РЕШЕТКИ МАКСИМАЛЬНЫХ АНТИЦЕПЕЙ

Хоменко Анастасия, Кеелус Милена
Научный руководитель: Александр Леонидович Попович

2023
Январь–октябрь

Введение

Теория решеток исследует естественные иерархии, возникающие в человеческой деятельности, имеет много приложений в математике и информатике. Решетка обладает частичным порядком, но кроме того алгебраическими операциями объединения и пересечения, что позволяет строить конструкции на смешении этих языков.

Работа посвящена исследованию свойств конструкции представления конечных решеток решетками максимальных антицепей. В первых двух главах приведены необходимые определения и примеры понятий из общей теории решеток: частично упорядоченного множества, решетки, антицепи и максимальной антицепи. Для нашего исследования важна теорема о том, что любая конечная решетка представима как решетка максимальных антицепей некоторого ч.у. множества. Это порождает вопросы о том, единственное ли такое представление (ответ: нет), какие из таких представлений «наиболее информативные».

В данной работе мы обнаружили прекрасные свойства решеток максимальных антицепей, которые мы описываем и доказываем в третьей главе. Если высота ч.у. множества достаточно высока (больше 1), то в нем можно выделять подмножества максимальных антицепей, в некотором смысле «близкие» друг к другу. Данные подмножества образуют интервалы в решетке максимальных антицепей, а вся решетка распадается в «склеенную сумму» (определение будет дано ниже) таких интервалов, подобно одеялу сшитому из лоскутов.

С другой стороны, мы нашли конструкцию, которая позволяет построить по решетке такое ч.у. множество, у которого решетка максимальных антицепей изоморфна данной решетке, и которое обладает высотой больше 1, что уменьшает количество элементов в ч.у. множестве и дает дополнительную информацию о решетке. Работа над данной конструкцией продолжается.

Среди решеток выделяют класс дистрибутивных решеток, который играет центральную роль в теории решеток (по утверждению Г. Гретцера). Нам удалось показать, что всякая конечная дистрибутивная решетка является склеенной суммой булевых решеток (т.е. решеток всех подмножеств множеств), причем вся информация об этой сумме может быть удобно получена из конструкции решетки максимальных антицепей подходящего ч.у. множества.

Все факты разделов 3.2 и 3.3 не упомянуты ни в какой известной нам литературе.

В работе рассматриваются только конечные ч.у. множества и решетки.

1 Частично упорядоченное множество

Частично упорядоченное множество (далее ч.у. множество) - множество с заданным отношением порядка $\leqslant$, причем для любых x, y и z верно следующее:

1) $x \leqslant x$;
2) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$;
3) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$.

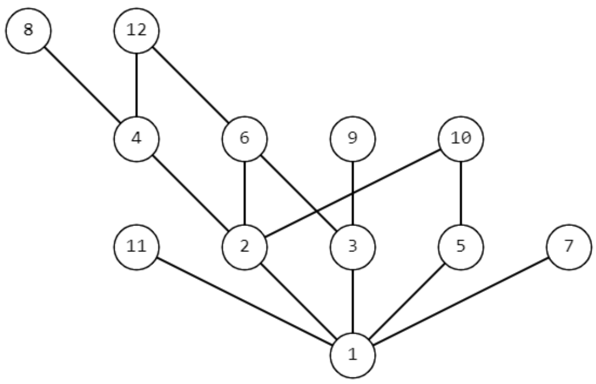
Примеры

1) Пусть $A(n)$ – множество чисел от 1 до n, а соотношение $x \leqslant y$ значит, что y делится на x.

2) Пусть $B(I)$ состоит из всех подмножеств I, включая само I и $\varnothing$. Соотношение $x \leqslant y$ означает, что $x \subseteq y$.

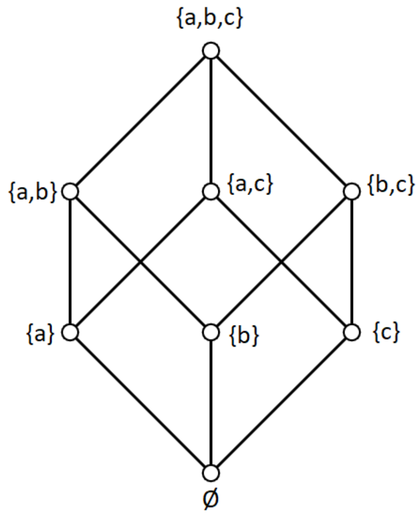
В конечных ч.у. множествах можно рассмотреть отношение $x \succ y$, что означает, что $x > y$, но не существует таких z, что $x > z > y$.

У конечного ч.у. множества можно нарисовать диаграмму, соединяя отрезком, идущим сверху вниз от x к y, если $x \succ y$. Вот примеры некоторых таких диаграмм:

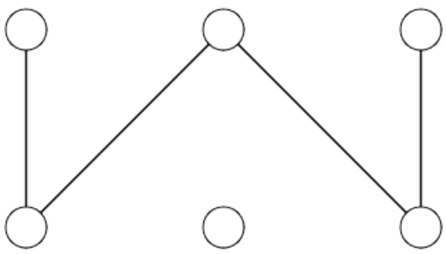


$A(12)$

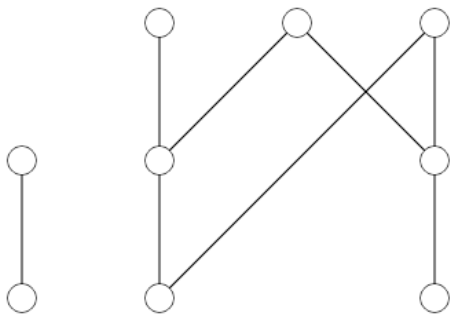
Хотя каждое из чисел 4, 6, 8, 9, 10 меньше числа 11, на диаграмме оно стоит ниже, потому что у него меньше делителей.



$B(\{a, b, c\})$



В ч.у.м могут быть отдельные несравнимые элементы...



или подмножества.

1.1 Грани

Элемент a множества A называется *максимальным*, если не существует $a' \in A$, такого что $a' > a$.

Элемент a множества A называется *наиболшим* если $\forall a' \in A$ верно, что $a \geqslant a'$

Элемент a множества A называется *минимальным*, если не существует $a' \in A$, такого что $a' < a$.

Элемент a множества A называется *наименьшим* если $\forall a' \in A$ верно, что $a \leqslant a'$.

Верхней гранью подмножества X в чуме P называется элемент $a \in P$, больший или равный всех $x \in X$.

Точная верхняя грань (или объединение) – это его наименьшая верхняя грань. Точную верхнюю грань двух элементов x и y будем обозначать как $x \vee y$.

Нижней гранью подмножества X в чуме P называется элемент $a \in P$, меньший или равный всех $x \in X$.

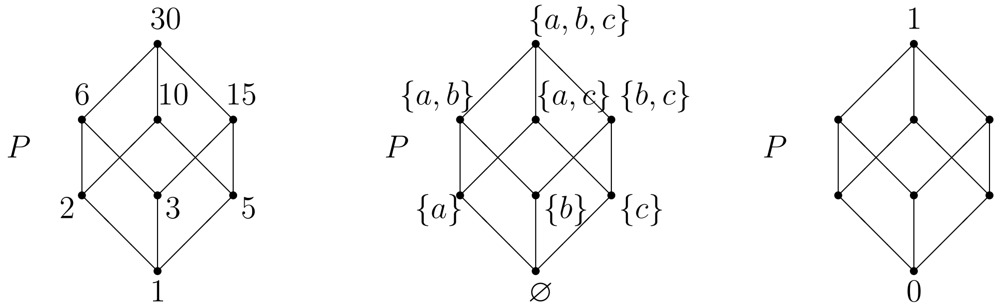
Точная нижняя грань (или пересечение) – это его наибольшая нижняя грань. Точную нижнюю грань двух элементов x и y будем обозначать как $x \wedge y$.

2 Решетки

Решеткой называется такое ч.у. множество, что любые два элемента имеют точную нижнюю и точную верхнюю грань.

В решетке можно взять объединение всех элементов – получится наибольший элемент ч.у. множества, который называется *единицей*. Двойственно показывается существование наименьшего элемента, который называется *нулем*.

Подрешетка $X \subseteq L$ – это такое подмножество решетки L, что если $a \in X$ и $b \in X$, то $a \wedge b \in X$ и $a \vee b \in X$.



Подмножество $\{1, 2, 3, 6\}$ – подрешетка. Объединение элементов 2 и 3 – элемент 6. Пересечение элементов 2 и 3 – элемент 1.

2.1 Операции

Следующие утверждения взяты из книги Г. Биркгофа «Теория решеток» (Глава 1.5).

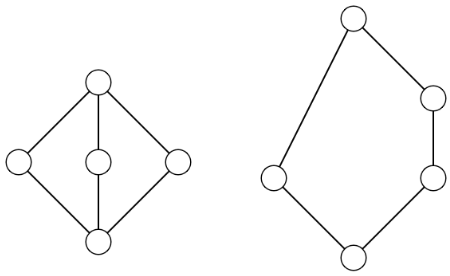
Лемма 1. *Для операций $\wedge$ и $\vee$ в любой решетке для любых x, y, z верно:*
1) $x \vee x = x$ и $x \wedge x = x$
2) $x \vee y = y \vee x$ и $x \wedge y = y \wedge x$
3) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ и $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
4) $x \vee (y \wedge x) = (x \wedge y) \vee x = x$

Лемма 2. *В любой решетке верны тождества:*
1) $x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
2) $x \wedge (y \vee z) \geqslant (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Решетка называется *дистрибутивной*, если в ней истинны следующие тождества:
1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
Известно, что эти тождества между собой эквивалентны.

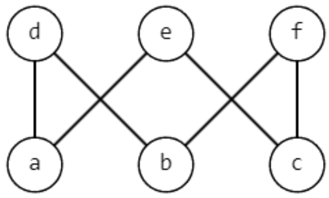
Известно, что решётка является дистрибутивной тогда и только тогда, когда она не содержит подрешёток такого вида:



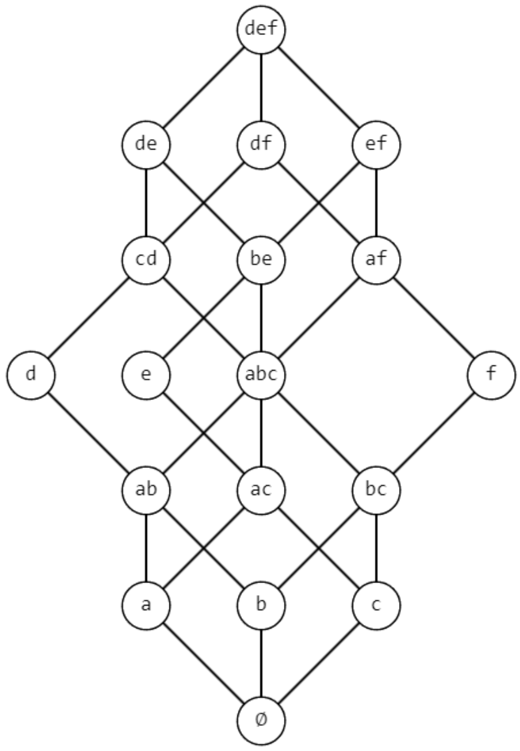
Важным примером дистрибутивных решеток являются решетки замкнутых вниз подмножеств ч.у. множеств. Если P – ч.у. множество и M – его подножество, то M замкнуто вниз, если для любого $m \in M$ и $x \in P$ из $x \leqslant m$ следует, что $x \in M$.

Множество всех замкнутых вниз подмножеств P образует дистрибутивную решётку $\mathrm{Down}\, P$ (с теоретико-множественными операциями). Более того, всякая дистрибутивная решетка изоморфна решетке $\mathrm{Down}\, P$, для подходящего P, в качестве которого можно взять множество элементов решетки, неразложимых в объединение (речь о них пойдет ниже). Таким образом, всякая конечная дистрибутивная решетка является подрешеткой в решетке всех подмножеств некоторого множества.

Пример 1:



P



$Down(P)$

Решётка L называется *булевой*, если для любого элементов a из L существует дополнение, т.е. такой элемент a' из L, что $a \wedge a' = 0$ и $a \vee a' = 1$. В литературе известна характеризация конечных булевых решеток – это (с точностью до изоморфизма) решетки всех подмножеств конечных множеств.

2.2 Интервалы

Для элементов a, b решетки L таких, что $a \leqslant b$ **интервалом [a, b]** будем называть подмножество $\{x \in L \mid a \leqslant x \leqslant b\}$. Наибольший элемент в $[a, b]$ это b, а наименьший – a.

Лемма 3. *Непустое пересечение интервалов – интервал*

Доказательство. Рассмотрим интервалы A и B в решетке P.

1. Пусть в $A \cap B$ есть такие x и y, что $\exists z \notin A \cap B$, такой что $x \geqslant z \geqslant y$. Тогда либо $z \notin A$, либо $z \notin B$, причем и x и $y \in A$ и $\in B$.

2. Пусть в $A \cap B$ нет наибольшего элемента (для наименьшего доказательство строится аналогично). Рассмотрим максимальные элементы x и y. Пусть a – объединение x и y в A, а b – в B. Так как P – решетка, то $a = b$. Но тогда $a \in A \cap B$. Противоречие.

Тогда $A \cap B$ – интервал. □

Лемма 4. *Если три интервала решетки попарно пересекаются, то пересечение этих интервалов не пусто.*

Доказательство. Обозначим данные интервалы за A, B и C. Пусь $A = [a, m]$, $B = [b, k]$ и $C = [c, l]$. Пусть $[d, g] = A \cap B$, $[e, h] = B \cap C$ и $[f, i] = C \cap A$

Утверждение 1: Если три интервала попарно пересекаются, то ноль одного интервала сравним с единицей пересечения двух других.

Доказательство. Рассмотрим перечесение m и k: $g \leqslant m, g \leqslant k$, значит $g \leqslant m \wedge k$. Также $m \geqslant i \geqslant c$ и $k \geqslant h \geqslant c$, значит $c \leqslant m \wedge k$. Пусть c и g не сравнимы. Тогда ни одно из них не $m \wedge k$ т.к. среди них нет наибольшего. Тогда $k \geqslant m \wedge k > g$, а значит $m \wedge k \in B$. Аналогично $m \geqslant m \wedge k > g \geqslant d$, а значит $m \wedge k \in A$. Но тогда $m \wedge k \in A \cap B$ и $m \wedge k \geqslant g$. Но $g \not< m \wedge k$ по определению. Тогда $m \wedge k = g$. Тогда $m \wedge k = g \geqslant c$, противоречие. Значит, g и c сравнимы. Аналогично сравнимы b и i, a и h. ЧТД.

Утверждение 2: Если два интервала пересекаются, то объединение их нулей это нуль их пересечения.

Доказательство. $b \leqslant e$, $c \leqslant e$, значит $b \vee c \leqslant e$. Тогда $k \geqslant e \geqslant b \vee c \geqslant b$ и $l \geqslant e \geqslant b \vee c \geqslant c$, а значит $b \vee c \in B \cap C$. В силу того что $b \vee c \leqslant e$ и e – нуль $B \cap C$, $b \vee c = e$. Противоречие. Аналогично $a \vee c = f$ и $a \vee b = d$. ЧТД.

Утверждение 3: Если два интервала пересекаются, то пересечение их единиц это единица их пересечения.

Доказательство. Двойственно утверждению 2.

Из утверждения 1 сравнимы элементы b и i, h и c. Рассмотрим несколько случаев:

Случай 1: $b \geqslant i$. Тогда $g \geqslant b \geqslant i \geqslant c$, а значит $b \in A$. Также $L \geqslant h \geqslant b \geqslant i$, а значит $b \in C$. Тогда $b \in A \cap B \cap C$ и лемма верна.

Случай 2: $b \leqslant i$, $g \leqslant c$. Тогда $i \geqslant c \geqslant g$, а значит $c \in A$. Также $e \geqslant c \geqslant g$, а значит $c \in B$. Тогда $c \in A \cap B \cap C$ и лемма верна.

Случай 3: $b \leqslant i$, $g \geqslant c$ и $e \geqslant f$. Поскольку $b \vee c = e$ (см. утверждение 2), $i \geqslant b$ (см. утверждение 1) и $i \geqslant c$, то $i \geqslant e$. Тогда $i \geqslant e \geqslant f \geqslant a$, а значит $e \in A$. По определению $e \in B \cap C$. Тогда $e \in A \cap B \cap C$ и лемма верна.

Случай 4: $b \leqslant i$, $g \geqslant c$ и $f \geqslant e$. В этом случае $b \geqslant i \geqslant f \geqslant e \geqslant b$, значит выполняется равенство и лемма верна.

Случай 5: $b \leqslant i$, $g \geqslant c$ и f и e несравнимы. $i \geqslant b$ и $i \geqslant c$, а значит $i \geqslant e$. Заметим, что $f = a \vee c$ (см. утверждение 2), а $h = k \wedge l$ (см. утверждение 3). В силу того что $k \geqslant d \geqslant a, k \geqslant h \geqslant c, l \geqslant f \geqslant a, l \geqslant c$ мы получаем $k \geqslant a \vee c, l \geqslant a \vee c$, а значит и $k \wedge l \geqslant a \vee c$. Но тогда $e \leqslant h, e \leqslant i, f \leqslant h, f \leqslant i$ и f и e несравнимы, поэтому e ни f не $h \wedge i$, а значит $h \wedge i \geqslant f$ и $h \wedge i \geqslant e$. Тогда $h \geqslant h \wedge i \geqslant e$, то есть $h \wedge i \in B \cap C$. Также $i \geqslant h \wedge i \geqslant f$, то есть $h \wedge i \in A \cap C$. Тогда $h \wedge i \in A \cap B \cap C$ и лемма верна. □

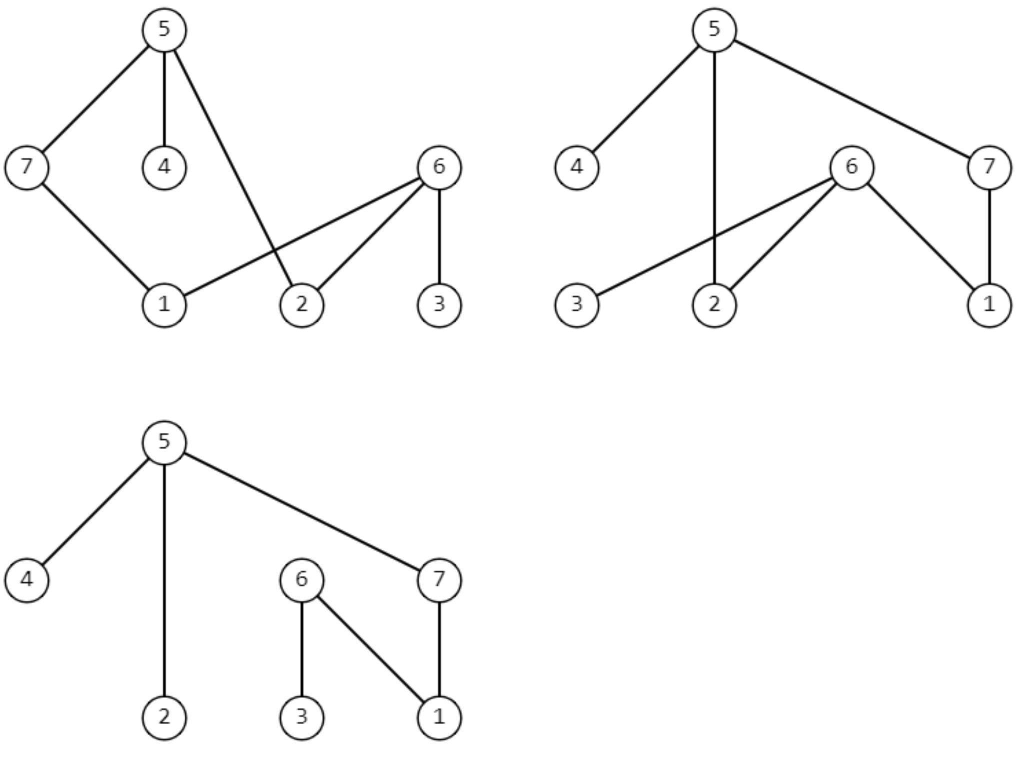
2.3 Изоморфизм

Ч.у. множества P и Q называются *изоморфными*, если существует биективное отображение $f : P \longrightarrow Q$ такое, что:

1) Если $x \leqslant y$, то $f(x) \leqslant f(y)$;

2) Если $f(x) \leqslant f(y)$, то $x \leqslant y$.

Например, два верхних ч.у. множества на рисунке ниже изоморфны друг другу, потому что можно так переименовать вершины, чтобы все отношения сохранялись. Третье ч.у. множество не изоморфно первым двум.



Определение изоморфизма для ч.у. множеств переносится и на решетки, при этом изоморфизм сохраняет операции объединения и пересечения.

2.4 Антицепи

Пусть P – конечное ч.у. множество. Подмножество A ч.у. множества P будем называть *антицепью*, если его элементы попарно несравнимы. Один элемент является антицепью, что иногда мы будем использовать без дополнительных обозначений. Антицепь $A \subseteq P$ называется *максимальной*, если всякий элемент из P сравним с некоторым элементом из A.

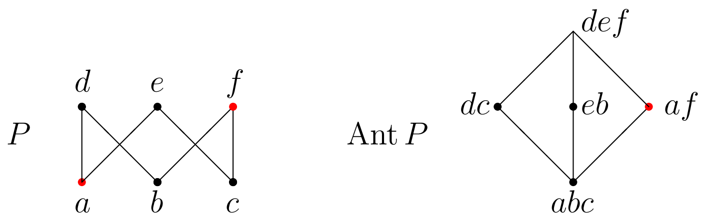
На множестве антицепей определим порядки:

$A \leqslant B$, если для любого $a \in A$ существует $b \in B$ такой, что $a \leqslant b$.

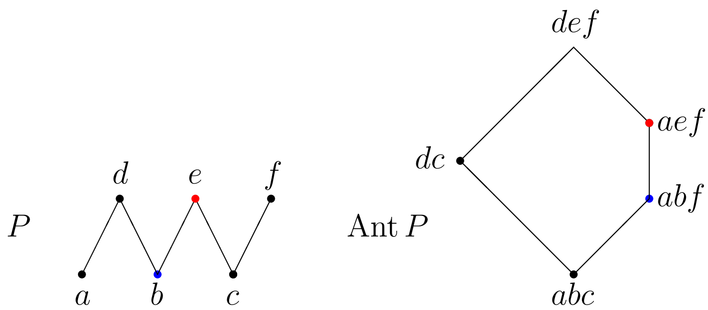
$A \geqslant B$, если для любого $a \in A$ существует $b \in B$ такой, что $a \geqslant b$.

Отметим, что для произвольных антицепей из $A \geqslant B$ не следует $B \leqslant A$. Но если A максимальная, то следует. Поэтому на множестве максимальных антицепей $A \geqslant B$ влечет $B \leqslant A$.

Примеры



Красным показана антицепь af.



В антицепях aef и abf $a = a, f = f$ и $e > b$, поэтому $aef \geqslant abf$

2.4.1 Решетки максимальных антицепей

Теорема 1. *Максимальные антицепи конечного ч.у.м. образуют решетку.*

Доказательство. Пусть даны максимальные антицепи A и B. Введем следующие конструкции:

$A^B = \{x \in A| \quad \exists b \in B \quad x < b\}$;

$B^A = \{y \in B| \quad \exists a \in A \quad y < a\}$;

$A_B = \{x \in A| \quad \exists b \in B \quad x > b\}$;

$B_A = \{y \in B| \quad \exists a \in A \quad y > a\}$;

$AB = A \cap B$ (это обозначение преследует эстетические цели).

Заметим, что $A = A^B \cup AB \cup A_B$ и $B = B^A \cup AB \cup B_A$

Покажем, что множество $A^B \cup B^A \cup AB$ образует антицепь. Пусть найдутся такие $x \in A^B$ и $y \in B^A$, что $x > y$. Тогда найдется $b \in B$, такое что $b > x > y$, но B – антицепь. Противоречие. Аналогично для случая, когда $x < y$.

Множество $A^B \cup B^A \cup AB$ не обязано быть максимальной антицепью. Рассмотрим все несравнимые с ним элементы и среди них выделим максимальные, назовем это множество A_*B. Тогда множество $C = A^B \cup B^A \cup AB \cup A_*B$ будет уже максимальной антицепью.

Пусть $a \in A$, тогда либо $a \in A^B \cup AB \subseteq C$, либо $a \in A_B$, но тогда $a > b$, для некоторого b, и, очевидно, что $b \in B^A \subseteq C$. Следовательно, $A \leqslant C$. Аналогично $B \leqslant C$.

Пусть есть максимальная антицепь $D \leqslant A, D \leqslant B$. Пусть $d \in D$. Тогда либо $d \leqslant a$, где $a \in A^B \cup AB$, либо $d \leqslant b$, где $b \in B^A \cup AB$, либо d несравним с $A^B \cup B^A \cup AB$, и в таком случае $d \leqslant c \in A_*B$, поскольку A_*B состоит из максимальных элементов, несравнимых с $A^B \cup B^A \cup AB$. В итоге $D \leqslant A^B \cup B^A \cup AB \cup A_*B = C$.

Тогда C – точная нижняя грань A и B.

Аналогично находится точная верхняя грань – $A_B \cup B_A \cup AB \cup A^*B$, где A^*B – множество минимальных элементов, несравнимых с $A_B \cup B_A \cup AB$. □

Через $\operatorname{Ant} P$ будем обозначать решетку максимальных антицепей ч.у. множества P.

2.4.2 Близкие антицепи

Будем называть антицепи A и B *близкими*, если не существует $a \in A, b \in B$ и $z \in L$ таких, что $a > z > b$ или $b > z > a$.

Лемма 5. *Если $A, B, C \in \operatorname{Ant} P$ и B, C близки к A, то $B \wedge C$ и $B \vee C$ также близки к A.*

Доказательство. Рассмотрим максимальную антицепь A, и близкие к ней B и C.

В обозначениях предыдущего утверждения

$$B \wedge C = B^C \cup C_B \cup BC \cup B_*C$$

Пусть найдутся такие $d \in B \wedge C$ и $a \in A$, что $a > z > d$ для некоторого $z \in P$. Тогда $d \notin B^C \cup C_B \cup BC$ (так это элементы антицепей B и C, а они близки к A), следовательно, $d \in B_*C$. Тогда d – максимальный элемент, несравнимый с $B^C \cup C_B \cup BC$, следовательно, z с чем-то из этого множества сравним. Если $z \leqslant B^C \cup C_B \cup BC$, то $d \leqslant B^C \cup C_B \cup BC$, противоречие. Но если $z > B^C \cup C_B \cup BC$, это будет означать, что A не близка к B или к C.

□

Лемма 6. *Максимальные антицепи, близкие к максимальной антицепи A образуют интервал.*

Доказательство. Из предыдущего утверждения следует, что близкие к A антицепи образуют подрешетку. Докажем, что для близких к A максимальных антицепей B и C верно, что если максимальная антицепь X меньше B и больше C, то X близка к A.

Предположим что $x \in X$ не принадлежит ни одной из антицепей A, B и C. Тогда найдутся такие $b \in B$ и $c \in C$, что $b > x > c$. Так как x сравним с каким-то элементом $a \in A$ (иначе $A-$ не максимальная), положим, $x > a$. Тогда $b > x > a$, и B не близка к A. Иначе, если $x < a$, то $a > x > c$ и C не близка к A. Противоречие. Значит, x принадлежит A, B или C. Тогда антицепь X близка к A. □

Через $A^\vee$ обозначим наименьшую близкую к A максимальную антицепь (которую можно получить как пересечение всех максимальных антицепей близких к A). Через $A^\wedge$ обозначим наибольшую близкую к A максимальную антицепь.

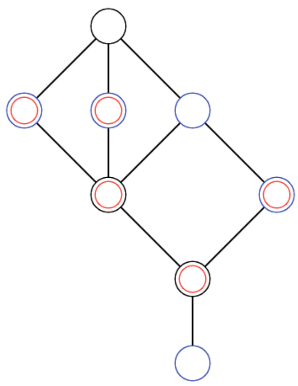
Далее мы изучаем представления решеток решетками максимальных антицепей. Несколько неизоморфных ч.у. множеств могут иметь изоморфные решетки максимальных антицепей, поэтому стоит вопрос о выборе «наиболее удачного» ч.у. множества P, для которого решетка $AntP$ изоморфна данной.

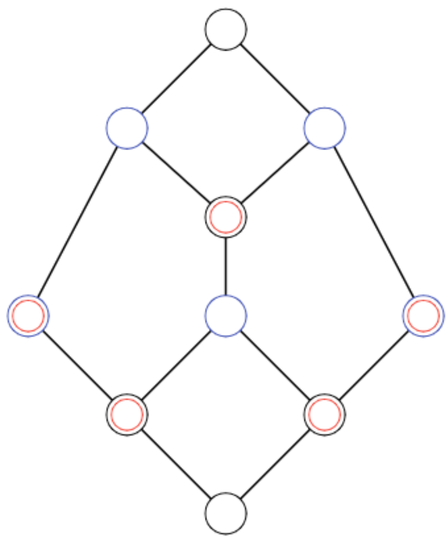
3 Описание решеток через ч.у. множества

3.1 Ч.у. множество неразложимых

Неразложимый в объединение элемент – ненулевой элемент, который нельзя представить в виде объединения двух отличных от него элементов ч.у. множества. Обозначим за Ji множество неразложимых в объединение элементов решетки L.

Неразложимый в пересечение элемент – неединичный элемент, который нельзя представить в виде пересечение двух отличных от него элементов ч.у. множества. Обозначим за Mi множество неразложимых в объединение элементов решетки L.





красным показаны неразложимые в объединение, синим - в пересечение

Пусть J_x – множество неразложимых в объединение элементов, меньших или равных $x \in L$. Пусть M_x – неразложимые в пересечение, большие или равные x.

Лемма 7. *В конечной решетке* $\bigvee J_x = x = \bigwedge M_x$.

Доказательство. В силу двойственности, достаточно доказать, что $\bigvee J_x = x$.

Докажем утверждение по индукции по максимальной длине цепи решётки, причем длина считается по количеству ребер.

База индукции. Для $n = 1$ в решетке нет элементов, отличных от 0 и 1. Для $n = 2$ понятно, что любой элемент, отличный от 0 и 1, неразложим в объединие и в пересечение. Тогда утверждение индукции верно.

Шаг индукции. Пусть для n утверждение верно. Докажем для $n + 1$. Пусть элемент x неразложим в объединение. Пусть $x \succ y$ (напомним, что $x \succ y$ означает, что x покрывает y). Тогда $\bigvee J_x = \bigvee (J_y \cup x) = x$.

Пусть x разложим в объединение. Пусть y и z такие, что $y \vee z = x$. Понятно, что $J_x \wedge [0, y] = J_y$ и $J_x \wedge [0, z] = J_z$.По предположению индукции $\bigvee J_y = y$, $\bigvee J_z = z$. Тогда $x = y \vee z = \bigvee J_y \cup \bigvee J_z = \bigvee (J_y \cup J_z) \leqslant \bigvee J_x$. Но $x \geqslant j$ для всех $j \in J_x$, то есть $x \geqslant \bigvee J_x$. Тогда $\bigvee J_x = x$. $\square$

Следующая теорема хорошо известна (см. [3], [4]).

Теорема 2. *Всякая конечная решетка изоморфна решетке максимальных антицепей некоторого ч.у. множества.*

Доказательство. Пусть L – конечная решетка.

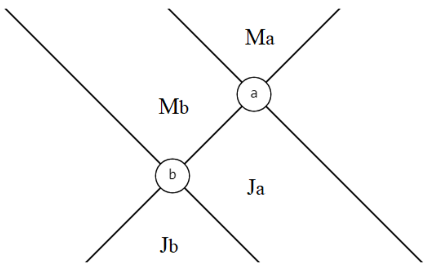
Пусть $J = \{\overline{a} | a \in J_i\}$, $M = \{\overline{\overline{a}} | a \in M_i\}$. Если $x \in J_i$ и $x \in M_i$, будем считать, что $\overline{a}$ и $\overline{\overline{a}}$ разные. Пусть $P = J \cup M$. Определим порядок на P:

1. $\forall x \in P: \quad x \leqslant x$
2. $\overline{\overline{x}} \geqslant \overline{y}$, если $\overline{\overline{x}} \in M$, $\overline{y} \in J$ и $x \nleqslant y$ в L

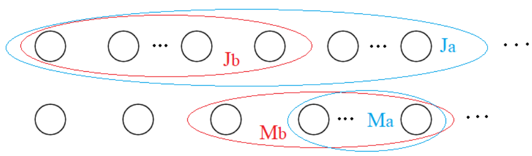
Рассмотрим отображение f, такое что $f(x) = \{y \in J_i \mid y \leqslant x\} \cup \{z \in M_i \mid z \geqslant x\}$. Любой элемент из $\{y \in J_i | y\}$ сравним с x, а значит, они не сравнимы между собой. Любой элемент из $\{z \in M_i | z \geqslant x\}$ сравним с x, а значит, они тоже не сравнимы между собой. Если $z \neq y$, то в P они не сравнимы. Тогда $\{y \in J_i | y\} \cup \{z \in M_i | z \geqslant x\}$ – антицепь в P.

1. Докажем, что она максимальная. Пусть есть какой-то $p \in P$ не сравнимый с элементами этой антицепи. Пусть $p \in J$. Тогда p в L $\forall z \geqslant x$. Тогда $p \leqslant \bigwedge M_x = x$. Но тогда $p \in J_x$. Противоречие.

2. Докажем, что если $a \geqslant b$, то $f(a) \geqslant f(b)$. Если $a \geqslant b$, то $J_a \geqslant J_b$, $M_a \leqslant M_b$. Так как $J_a \cup M_a$ – максимальная антицепь, в J_a найдутся элементы, большие элементов $M_b - M_a$, а элементы J_b у антицепей $J_a \cup M_a$ и $J_b \cup M_b$ общие в P. Тогда $f(a) = \{y \in J_i | y\} \cup \{z \in M_i L | z\} = J_a \cup M_{ab} \cup M_b = \{y \in J_i | y\} \cup \{z \in M_i L | z\} = f(b)$.



L



P

3. Рассмотрим обратное отображение $g(A) = \bigvee J_A$ для антицепи $A = J_A \cup M_A$ в P. Тогда по лемме 7 имеем $g(A) = \bigvee J_A = \bigwedge M_A = A$. Тогда $g(A)$ – обратное отображение к $f(x)$. $\square$

3.2 Склееная сумма

Решетка L называется *S-склееной суммой* интервалов L_i, если выполняются следующие условия:

1) $L = \bigcup L_i$;

2) L_i – интервал в S;

3) Если $i \prec j$, то $L_i \cap L_j \neq \varnothing$;

4) Если $i \leqslant j$, то либо $L_i \cap L_j = \varnothing$ либо $L_i \cap L_j$ интервал с 1 в L_i и с 0 в L_j;

5) $L_i \cap L_j \subseteq L_{i \wedge j}$ и $L_i \cap L_j \subseteq L_{i \vee j}$.

Решетка S называется *скелетом* склеенной суммы.

Теорема 3. *Решетка максимальных антицепей* $\mathrm{Ant}\, P$ *является склеенной суммой интервалов близких антицепей* $[A^\vee, A^{\vee\wedge}]$ *по всем* $A \in \mathrm{Ant}\, P$ *со скелетом* $S = \{A^\vee | A \in \mathrm{Ant}\, P\}$.

Доказательство. Проверим выполнение всех пяти условий из определения:

1) Покажем, что $A \in [A^\vee, A^{\vee\wedge}] = L_A$. Из определения $A \geqslant A^\vee$. Покажем, что $A \leqslant A^{\vee\wedge}$. Пусть $x \in A^\vee$. Тогда

а) Если $x \in A$, то либо $x \in A^{\vee\wedge}$, либо найдется такой элемент $a \in A^{\vee\wedge}$, что $x \prec a$, и все хорошо.

2) Если $\exists a \in A$, такое что $a \succ x$:

а) Если $\exists b \in A^{\vee\wedge} \quad b \succ a$, то $b \succ a \succ x$. Но тогда $A^{\vee\wedge}$ и $A^\vee$ не близки. Противоречие.

б) Если $\exists b \in A^{\vee\wedge} \quad a \succ b$, то $a \succ b \succ x$. Но тогда A и $A^\vee$ не близки. Противоречие.

Тогда $a \in A^{\vee\wedge}$.

2) Второе условие очевидно.

3) $A^\vee \prec B^\vee$ в S, значит $A^\vee \leqslant B^\vee$ в $AntL$. Пусть $B^\vee$ не близка к $A^\vee$. Тогда $\exists$ $a \in A, b \in B$ и $z \in AntL$ такие, что $b \geqslant z \geqslant a$. Тогда $A^\vee \leqslant B^{\vee\vee} \leqslant B^\vee$. Но тогда в S $B^\vee \geqslant B^{\vee\vee} \geqslant A^\vee$, а значит $B^\vee \not\succ A^\vee$. Противоречие.

Значит $B^\vee$ близка к $A^\vee$ и содержится в $[A^\vee, A^{\vee\wedge}]$. Тогда $B^\vee \in L_A \cap L_B$

4) 1. Для $i = j$ утверждение, очевидно, верно.

2. Пусть $A^\vee \succ B^\vee$. Тогда по пункту 3) $B^\vee$ и $A^{\vee\wedge} \in L_A \cap L_B$ и $L_A \cap L_B$ – интервал (по лемме 5), причем $A^{\vee\wedge}$ – его наибольший элемент, а $B^\vee$ – его наименьший элемент.

3. Пусть $A^\vee \geqslant B^\vee$ и $A^\vee \not\succ B^\vee$. Тогда $\exists x, \quad b \in B^\vee$ и $a \in A^\vee$, такие что $a > x > b$. Предположим, что $B^{\vee\wedge} \geqslant A^\vee$. Тогда $\exists y \in B^{\vee\wedge}$ такой что $y \geqslant a$. Но тогда $y \geqslant a > x > b$, и $B^\vee$ и $B^{\vee\wedge}$ не близки. Противоречие. Тогда $B^{\vee\wedge} < A^\vee$. Тогда $L_A \cup L_B = \varnothing$.

5) Рассмотрим $X \in [A^\vee, A^{\vee\wedge}] \cap [B^\vee, B^{\vee\wedge}]$. X близка к $A^\vee$ и $B^\vee$ и $X \geqslant A^\vee$ и $X \geqslant B^\vee$. Рассмотрим $A^\vee \cap B^\vee$. $X \geqslant A^\vee \cap B^\vee$.

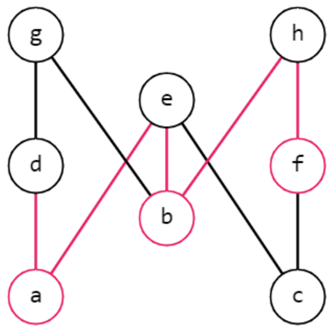
Пусть X и $A^\vee \cap B^\vee$ не близки. Из того что X близка к $A^\vee$ и $B^\vee$ следует, что не существует $x \in X, a \in A^\vee, b \in B^\vee, z \in L$ таких, что $x \geqslant z \geqslant a$ и $x \geqslant z \geqslant b$, и раз X и $A^\vee \cap B^\vee$ не близки, то $\exists x \in X, c \in C$, где C – элементы, которые входят в пересечение A и B, но не принадлежат ни A, ни B, $z \in L$ такие, что $x > z > c$. Раз z не входил в антицепь $A^\vee$, $\exists a \in A$ такой, что $z > a$. Но тогда $x > z > a$, а значит X и $A^\vee$ не близки. Противоречие. Значит X и $A^\vee \cap B^\vee$ близки.

Раз $X \geqslant A^\vee \cap B^\vee$. и X и $A^\vee \cap B^\vee$ близки, $X \in [A^\vee \cap B^\vee, (A^\vee \cap B^\vee)^\wedge]$

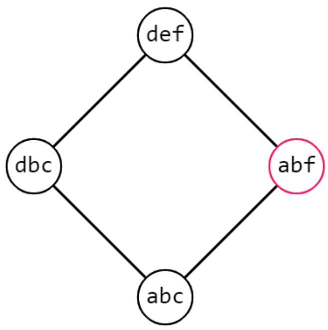
Для $L_i \cap L_j \subseteq L_{i \vee j}$ аналогично. □

Пример:

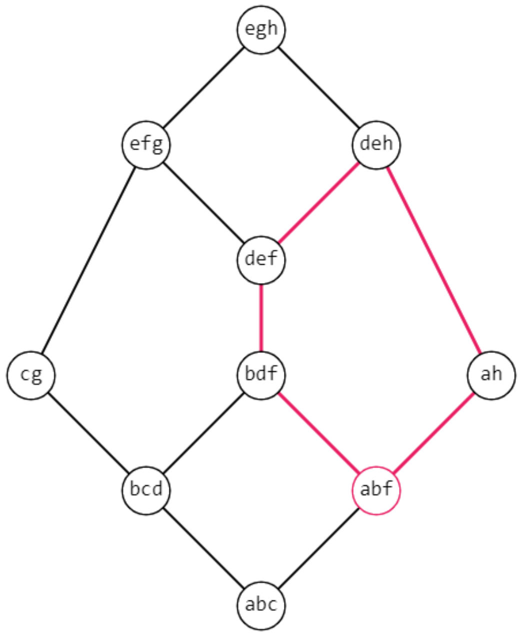
Красным показаны интервал $[abc, def] = [A^\vee, A^{\vee\wedge}]$ в P и соответствующие ему интервал в $Ant(P)$ и элемент в скелете S.



чум P



скелет S



$Ant(P)$

Далее мы по решетке L построим ч.у. множество Q такое, $\operatorname{Ant} Q \cong L$ и что если L разложимо в склеенную сумму, то высота Q будет больше 1. В случае, когда L неразложима в склеенную сумму, Q будет изоморфным ч.у. множеству неразложимых из главы 3.

Интервал $[a, b]$ в решетке L назовем **правильным**, если выполняются следующие условия:

1) если $c \in L$ несравним с a, то $b \geqslant c$,

2) если $c \in L$ несравним с b, то $a \leqslant c$.

Нетрудно видеть, что для правильности интервала достаточно требовать только одного из этих условий.

Лемма 8. *Пусть $[a, b]$ и $[c, d]$ – правильные интервалы. Тогда либо они пересекаются, либо $a < c$ и $b < d$, либо $a > c$ и $b > d$.*

Доказательство. Предположим, что a и c несравнимы. Тогда по определению правильных интервалов $b > c$ и $d > a$. Рассмотрим $a \vee c$. Очевидно, что $b > a \vee c > a$, а значит $a \vee c \in [a, b]$ и что $d > a \vee c > c$, а значит $a \vee c \in [c, d]$. Это значит что $a \vee c \in [a, b]$ и $a \vee c \in [c, d]$. А значит $a \vee c \in [a, b] \cap [c, d]$.

Если a и c сравнимы, то без ограничения общности, $a > c$. Тогда посмотрим на отношение a и d. Если $d > a$, то $a \in [c, d]$, а значит $a \in [a, b] \cup [c, d]$. Если a и d несравнимы, то по определению правильных интервалов $b > d$.

$\square$

Лемма 9. *Если $x \in L$, $j \in \operatorname{Ji} L$ и $x \geqslant j$, то $x \in [j, j']$.*

Доказательство. Для этого достаточно доказать, что $x \leqslant j'$ Посмотрим на все неразложимые в объединение элементы меньшие x (j – один из них). По лемме 7 их объединение – x. Так как $[j, j']$ – правильный интервал, то каждый элемент из Ji сравним с j'. Тогда $j' \geqslant x$. $\square$

Каждый элемент решетки является нижним концом какого-нибудь правильного интервала. Действительно, достаточно просто рассмотреть все несравнимые с ним элементы и взять верхнюю грань этих элементов (например, их объединение). Двойственно, каждый элемент является и верхним концом какого-нибудь правильного интервала.

Рассмотрим множество Q состоящее из следующих интервалов:

- для каждого $j \in \operatorname{Ji} L$ выберем правильный интервал $[j, j']$;

- для каждого $m \in \operatorname{Mi} L$ выберем правильный интервал $[m', m]$.

Определим на Q порядок: $[a, b] > [c, d]$, если $a > c$ и $b > d$. Заметим, что несравнимые интервалы по лемме 4 должны пересекаться.

Теорема 4. $\operatorname{Ant} Q \cong L$.

Доказательство. Определим отображение $f : L \to \operatorname{Ant} Q$ следующим образом: $f(x)$ есть множество всех интервалов, содержащих элемент $x \in L$. Заметим, что в силу пересечения, все интервалы должны быть несравнимы в Q. С другой стороны, если есть интервал, который несравним со всеми интервалами из $f(x)$, то он должен с ними со всеми пересекаться. По Лемме они все должны иметь общее пересечение, а это x. Следовательно, $f(x)$ это максимальная антицепь.

Пусть x, y различные элементы. Тогда существует $j \in \operatorname{Ji} L$ такой, что $x \geqslant j$ и $y \ngeqslant j$. Тогда интервал $[j, j']$ содержит x, но не содержит y, значит антицепи $f(x)$ и $f(y)$ различные.

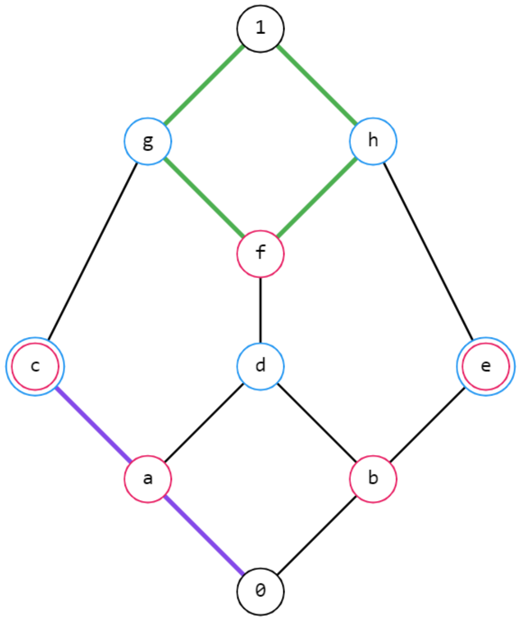
Пусть есть максимальная антицепь в Q, по Лемме, она имеет общее пересечение. Заметим, что если в этом пересечении есть два элемента $y > x$, то найдется $j \in JiL$ такой, что $y \geqslant j$, но $x \ngeqslant j$. Тогда интервал $[j, j']$ содержит y и не содержит x. Тогда он не входил в максимальную антицепь, но несравним с ее элементами. Противоречие. Значит пересечение антицепи имеет ровно один элемент. Очевидно, что образом этого элемента и будет наша антицепь.

Покажем, наконец, что при $y > x$ выполняется $f(y) > f(x)$. Вначале будем считать, что $y \succ x$. Для некоторых $j \in \operatorname{Ji} L$ и $m \in \operatorname{Mi} L$ будет верно, что $[j, j']$ содержит y, но не x, а $[m', m]$ содержит x, но не y. Если j и m' несравнимы, то интервалы $[j, j']$ и $[m', m]$ пересекаются в элементе, скажем, z. Очевидно, что $z > x$ и $z < y$, но это противоречит тому, что $y \succ x$. Значит j и m' сравнимы, но тогда $m' > j$ (иначе $x > j$, чего быть не может). Двойственно получаем $m > j'$, откуда по определению $f(y) > f(x)$.

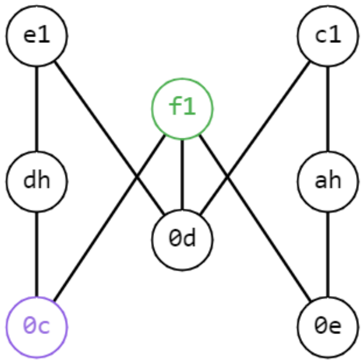
В итоге f – изоморфизм. $\square$

Пример:

Красным и голубым показаны элементы неразложимые в объединение и пересечение соответственно. Зеленым и фиолетовым показаны правильные интервалы в L и соответствующие им элементы в Q.



решетка L



чум Q

3.3 Разложение дистрибутивных решеток в склееную сумму булевых решеток

Напомним, что конечные булевые решетки являются решетками всех подмножеств множеств (число элементов в этом множестве называется *размерностью* булевой решетки), в то время как дистрибутивные решетки можно охарактеризовать (см Гретцер) как произвольные подрешетки решетки всех подмножеств.

Лемма 10. *Интервал булевой решетки - булевая решетка.*

Доказательство. Интервал $[a, b]$ булевой решетки изоморфен решетке всех подмножеств множества $b \backslash a$. □

Хорошо известно, что конечная дистрибутивная решетка изоморфна решетке $\mathrm{Down}\,\mathrm{Ji}\,L$ (см Гретцер).

Теорема 5. *Всякая конечная дистрибутивная решетка L является склеенной суммой булевых решеток со скелетом* $\mathrm{Ant}\,Ji$*, а размерность каждого слагаемого определяется размером соответствующей антицепи.*

Доказательство. Антицепи A поставим в соответствие интервал $[A^*, A]$, где $A^* = \{x \in Ji : x < a$ для $a \in A$ и $\forall$a $\in A$ x $\prec a$ или x и a несравнимы$\}$

1, Рассмотрим антицепь $A \in \mathrm{Down}\,Ji$. Пусть она не принадлежит ни одному из интервалов. Если она максимальная, то она точно есть в $\cup L_A$. Есди она не максимальна, то дополним ее до максимальной. Назовем новую антицепь B. Тогда $A \in [B^*, B]$.

2. Рассмотрим антицепь X такую, что $A^* < X < A$. Тогда $x \in X$ состоит из $A \cup A^*$. В свою очередь $[A^*, A]$ содержит все антицепи, состоящие из $A \cup A^*$. Тогда L_A - интервал в Down Ji,

3. Если $i \prec j$ в $AntJi$, то I и J близкие антицепи, а значит $I \geqslant J^*$, из чего следует, что $I \in [J^*, J]$.

4. Если $i \leqslant j$ в $AntJi$, то $I \leqslant J$ и $I^* \leqslant J^*$. Пусть $L_i \cap L_j \neq \varnothing$. Тогда $\exists x \in L_i, L_j$, а значит $I \geqslant x \geqslant J^*$. Тогда получается, что $J \geqslant I \geqslant J^* \geqslant I^*$ и $I \in L_j$, а $J^* \in L_i$. Это значит, что $L_i \cap L_j$ - интервал с 1 L_i и 0 L_j.

5. Объединение I и J состоит из

a) элементов $I_J = \{i \in I| \quad \exists b \in J \quad i > b\}$;

b) элементов $J_I = \{j \in J| \quad \exists a \in I \quad a < j\}$;

c) элементов $IJ = I \cap J$

d) минимальных элементов $C = \{c \in L| \quad c$ и I_J несравнимы $\quad c$ и J_I несравнимы c и IJ несравнимы $\quad c > a \quad c > b\ \}$.

Пусть $x \in (I \cup J)^*$. Покажем, что тогда он меньше или равен какому-то элементу из $J^* \cup I^*$.

5.1. Пусть $x \prec i \in I_J \cup IJ$ (аналогично если $x \prec j \in J_I \cup IJ$). Тогда существует такой $i^* \in I^*$, что $x \leqslant i*$.

5.2 Пусть $x \prec c$. Рассмотрим отношение x и I_J.

a) Если $I_J \cup IJ > x$, то $(I_J \cup IJ)^* \geqslant x$.

b) Если $(I_J \cup IJ) < x < c$, то $J_I \cup I_J \cup IJ \cup C$ - не максимальная антицепь.

c) Если $(I_J \cup IJ)$ несравним с x. Пусть $x \in I$. Тогда $x \in a$, и $J^I > x > c$ и $J_I \cup I_J \cup IJ \cup C$ - не максимальная антицепь. Значит, $x \not\in I$. Пусть $x \leqslant a$. Тогда существует $j \in J_I$, такой что $j \geqslant a \geqslant x$, а значит $j^* \geqslant x$. Пусть тогда $x > a$ (аналогично и $x > b$). Но тогда x - минимальный элемент не сравнимый с I_J, J_I и IJ, но больший a и b. Но это c. Противоречие.

Значит, $(I \cap J)^* \leqslant (I \cup J)^* \leqslant (I^* \cup J^*)$. □

6. Покажем, что $[A^*, A]$ - булевая решетка. Каждый элемент x этого интервала представим как J_x, а все такие неразложимые - J_A. Тогда дополнение для элемента x - элементы из $\{J_A - J_x\}$ объединенные с A^*. В множестве $\{J_A - J_x\}$ любые два элемента несравнимы по определению в силу того, что $x \geqslant A^*$ и $a \in A$ либо покрывает $a^* \in A^*$, либо несравним с ним. Тогда все объединения $\{J_A - J_x\}$ с A^* различны, иначе в $DownJ_i$ содержится подрешетка изоморфная бриллианту и $DownJ_i$ не дистрибутивная решетка.

Понятно, что объединение $x \vee (A^* \bigvee \{J_A - J_x\}) = A^* \vee (x \bigvee \{J_A - J_x\}) = A^* \vee A = A$.

Проверим, что это действительно дополнение:

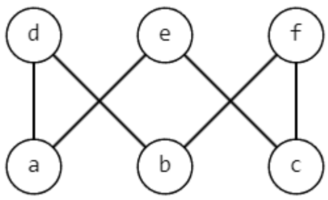
1. $x \vee (A^* \vee (\bigvee \{J_A - J_x\})) = (A^* \vee x) \vee (\bigvee \{J_A - J_x\})) = \bigvee \{J_x\} \vee \bigvee \{J_A - J_x\}) = A$.

2. $x \wedge (A^* \vee (\bigvee \{J_A - J_x\})) = (x \wedge A^*) \vee (x \wedge \bigvee \{J_A - J_x\}) = A^* \vee (x \wedge \bigvee \{J_A - J_x\})$ В пересечение J_x и $J_a - J_x$ будут такие несравнимые элементы, для каждого из которых есть элемент и в J_x, и в $J_a - J_x$, которого они меньше. А в A^* такие, которые покрываются хотя бы одним из них. Так что $A^* \geqslant$ пересечения J_x и $J_a - J_x$.

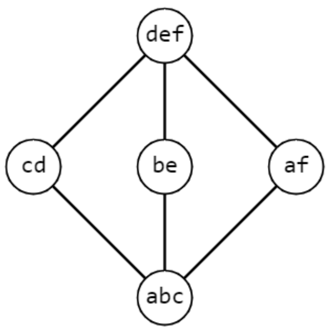
Понятно, что это дополнение лежит в $DownJ_i$. Кроме того,$J_{A^*} \leqslant \bigvee \{J_A - J_x\} \leqslant J_A$. Значит, дополнение x лежит в интервале $[A^*, A]$.

Тогда по лемме 10 их пересечение - булевая решетка (назовем ее R). Размернсть этой булевой решетки равна количеству ее элементов, покрывающих ее 0. Рассмотрим неразложимые в L которые меньше или равны 1 и не меньше 0 решетки R (далее 1_R и 0_R соответственно). Так как R - интервал в $[A^*, A]$, среди таких неразложимых нет сравнимых (доказательство см. выше). Тогда каждый из них в объединении с 0_R дает элемент в ней, покрывающий 0_R. Тогда количество таких неразложимых и есть размерность булевой решетки R. Оно равно количеству элементов в множестве $\{1_R\} \cup \{0_R\} - \{0_R\}$, а 1_R в свою очередь равен пересечению единиц интервалов $[A^*, A]$ и $[B^*, B]$, а значит равен $\{A\} \cap \{B\}$.

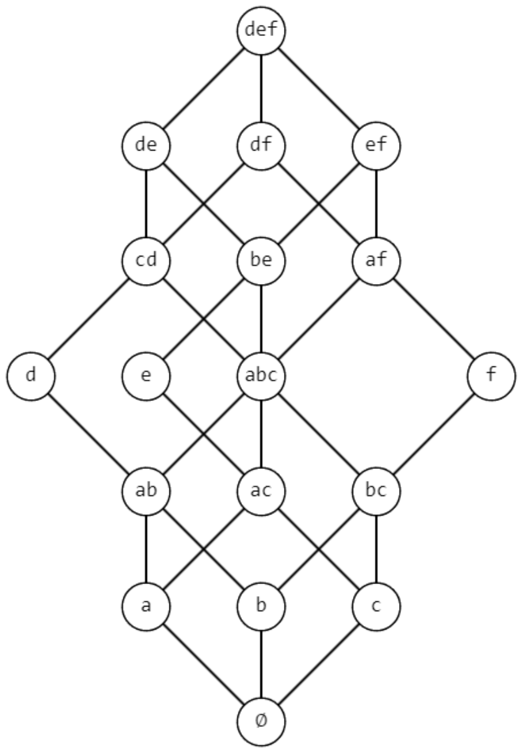
Пример 1:



P

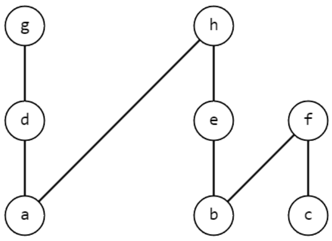


$Ant(P)$

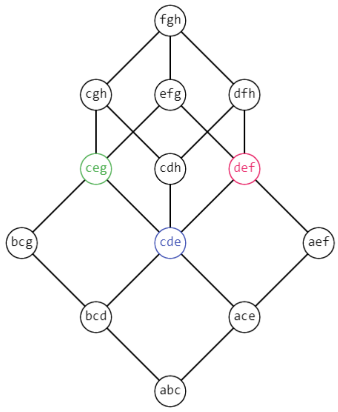


$Down(P)$

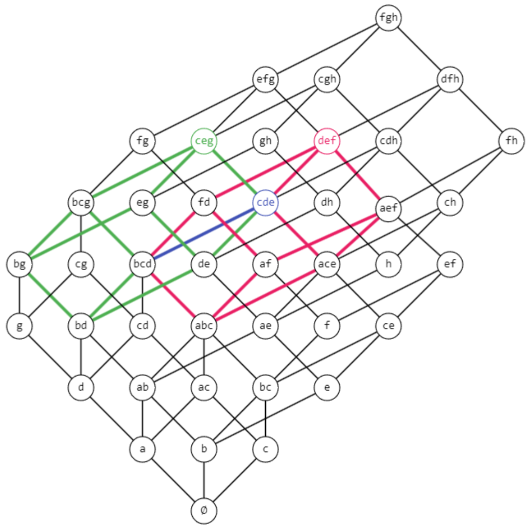
Пример 2:



P



$Ant(P)$



$Down(P)$

4 Список литературы

[1] G. Birkhoff (1984) Lattice theory.
[2] G. Grätzer (1982) General Lattice Theory.
[3] G. Markowsky (2001) An overview of the poset of irreducibles.
[4] M. Morvan (1996) Simplicial Elimination Schemes, Extremal Lattices and Maximal Antichain Lattices