РЕШЕТКИ МАКСИМАЛЬНЫХ АНТИЦЕПЕЙ

Хоменко Анастасия, Кеелус Милена
Научный руководитель: Александр Леонидович Попович
Москва, Школа на Юго-Востоке имени Маршала В.И. Чуйкова, 10с, 2023

Определения:

Частично упорядоченное множество (далее ч.у. множество) - множество с заданным отношением порядка $\leqslant$, причем для любых x, y и z верно следующее:

1) $x \leqslant x$;

2) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$;

3) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$.

Далее мы рассматриваем конечное ч.у. множество P.

Определим отношение $x < y$: оно означает, что $x \leqslant y$ и $x \neq y$.

Определим отношение покрытия $x \succ y$: оно означает, что $y < x$, но не существует такого z, что $y < z < x$.

Элемент $a \in A \subseteq P$ называется *наибольшим* элементом множества A если $\forall x \in A : x \leqslant a$.

Элемент $a \in A \subseteq P$ называется *максимальным* элементом множества A, если $\forall x \in A : x \geqslant a$ влечет $x = a$.

Элемент $a \in A \subseteq P$ называется *наименьшим* элементом множества A если $\forall x \in A : a \leqslant x$.

Верхней гранью подмножества $A \subseteq P$, если она существует, называется элемент $a \in P$, такой что $\forall x \in A : x \leqslant a$. Наименьшую верхнюю грань подмножества $A \subseteq P$, если она существует, будем называть *объединением* подмножества $A \subseteq P$ и обозначать через $\bigvee A$. Объединение двух элементов $x, y \in P$ будем обозначать как $x \vee y$.

Нижней гранью подмножества $A \subseteq P$, если она существует, называется элемент $x \in P$, такой что $\forall a \in A : a \leqslant x$. Наибольшую нижнюю грань подмножества $A \subseteq P$, если она существует, будем называть *пересечением* подмножества $A \subseteq P$ и обозначать через $\bigwedge A$. Пересечение двух элементов $x, y \in P$ будем обозначать как $x \wedge y$.

Решеткой называется такое ч. у. множество, что любые два его элемента имеют объединение и пересечение.

Основы теории решеток сформулированы в книгах [1] и [3]. С помощью решеток исследуются различные иерархии в алгебре и других разделах математики: решетки подалгебр, решетки подпространств и т.д. Теория решеток имеет приложения в информатике, решетки используются для анализа данных, в случае если данные имеют природу атрибутов (например, свойства или хэш-теги), подробнее с этой тематикой можно ознакомиться в [2].

Далее мы рассматриваем конечную решетку L.

Решетка называется *дистрибутивной*, если в ней истинно следующие тождества для любых $x, y, z \in L$:

1) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

2) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Известно, что эти тождества равносильны (см. [3]). Класс дистрибутивных решеток является очень популярным классом решеток и имеет несколько описаний. Например, согласно классической теореме (см. [3], глава 2) решетка дистрибутивна если она является подрешеткой (подмножеством, замкнутым относительно операций пересечения и объединения) в решетке всех подмножеств некоторого множества (относительно порядка теоретико-множественного включения).

Решетку всех подмножеств множества X будем называть *булеаном* множества X.

Для элементов a, b решетки L, таких что $a \leqslant b$, *интервалом [a, b]* называется подмножество $\{x \in L \mid a \leqslant x \leqslant b\}$. Наибольший элемент в $[a, b]$ это b, а наименьший – a.

В решетке L рассмотрим ч.у. множество
$\{x \in L \mid x$ не наименьший в L и $\forall y, z \in L : x = y \vee z$ влечет $y = x$ или $z = x\}$, относительно порядка в L. Обозначим его через $\mathrm{Ji}\, L$.

Рассмотрим подмножество $M \subseteq P$. Если для любого $m \in M$ и $x \in P$ из $x \leqslant m$ следует, что $x \in M$, то M *замкнуто вниз*. Множество всех замкнутых вниз подмножеств P образует дистрибутивную решётку $\mathrm{Down}\, P$ (с теоретико-множественными операциями).

Подмножество A ч.у. множества P будем называть *антицепью*, если его элементы попарно несравнимы.

Упомянутая выше классическая теорема в случае конечной решетки L утверждает, что L изоморфна $\mathrm{Down}\, \mathrm{Ji}\, L$. Отметим, что каждое замкнутое вниз множество полностью определяется антицепью своих максимальных элементов.

В нашей работе мы получили описание структуры конечной дистрибутивной решетки, которое формулируется на языке максимальных антицепей множества $\mathrm{Ji}\, L$.

Пусть P – конечное ч.у. множество. Антицепь $A \subseteq P$ называется *максимальной*, если всякий элемент из P сравним с некоторым элементом из A.

На множестве антицепей определим порядок:

$A \leqslant B$, если для любого $a \in A$ существует $b \in B$ такой, что $a \leqslant b$.

Относительно вышеуказанного порядка максимальные антицепи ч.у. множества P образуют решетку. Обозначим ее за $\mathrm{Ant}\, P$. Решетки максимальных антицепей также известны в литературе, см, например, [4].

Антицепи A и B назовем *близкими*, если $\forall a \in A, \forall b \in B$ либо a и b несравнимы, либо один покрывает другой.

Пусть S и L – решетки, и каждому элементу $i \in S$ соответствует интервал $L_i \subseteq L$. Решетка L называется *S-склееной суммой* интервалов L_i, $i \in S$ если выполняются следующие условия:

1) $L = \bigcup_{i \in S} L_i$;

2) если $i, j \in S$ и $i \leqslant j$, то либо $L_i \cap L_j$ пусто, либо является интервалом в L, наименьший элемент которого лежит в L_j, а наибольший – в L_i;

3) если $i, j \in S$ и $i \prec j$, то $L_i \cap L_j$ непусто;

4) для любых $i, j \in S$ выполняется $L_i \cap L_j \subseteq L_{i \wedge j}$ и $L_i \cap L_j \subseteq L_{i \vee j}$.

Решетка S называется *скелетом* S-склеенной суммы. Интервалы L_i называются *слагаемыми* S-склеенной суммы.

Для максимальной антицепи $A \subseteq L$ определим

$$A^* = \{x \in \mathrm{Ji}(L) \mid \forall a \in A: \text{ либо } a \succ x, \text{ либо } x \text{ и } a \text{ несравнимы}\}.$$

Теорема (основной результат)

а) Всякая конечная дистрибутивная решетка L является S-склеенной суммой, в которой

- скелетом является решетка $S = \mathrm{Ant}\,\mathrm{Ji}\,L$;

- слагаемыми являются интервалы $L_A = [\bigvee A^*, \bigvee A]$ для всех антицепей $A \subseteq \mathrm{Ji}\,L$.

б) Каждый интервал L_A в этой S-склеенной сумме изоморфен булеану множества A.

в) Если $A \cap B$ непусто, то пересечение двух интервалов L_A и L_B в L изоморфно булеану множества $A \cap B$. Если и $A \cap B$ пусто, и A и B близки, то $L_A \cap L_B$ состоит из одного элемента. Если и $A \cap B$ пусто, и A и B не близки, то $L_A \cap L_B$ не содержит ни одного элемента.

Список литературы

[1] Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.

[2] Ganter B., Wille R.. Formal Concept Analysis. Foundations and Applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005.

[3] Gratzer, G. Lattice Theory: Foundation – Birkhäuser Verlag, Basel 2011.

[4] Markowsky, G. An Overview of the Poset of Irreducibles, Combinatorial and Computational Mathematics: Present and Future, ed. by Hong, et al, World Scientific, Singapore 2001 162-177.