательные

утверждения в начало каждого раздела (или даже сделав отдельный раздел, состоящий из вспомогательных и подготовительных утверждений), чтобы затем можно было бы ссылаться на них, не прерывая логической цепочки рассуждений основных результатов.

- Огромное количество предложений в тексте трудно воспринимаются из-за неправильно расставленных знаков препинания и странных словесных оборотов. Например, «Точки O , H центр описанной окружности и ортоцентр $\triangle ABC$ соответственно.», «Так как прямая AH получается из линии центров окружностей Ω и (AEF) гомотетией с центром в точке O и коэффициентом 2 и A_1A_2 радикальная ось Ω и (AEF) .», «Обозначим за M точка Микеля $X_1X_4X_6X_{11}$.» и т.д.
- Многие леммы, выделенные как вспомогательные, являются хорошо известными и не требующими отдельной формулировки. С другой стороны, важные детали применения этих лемм зачастую опускаются, что совершенно путает читателя: известные ему леммы явно формулируют, а неизвестные ему применения этих лемм — нет. Например, лемма 1 хорошо известна, поэтому достаточно сослаться на нее как на готовое утверждение, не формулируя ее отдельно, а частичное совпадение обозначений из формулировки этой леммы и шага, в котором она применяется, мешает при чтении. Также хорошо известна лемма 2, но вот получение из этой леммы утверждения следствия 2.1 вряд ли настолько очевидно, что незнакомый с ним читатель сможет сделать это в уме.
- Использование в одной формуле $\angle(XH, EF) = 90^\circ - \angle ODH$ ориентированных и обычных углов странно: стоит придерживаться лишь одного стиля.
- Доказательство шага 1.4. «Обозначим за T пересечения прямых YZ и EF . Заметим, что $(E, F, X, T) = -1$ так, как по следствию 2.2 прямые DX , EY , CZ пересекаются в одной точке, которая изотомически сопряжена точке O относительно $\triangle DEF$ » — гораздо проще сослаться на вырожденный случай теоремы Брианшона, применение следствия 2.2 и изотомической сопряженности только усложняет рассуждение.
- Доказательство шага 1.5. «Тогда $G \in AP$, $G \in (AX_1X_4)$, $G \in (AEF)$ — совершенно непонятно, зачем указаны последние две принадлежности: они верны по определению точки Микеля. «Прямые A_1A_2 и EF пересекаются в точке P . [...] DL высота треугольника $\triangle DEF$.» Непонятно, откуда взялись точки P и L . Если они вводятся, нужно указать это явно, например: пусть P — точка пересечения прямых A_1A_2 и EF .
- Стр. 9. Определения пар точек (B_1, B_2) и (A_1, A_2) отличаются, хотя обозначения у них схожи. Стоит либо определить их одинаково, либо поменять обозначения.
- Доказательство шага 2.2. «Отметим, что мы доказали, что образы при инверсии относительно (DEF) средних точек отрезков CC'_1 , CC'_2 , BB'_2 , BB'_1 , AA'_1 , AA'_2 также лежат на этой окружности.» Предлагаю убрать это утверждение: сами точки не представляют особого интереса в отрыве от доказательства (по крайней мере, в работе об их свойствах ничего не говорится).

Хотел бы также отметить, что ни одно из указанных выше замечаний не является критическим с точки зрения справедливости основных результатов работы. По-видимому, автору потребуется серьезная работа над текстом, но, уверен, после завершения такой работы результаты могут быть представлены к публикации в одном из геометрических журналов. Также автору стоит подумать о возможных обобщениях его результатов, например, в следующих двух направлениях.

1. Вместо пары точек (O, H) можно взять пару изогонально сопряженных точек в треугольнике DEF . В таком случае, согласно экспериментам в Геогebre, указанные автором 12 точек будут лежать на одной конике. Было бы интересно доказать эту гипотезу, а также исследовать данную конику. Например, узнать, какой пучок порождается этой коникой и коникой, вписанной в треугольник DEF ; есть ли в нем какие-то понятные объекты (вписанная / описанная окружность?).
2. В частном случае, когда в роли две изогональные точки из предыдущего пункта склеиваются в центр вписанной окружности треугольника DEF , возникает известная конструкция из гипотезы Долгирева, впоследствии исследованная А. Заславским, Шутовым, Герасимовым и Шевцовым. Было бы интересно понять, можно ли применить результаты автора к доказательству этой гипотезы (известные на данный момент доказательства являются весьма трудными) и к возможным ее обобщениям (например, указанным Шевцовым). Более того, кажется, именно это обстоятельство объясняет интерес автора к конструкции с эллипсом Макбита; об этом также стоит явно написать.