РЕШЕТКИ МАКСИМАЛЬНЫХ АНТИЦЕПЕЙ

Хоменко Анастасия, Кеелус Милена
Научный руководитель: Александр Леонидович Попович
Москва, Школа на Юго-Востоке имени Маршала В.И. Чуйкова, 10с, 2023

Определения:

Частично упорядоченное множество (далее ч.у. множество) - множество с заданным отношением порядка $\leqslant$, причем для любых x, y и z верно следующее:

1) $x \leqslant x$;

2) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$;

3) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$.

Элемент a множества A называется *наиболшим* если $\forall a' \in A$ верно, что $a \geqslant a'$

Элемент a множества A называется *наименьшим* если $\forall a' \in A$ верно, что $a \leqslant a'$.

Верхней гранью подмножества X в чуме P называется элемент $a \in P$, больший или равный всех $x \in X$.

Точная верхняя грань (или объединение) – это его наименьшая верхняя грань. Точную верхнюю грань двух элементов x и y будем обозначать как $x \vee y$.

Нижней гранью подмножества X в чуме P называется элемент $a \in P$, меньший или равный всех $x \in X$.

Точная нижняя грань (или пересечение) – это его наибольшая нижняя грань. Точную нижнюю грань двух элементов x и y будем обозначать как $x \wedge y$.

Решеткой называется такое частично упорядоченное множество, что любые два его элемента имеют точную нижнюю и точную верхнюю грань (пересечение $\wedge$ и объединение $\vee$).

Решетка называется *дистрибутивной*, если в ней истинны следующие тождества:

1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Решётка L называется *булевой*, если для любого элементов a из L существует дополнение, т.е. такой элемент a' из L, что $a \wedge a' = 0$ и $a \vee a' = 1$.

Для элементов a, b решетки L таких, что $a \leqslant b$ *интервалом [a, b]* будем называть подмножество $\{x \in L \mid a \leqslant x \leqslant b\}$. Наибольший элемент в $[a, b]$ это b, а наименьший – a.

Ji - ч.у. множество элементов, не представимых как объединение двух других элементов.

Если P – ч.у. множество и M – его подножество, то M замкнуто вниз, если для любого $m \in M$ и $x \in P$ из $x \leqslant m$ следует, что $x \in M$.

Множество всех замкнутых вниз подмножеств P образует дистрибутивную решётку $DownP$ (с теоретико-множественными операциями).

Пусть P – конечное ч.у. множество. Подмножество A ч.у. множества P будем называть *антицепью*, если его элементы попарно несравнимы. Антицепь $A \subseteq P$ называется *максимальной*, если всякий элемент из P сравним с некоторым элементом из A.

На множестве антицепей определим порядки:

$A \leqslant B$, если для любого $a \in A$ существует $b \in B$ такой, что $a \leqslant b$.

$A \geqslant B$, если для любого $a \in A$ существует $b \in B$ такой, что $a \geqslant b$.

$AntJi$ - решетка максимальных антицепей ч.у. множества Ji.

Решетка L называется *S-склееной суммой* интервалов L_i, если выполняются следующие условия:

1) $L = \bigcup L_i$;
2) L_i – интервал в S;
3) Если $i \prec j$, то $L_i \cap L_j \neq \varnothing$;
4) Если $i \leqslant j$, то либо $L_i \cap L_j = \varnothing$ либо $L_i \cap L_j$ интервал с 1 в L_i и с 0 в L_j;
5) $L_i \cap L_j \subseteq L_{i\wedge j}$ и $L_i \cap L_j \subseteq L_{i\vee j}$.

Решетка S называется *скелетом* склеенной суммы.

Теорема (основной результат):

Всякая конечная дистрибутивная решетка L является «склеенной суммой» булевых решеток со скелетом (схемой склейки булевых решеток) $AntJi$, размерность каждого слагаемого определяется размером соответствующей антицепи, а их пересечение (если оно есть) - также булевая решетка, размерность которой определяетсяя количеством общих элементов в антицепях.