Реферат
«Прямая Симсона»

Автор: Колесникова Екатерина
Научный руководитель: Морозова А.— К. В.
ГБОУ школа "Интеллектуал"

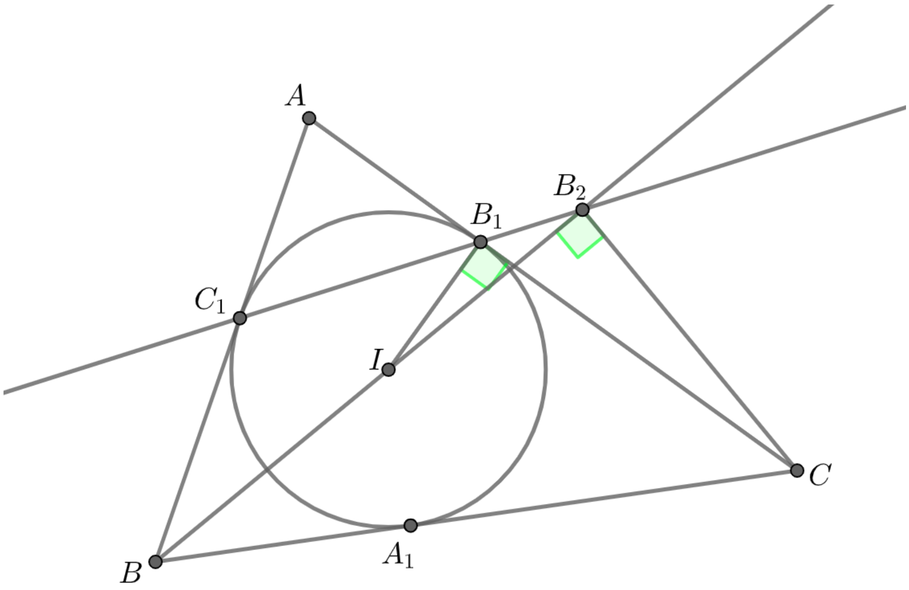
Москва, 2023

Содержание

1 Вспомогательные факты

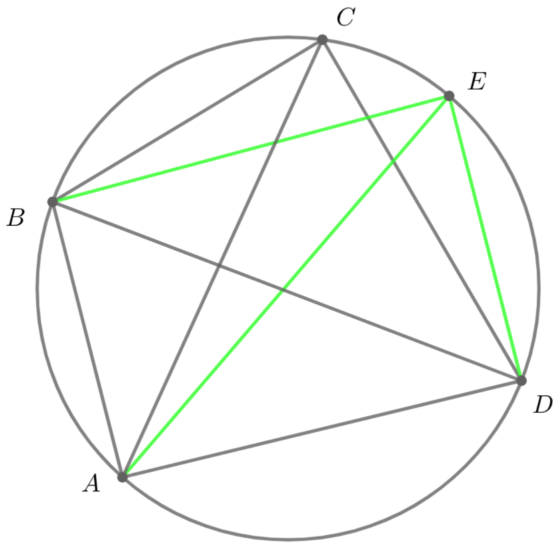
1.1 Лемма 255

Теорема Проекция вершины на биссектрису угла B принадлежит отрезку C_1B_1, где $C1$, $B1$ — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AB, AC соответственно.



1.2 Неравенство Птолемея

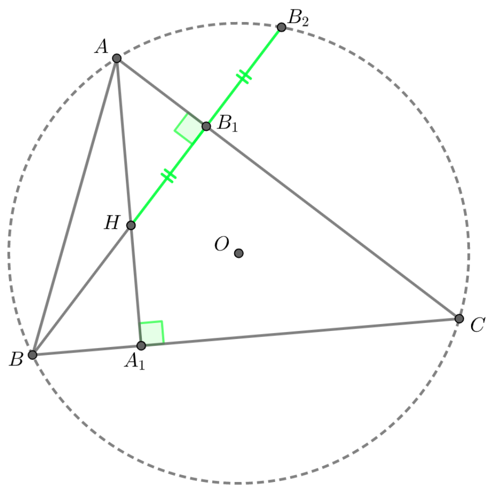
Теорема В любом четырехугольнике ABCD выполняется неравенство: $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD$. А во вписанном четырехугольнике верно равенство: $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD$.



1.3 Свойства ортоцентра

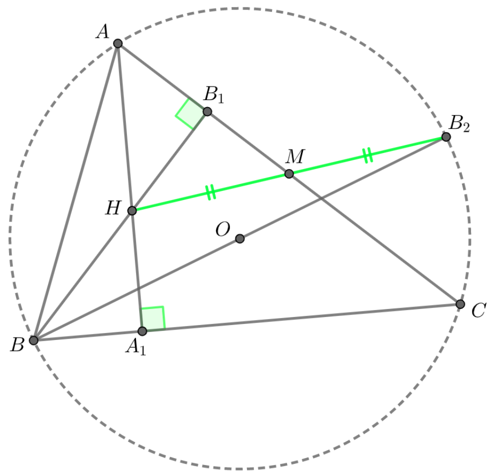
Первое свойство ортоцентра треугольника

Теорема Точки, симметричные ортоцентру H относительно сторон треугольника, лежат на его описанной окружности.



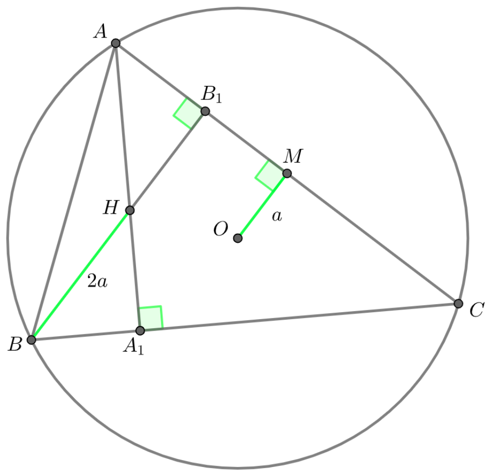
Второе свойство ортоцентра треугольника

Теорема Дан треугольник ABC. Точка B_2 , симметрична ортоцентру H относительно середины стороны AC треугольника — точки M. Тогда B_2 лежит на описанной окружности треугольника и диаметрально противоположна вершине B.



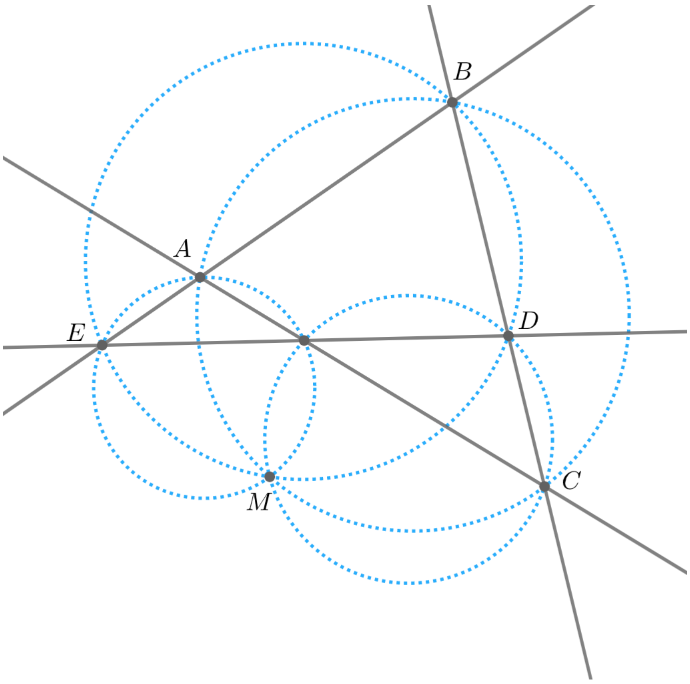
Третье свойство ортоцентра треугольника

Теорема Расстояние от стороны AC до центра O описанной окружности равно половине расстояния от вершины B до ортоцентра H.



1.4 Точка Микеля

Теорема Окружности треугольников, образованных при пересечении четырех прямых общего положения пересекаются в одной точке — точке Микеля.



1.5 Двойные отношения

Определение:

Двойное отношение четверки точек $A,\ B,\ C,\ D$ лежащих на одной прямой называется

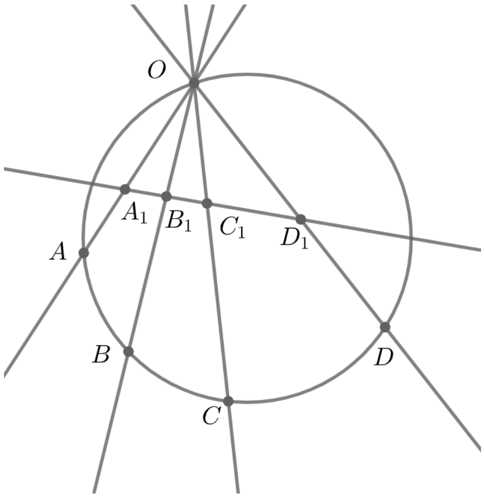
$$(A, B, C, D) = \left(\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}\right) / \left(\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}\right).$$

Теорема Двойное отношение четырех точек сохраняется при проектировании, где двойным отношением четверки точек (A_1, B_1, C_1, D_1) называется выражение

$$\left(\frac{\overline{C_1A_1}}{\overline{C_1B_1}}\right) / \left(\frac{\overline{D_1A_1}}{\overline{D_1B_1}}\right).$$

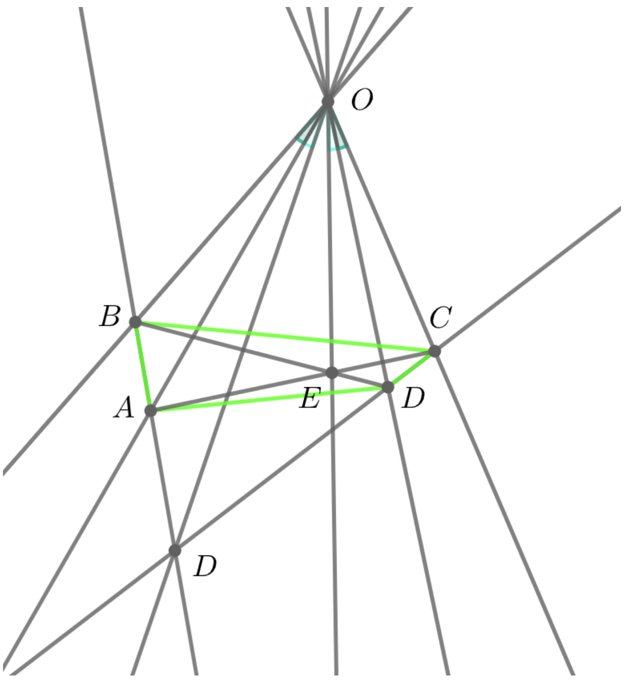
При этом при проектировании из точки O на окружность точки A_1, B_1, C_1, D_1 переходят в точки A, B, C, D соответственно, а двойным отношением четверки точек (A, B, C, D) лежащих на окружности называется выражение

$$\left(\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}\right) / \left(\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}\right).$$



1.6 Теорема об изогоналях

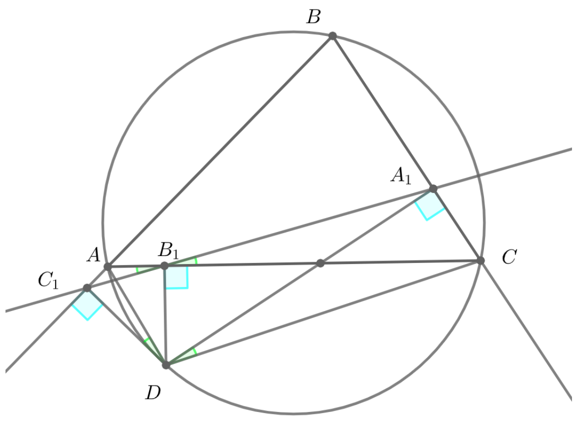
Теорема Пусть OA и OD — изогонали в угле BOC, тогда точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ и точка пересечения его сторон AB и CD изогонально сопряжены относительно угла BOC.



2 Прямая Симсона

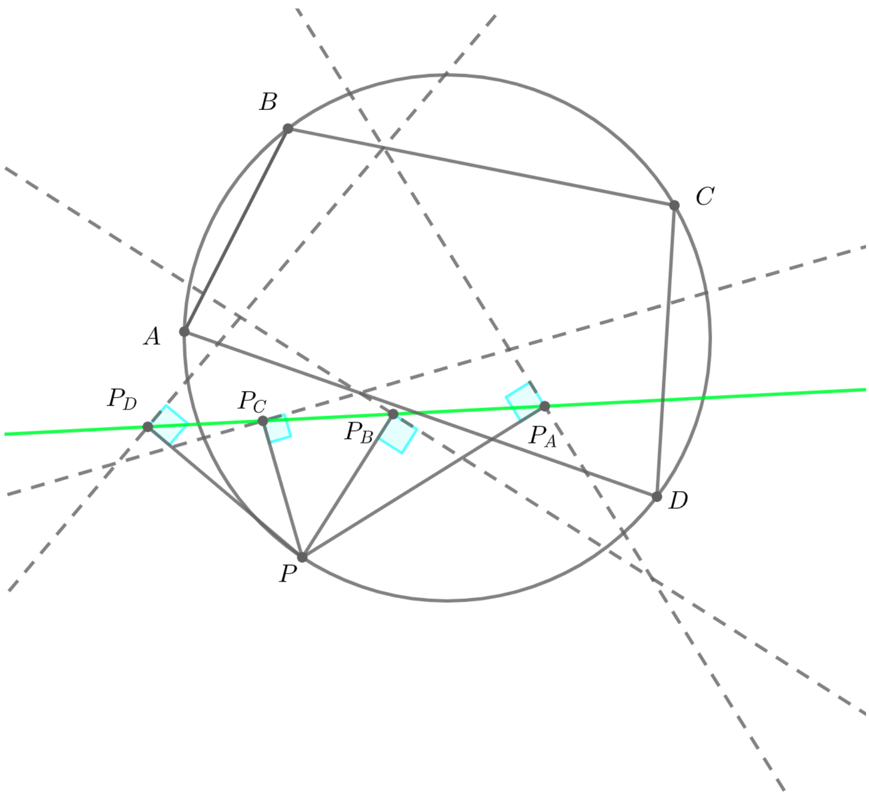
2.1 Теорема Симсона

Теорема Основания перпендикуляров опущенных на стороны треугольника ABC из точки, лежащей на описанной окружности, его лежат на одной прямой.



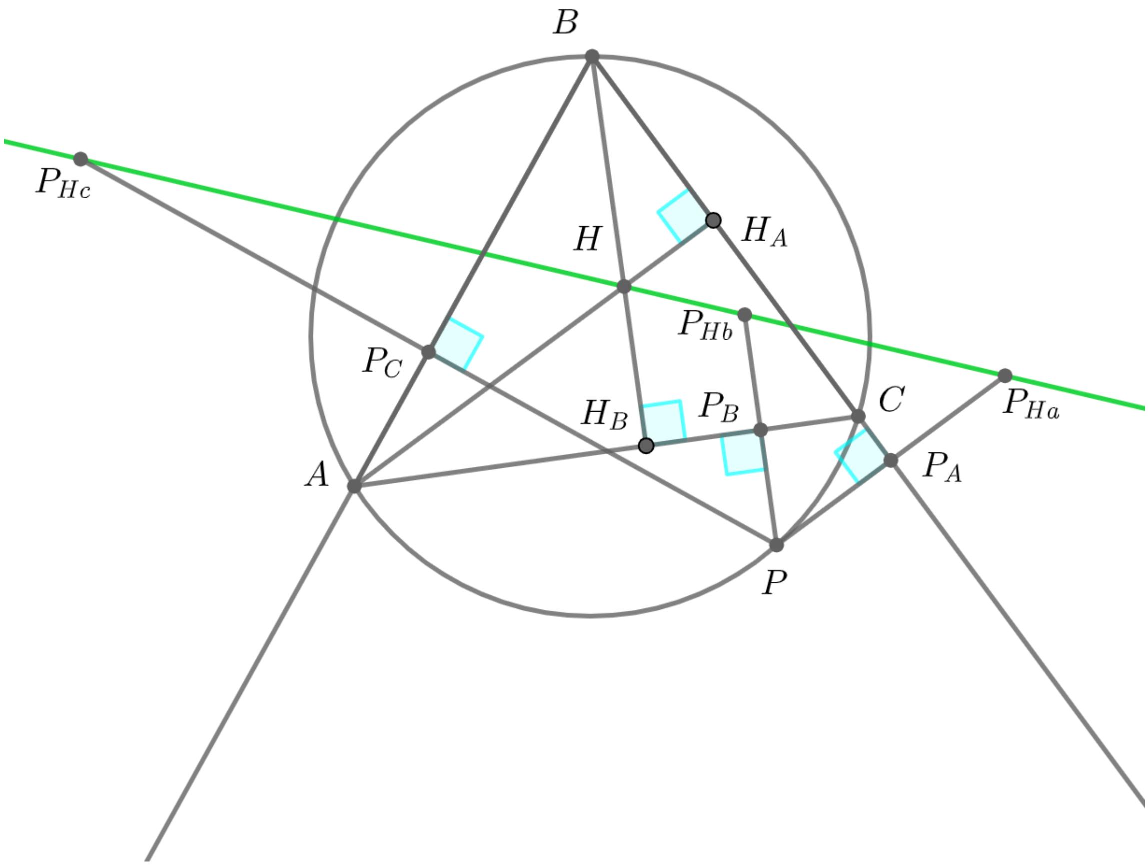
2.2 Прямая Симсона вписанного n-угольника

Теорема Пусть дан n–угольник и точка P, рассмотрим всевозможные прямые Симсона точки P относительно троек вершин n–угольника. Тогда основания перпендикуляров из P на эти прямые будут лежать на одной прямой — обобщенной прямой Симсона.



2.3 Прямая Штейнера

Теорема Дан треугольник ABC, на дуге AC, не содержащей точку B взята произвольная точка P. Точку P_{Hc}, P_{Ha} симметричны точке P относительно сторон BA и BC соответственно. Докажите, что прямая P_{Ha}, P_{Hc} проходит через ортоцентр H треугольник.



Доказательство:

1. Заметим, что $BP_{H_C}AH$ — вписанный, т.к. внешний угол четырехугольника равен внутреннему углу: $\angle BP_{Hc}A = \angle BPA = \angle BCA = \angle BHH_A$.

2. Аналогично $BHCP_{Ha}$ — вписанный.

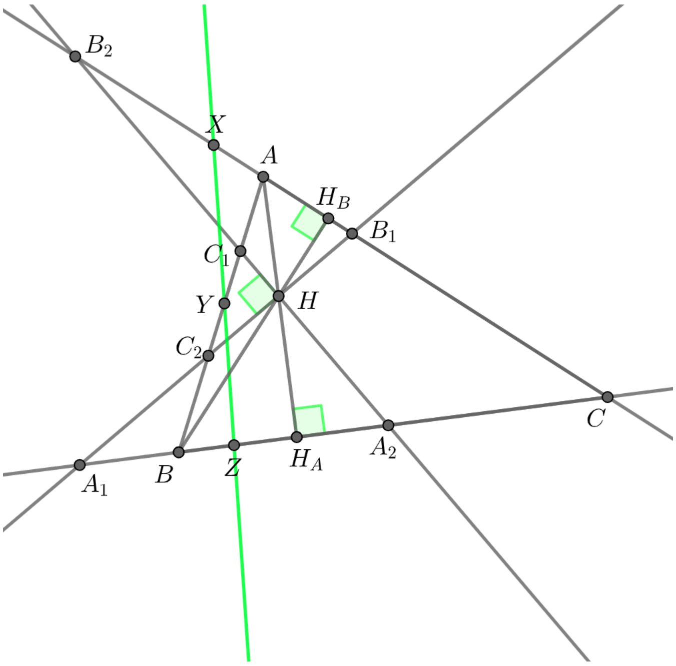
3. Тогда $\angle BHP_{Hc} = \angle BAP_{Hc}$=$\angle BAP$ и $\angle BHP_{Ha} = \angle BCP_{Ha} = \angle BCP$ и $\angle BAP + \angle BCP = 180° \implies \angle BHP_{Hc} + \angle BHP_{Ha} = 180°$, то есть точки P_{H_c}, H, P_{H_a} лежат на одной прямой. Следовательно прямая P_{H_c}, P_{H_a} проходит через точку H.

Ч.Т.Д.

3 Обобщения прямой Симсона

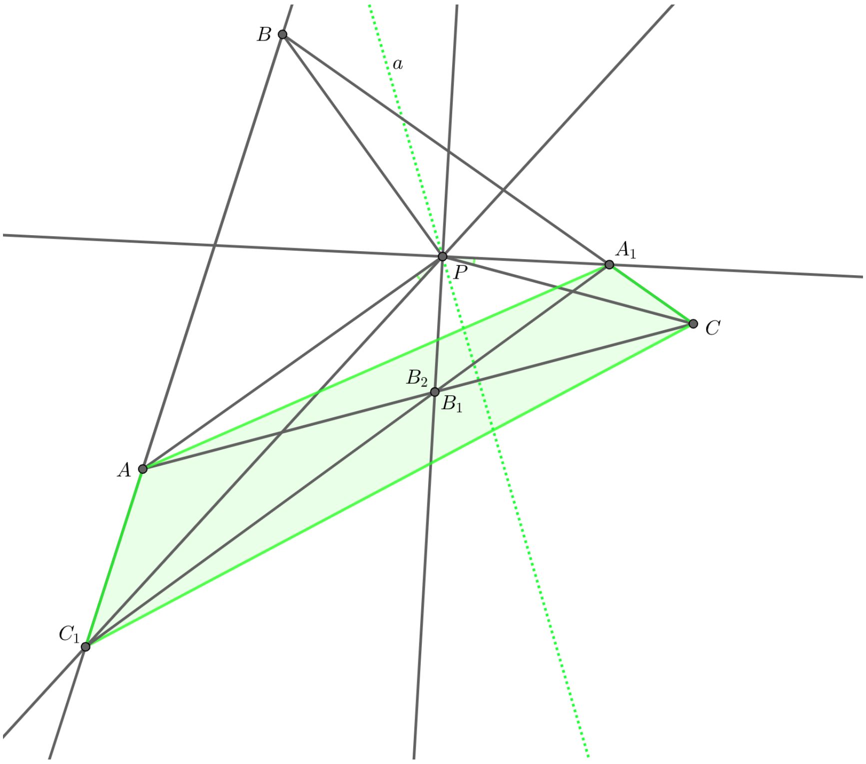
3.1 Теорема Дроз-Фарни

Теорема Пусть через ортоцентр H треугольника ABC проходит две перпендикулярные прямые, которые пересекают стороны в точках $B_1, B_2, A_1, A_2, C_1, C_2$, тогда пусть X, Y, Z — середины отрезков B_1B_2, C_1C_2, A_1A_2 соответственно, тогда они лежат на одной прямой.



3.2 Обобщенная теорема Дроз-Фарни

Теорема Пусть в треугольнике ABC взята произвольная точка P, а через нее проведена произвольная прямая a, прямые PA_1, PB_1, PC_1 симметричны прямым AP, BP, CP соответственно относительно прямой a. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямых BC, AC и AB соответственно. Тогда точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.



Доказательство:

1. Заметим, что PC, PC_1 изогонально сопряжены относительно $\angle APA_1$, так как PA_1, PA и PC_1, PC симметричны относительно прямой a.

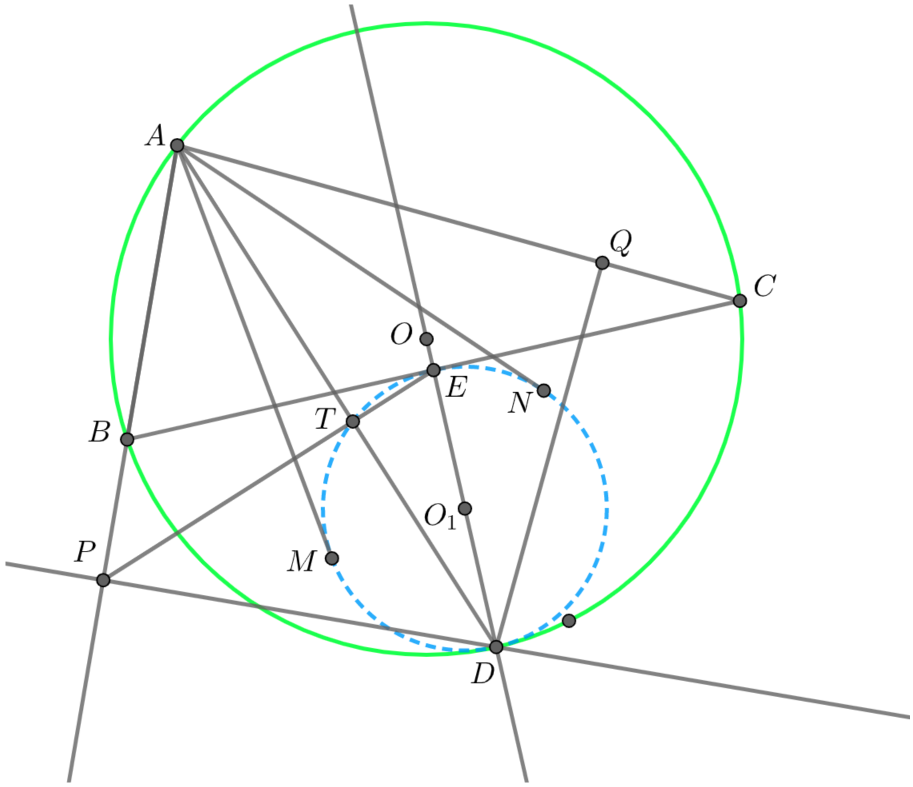
2. Применим теорему об изогоналях для четырехугольника C_1AA_1C в $\angle APA_1$:
Точки C, C_1 лежат на изогоналях $\angle APA_1 PC, PC_1$ соответственно, а точки A, A_1 на сторонах $\angle APA_1 PA, PA_1$ соответственно. Тогда точки пересечения прямых, содержащих его стороны $AC_1, A_1C = B$ и содержащих его диагонали $CC_1, AA_1 = B_2$ изогонально сопряжены относительнольно $\angle APA_1$.
То есть прямая PB симметрична прямой PB_2 относительно прямой a, биссектрисы $\angle APA_1$.

3. По условию прямая PB_1 также симметрична прямой PB относительно прямой a, значит прямые PB_1 и PB_2 совпадают. Значит совпадают и их точки пересечения с прямой AC — точки B_1, B_2 соответственно. Точка B_2 принадлежит прямой A_1C_1, а значит и точка B_1 принадлежит прямой A_1C_1, и A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

Ч.Т.Д.

4 Задачи

4.1 Окружность S описана около остроугольного треугольника ABC. Точка D — середина меньшей дуги BC этой окружности. Окружность Ω касается S в точке D, а также касается стороны BC. На луче AB отложена точка P_1 таким образом, что длина отрезка AP_1 равна длине касательной из точки A к Ω. Докажите, что $\angle AP_1D$ — прямой.



Доказательство:

1. Заметим, что в силу симметрии окружность Ω касается стороны BC в ее середине — точке E.

2. Пусть P и Q — основания перпендикуляров из точки D на прямые AB и AC соответственно. Тогда по теореме Симсона точки P, E, Q лежат на одной прямой.

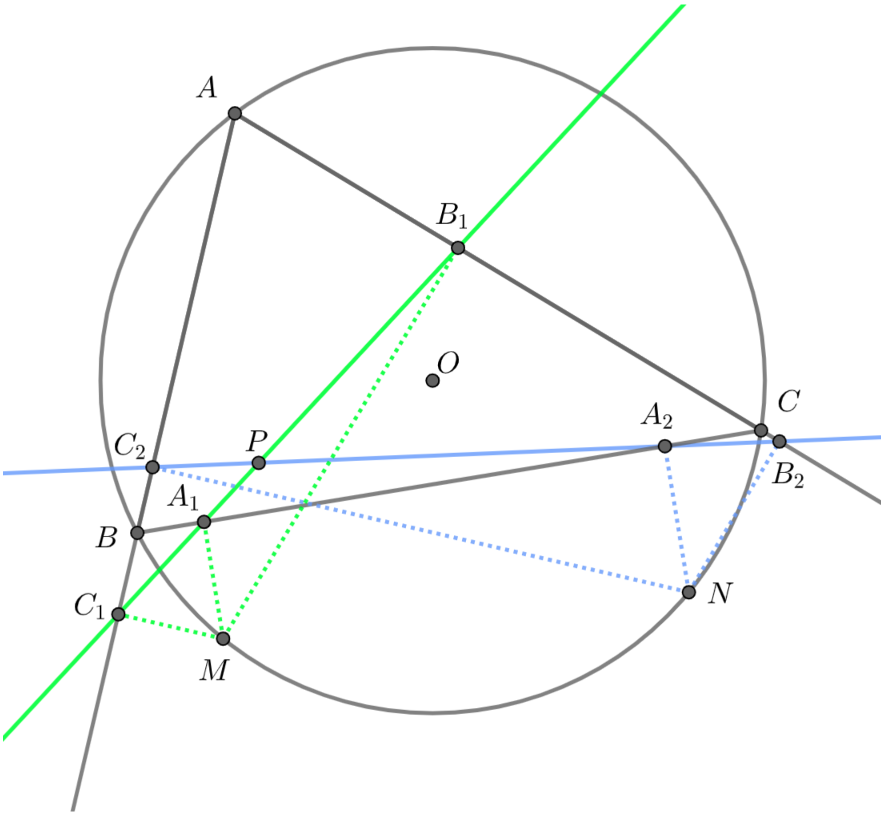
3. Пусть T — точка пересечения AD и PQ, тогда точка $T \in \Omega$, так как $\angle ATQ = 90°$.
   (AT — биссектриса $\angle PAQ$, $\triangle PAQ$ — равнобедренный в силу того, что D принадлежит биссектрисе $\angle ABC$, а в равнобедренном треугольнике высота совпадает с биссектрисой)
   Следовательно ED — диаметр Ω.

4. Тогда заметим, что AP — касательная к описанной окружности $\triangle TPD$, так как $\angle BPD = 90° = 180° - \angle PTD$.

5. Тогда по степени точки A относительно описанной окружности $\triangle PTD$, $AP^2 = AT \cdot AD$, а относительно окружности $\Omega AT \cdot AD = AM^2$, значит $AP = AM$, значит $P = P_1$ и $\angle DP_1A = 90°$.

Ч.Т.Д.

4.2 Докажите, что угол между прямыми Симсона, соответствующими двум точкам описанной окружности треугольника, равен половине дуги между этими точками.



Доказательство:

1. Заметим, что $\angle C_2PA_1 = \angle PA_1A_2 + \angle PA_2A_1$, — как внешний.

2. $\angle PA_1A_2 = \angle BA_1C_1, \angle PA_2A_1 = \angle CA_2B_2$ — как вертикальные.

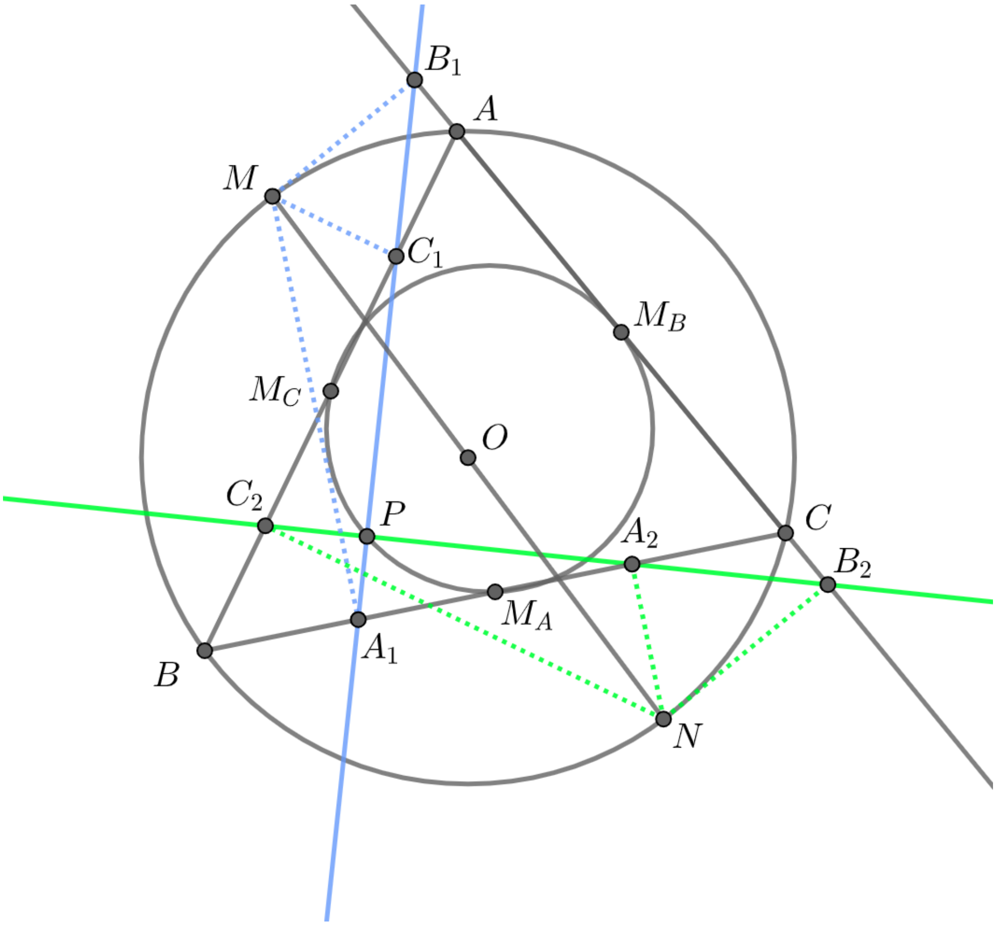
3. $\angle BA_1C_1 = \angle BMC_1, \angle CA_2B_2 = \angle CNB_2$, так как C_1BA_1M, CA_2NB_2 — вписанные четырехугольники.

4. $\angle BA_1C_1 = \angle BMC_1 = 90^\circ - \angle C_1BM = 90^\circ - \angle ACM$, аналогично $\angle CA_2B_2 = 90^\circ - \angle ABN$

5. Следовательно $\angle C_2PA_1 = \angle BA_1C_1 + \angle CA_2B_2 = 180^\circ - \angle ACN - \angle ABN = \angle MAN = 2\angle MON$.

Ч.Т.Д.

4.3 Докажите, что прямые Симсона двух диаметрально противоположных точек описанной окружности треугольника перпендикулярны, а их точка пересечения лежит на окружности девяти точек.



Доказательство:

1. Применим теорему, доказанную в предыдущей задаче: угол между прямыми Симсона точек M и N равен половине дуги MN, в нашем случае дуга равна $180°$, а значит прямые Симсона перпендикулярны

2. Заметим, что точки M_C, M_A — середины сторон C_2C_1, A_1A_2 соответственно, так как это проекции середины отрезка MN на стороны AB, BC соответственно

3. $\triangle C_2PC_1$ — прямоугольный, поэтому $\angle M_CPC_1 = \angle M_CC_1P = \angle B_1C_1A$ — как вертикальные

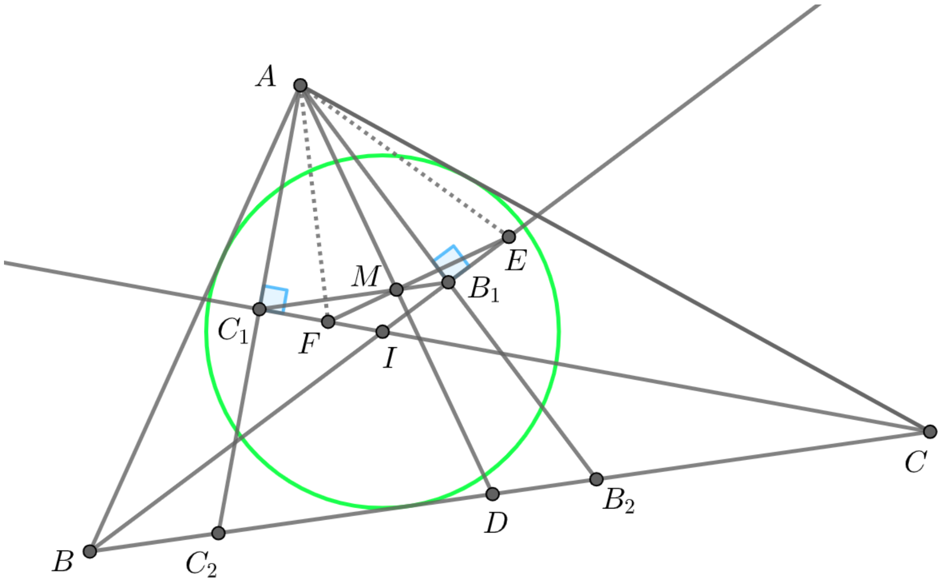
4. $\angle B_1C_1A = \angle B_1MA$, так как BMC_1A — вписанный

5. $\angle B_1MA = 90° - \angle B_1AM = 90° - \angle MBC \Rightarrow \angle M_CPC_1 = 90° - \angle NBA$

6. Следовательно $\angle M_CPM_A = 180° - \angle MBC - \angle NBA + 90° = 180° - 90° - \angle ABC + 90° = 180° - \angle ABC$, но $\angle M_CM_BM_A = \angle ABC$ из соображений параллельности, а значит $\angle M_CPM_A + \angle M_CM_BM_A = 180°$, то есть P лежит на описанной окружности $\triangle M_CM_BM_A$ — окружности Эйлера.

Ч.Т.Д.

4.4 В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, D —произвольная точка на стороне BC. Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает прямые BI и CI в точках F и E соответственно. Найдите геометрическое место точек ортоцентров треугольников EIF.



Доказательство:

1. Опустим перпендикуляры AC_1, AB_1 из точки A на CI, BI соответственно. Пусть их продолжения пересекают BC в точках C_2, B_2 соответственно.

2. Тогда, так как в треугольниках $\triangle CAC_2, \triangle BAB_2$ высота совпадает с биссектрисой, точки C_1, B_1 являются серединами отрезков AC_2, AB_2 соответственно, а значит они лежат на одной прямой с точкой M, а именно на средней линии $\triangle ABC$, параллельной BC.

3. Заметим, что четырехугольник $AFIE$ вписанный, так как AC_1IB_1 —вписанный, и $\angle C_1AF = \angle C_1MF$ (так как C_1AMF вписанный, потому что AC_1, AM — перпендикуляры к IF, FE соответственно)

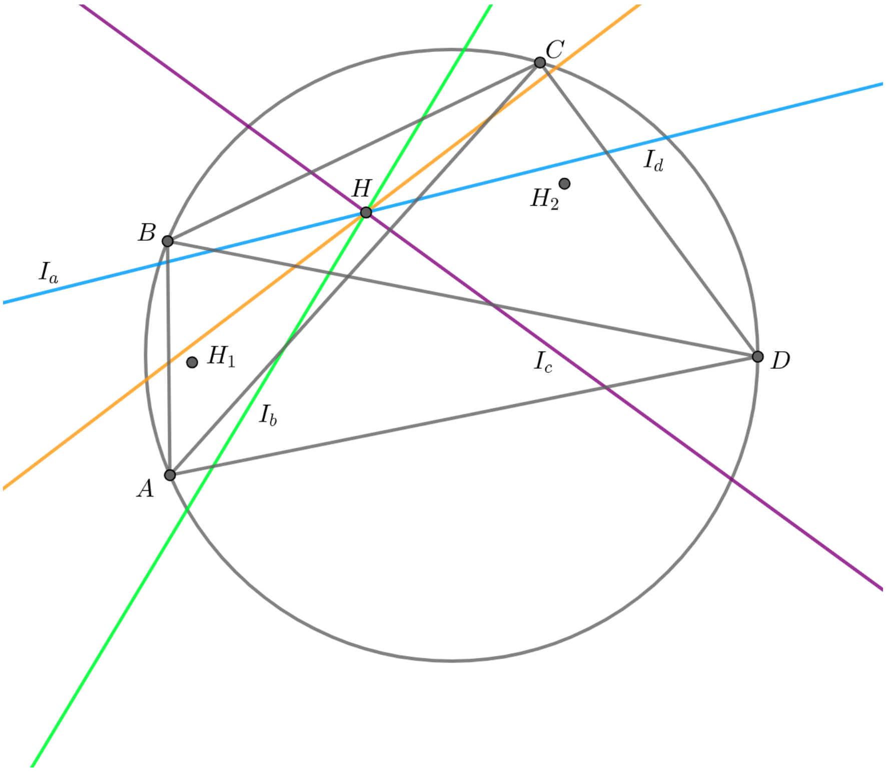
4. $\angle C_1MF = \angle EMB_1$ (как вертикальные), и $\angle EMB_1 = \angle EAB_1$ (так как $MAEB_1$ вписанный, потому что AM, AE — перпендикуляры к FE, IE соответственно).

5. А, значит, $\angle C_1AF = \angle B_1AE$, то есть $\angle C_1AB_1 = \angle FAE = 180° - \angle FIE$ и $FAEI$ — вписанный.

6. Заметим, что прямая Штейнера точки A относительно $\triangle FIE$ — это C_2B_2, то есть ортоцентр $\triangle FIE$ принадлежит C_2B_2, то есть лежит на BC.

Ч.Т.Д.

4.5 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность; l_a — прямая Симсона точки A относительно треугольника BCD, прямые l_b, l_c, l_d определяются аналогично. Докажите, что все эти четыре прямые пересекаются в одной точке.



Доказательство:

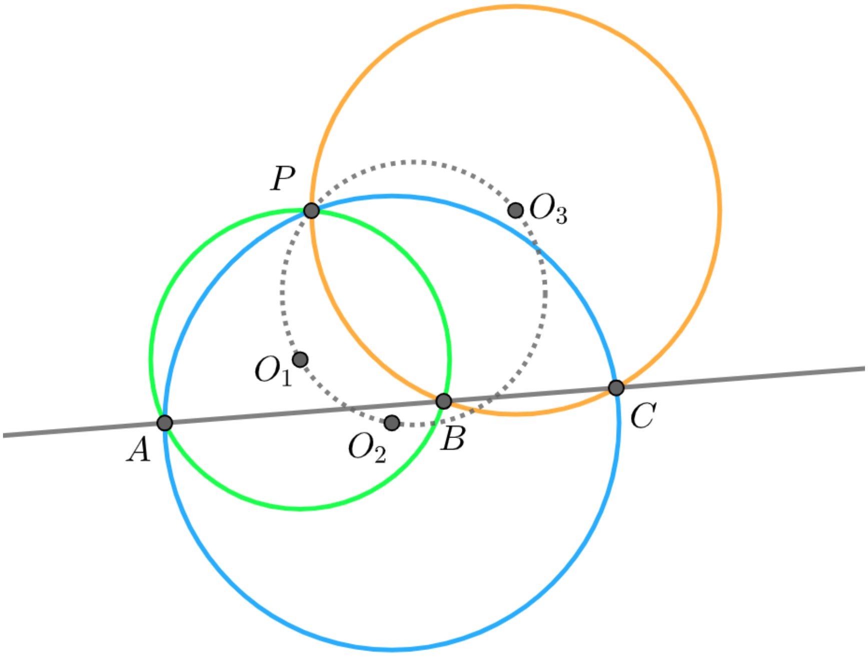
1. Докажем лемму: отрезки BH_1, CH_2 равны и параллельны.
   Вспомним третье свойство ортоцентра, из которого следует, что модули векторов BH_1, CH_2 равны удвоенному расстоянию от центра описанной окружности $ABCD$ до AD. Ортоцентры H_1, H_2 лежат на высотах, поэтому оба отрезка перпендикулярны AD.

2. Из леммы следует, что отрезки BH_2, CH_1 делят друг друга пополам как диагонали параллелограмма BH_1H_2C. Аналогичные рассуждения можно провести для пар вершин B, A; A, D; D, C. Получим, что отрезки AH_3, BH_2, CH_1, DH_4, где H_3, H_4 — ортоцентры $\triangle BCD, \triangle ABC$ соответственно, пересекаются в одной точке H и делят друг друга пополам.

3. Но заметим, что прямые Симсона проходят через середины этих отрезков (для каждой прямой — свой отрезок), что следует из теоремы о прямой Штейнера, значит, все прямые проходят через одну точку.

Ч.Т.Д.

4.6 Точки A, B лежат на одной прямой, точка P — вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, ACP и точка P лежат на одной окружности.



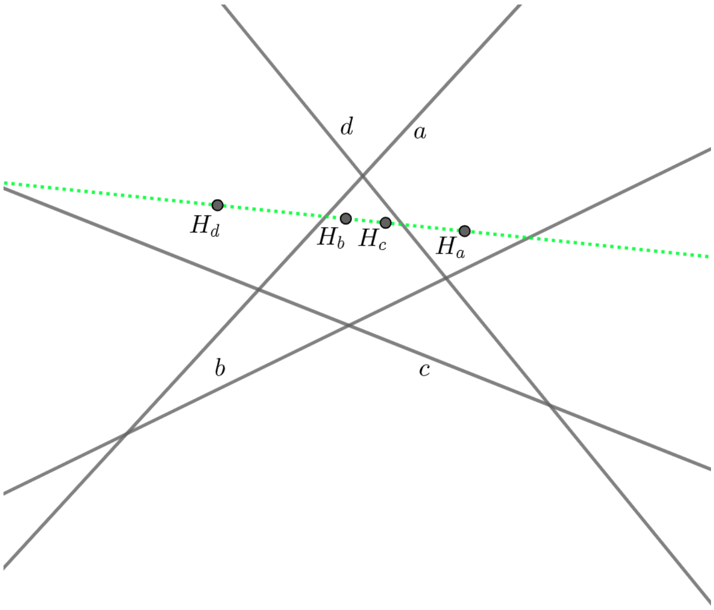
Доказательство:

1. Заметим, что точки A, B, C симметричны точке P относительно $\triangle O_1O_2O_3$ (так как O_1O_2, O_2O_3, O_1O_3 — серединные перпендикуляры к PA, PC, BP в силу равноудаленности точки на окружности от центра)

2. Значит, отражения точки P от сторон $\triangle O_1O_2O_3$ лежат на одной прямой, но значит и проекции на стороны $\triangle O_1O_2O_3$ лежат на одной прямой, но по теореме Симсона это значит, что $PO_1O_2O_3$ — вписанный $E5$.

Ч.Т.Д.

4.7 Докажите, что точки пересечения высот четырёх треугольников, образованных четырьмя пересекающимися прямыми плоскости, лежат на одной прямой (прямая Обера четырёхсторонника).



Доказательство:

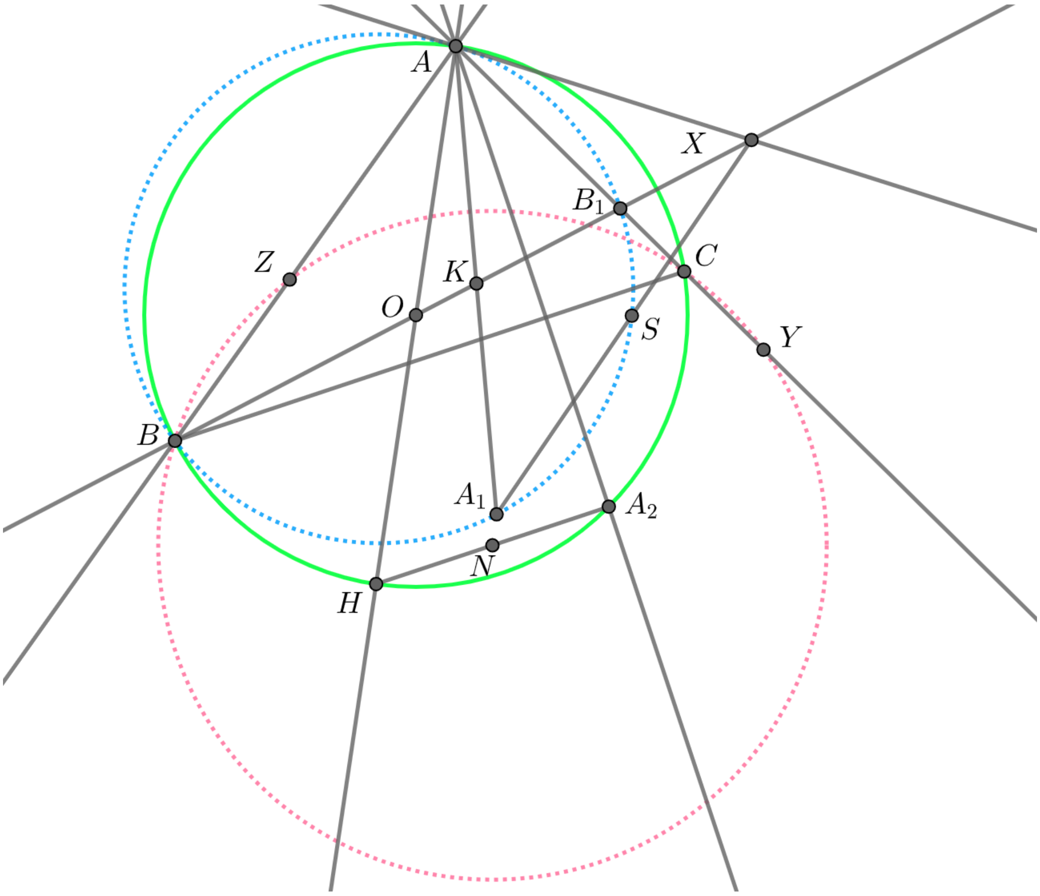
1. Пусть M — точка Микеля данной четверки прямых, тогда ортоцентры рассматриваемых треугольников лежат на прямых Штейнера этой точки.

2. Заметим, что у любых двух рассматриваемых треугольников ровно две стороны совпадают по прямым, а значит все прямые Штейнера совпадают (потому что у любых двух прямых Штейнера есть две общие точки, но прямая определяется двумя точками), а значит все ортоцентры лежат на одной прямой, которая называется прямой Обера.

Ч.Т.Д.

5 Авторские задачи

1 Дан треугольник ABC, такой что $\angle ACB > \angle ABC$. X — точка на BO, где O — центр описанной окружности треугольника ABC. A_1 — середина дуги BB_1 описанной окружности треугольника ABB_1. Оказалось, что AB — касательная к описанной окружности треугольника KSB. Луч, симметричный AX относительно AC, пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке A_2, луч AO вторично пересекает ту же окружность в точке M. N — середина MA_2. Окружность с центром в N проходит через C и пересекает отрезок AB и луч AC в точках Z и Y соответственно. Докажите, что ZY, BC и AA_2 пересекаются в одной точке.



Решение:

1. Лемма: AX касается окружности ABB_1:

   (a) Так как AB касается окр-ти KSB, $\angle ABK = \angle KSB$;

   (b) $\angle BSA_1 = \angle BAA_1 = 1/2\angle BAC$;

   (c) $\angle BKA_1 = \angle BAK + \angle ABK$, значит, $\angle BKA_1 = \angle KSA_1$, следовательно XK касается описанной окружности $\triangle KSA_1$.

   (d) Следовательно, $(XK)^2 = XS * XA_1 = XB_1 * XB$.

   (e) Заметим, если AX касается окр-ти ABB_1, то $XA^2 = XK^2$ (так как $\angle XAK = \angle ABA_1 = \angle ABO + 1/2\angle BAC$), а значит $AX^2 = XB_1 * XB = XK^2$.

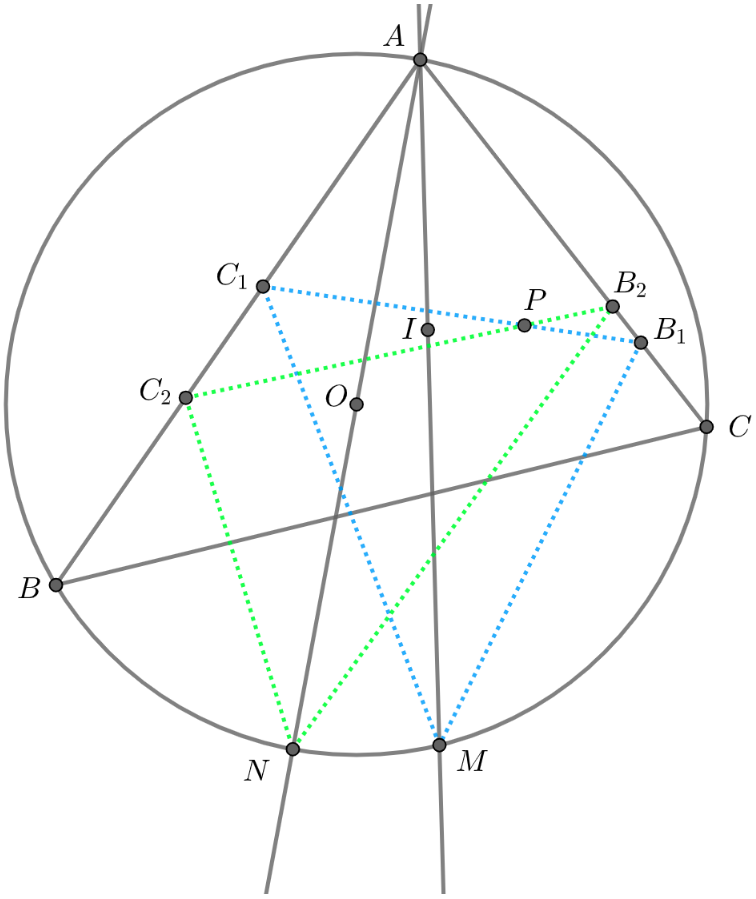
   (f) Точка, для которой выполняется $XB_1 * XB = XK^2$ единственна (за B_1), значит, AX — касательная.

2. Применим лемму, получим, что AX касается окружности ABB_1

3. Значит $\angle XAC = \angle ABB_1 = 90 - \angle ACB = \angle CAA_2$. Следовательно, AH — высота.

4. Заметим, что M, N изогонально сопряженные точки, B, C — проекции M на стороны AB, AC, значит Z, Y — проекции A_2. Тогда ZHY — прямая Симсона, ЧТД.

2 Дан треугольник ABC, O — центр описанной окружности, а I — центр вписанной окружности, прямые AO и AI повторно пересекают описанную окружность в точках N и M соответственно. Точки расположены на дуге BC в порядке B, N, M. Точки C_1, B_1 расположены на сторонах AB, AC так, что треугольник MC_1B_1 имеет наименьший периметр из всех возможных. Аналогично построен треугольник NC_2B_2. Угол между прямыми C_1B_1 и $C_2B_2 = \alpha$, чему равен $\angle ACB - \angle BAC$?



Решение:

1. Применим лемму, доказанную ранее, об угле между прямыми Симсона (угол между прямыми Симсона равен величине угла, опирающегося на хорду, раздел "Задачи 4.2).

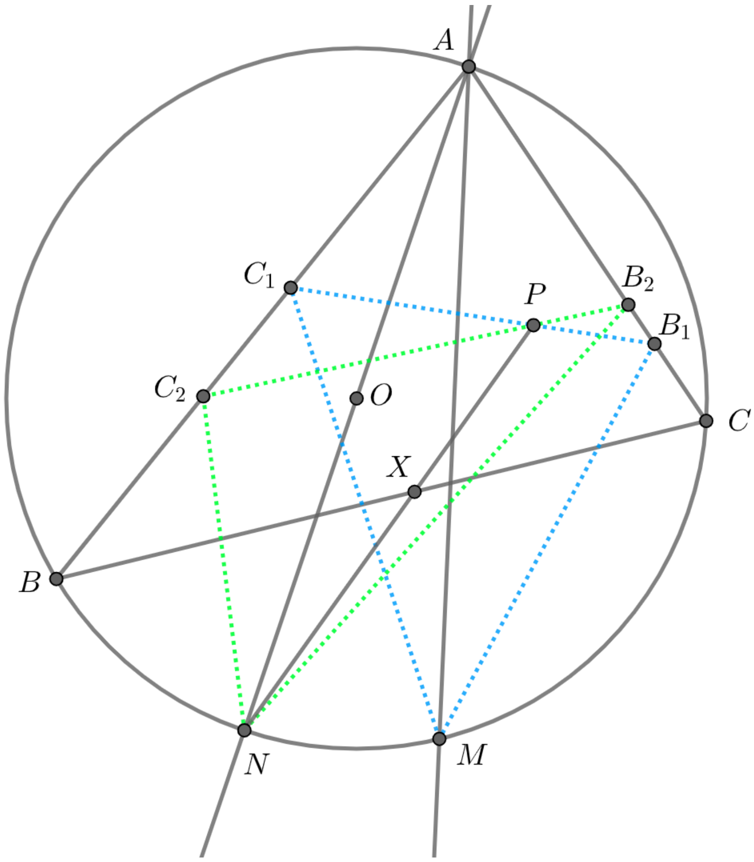
2. В данном случае мы имеем прямые Штейнера, что следует из обобщения задачи Фаньяно на окружность. А они параллельны прямым Симсона.

3. Следовательно, $\angle NAM = \alpha$.

4. $\angle NAM = \angle IAB - \angle OAB = 0,5 \cdot \angle BAC - 90 + \angle ACB = 0,5 \cdot (\angle BAC - 180 + 2\angle ACB) = 0.5 \cdot (\angle ACB - \ CAB)$. Следовательно, $\angle ACB - \ CAB = 2\alpha$.

ОТВЕТ: $\angle ACB - \angle CAB = 2\alpha$

3 Дан треугольник ABC, O — центр описанной окружности, X — произвольная точка внутри треугольника. Прямые AO и AP повторно пересекают описанную окружность в точках N и M соответственно. Точки C_1, B_1 расположены на сторонах AB, AC так, что треугольник MC_1B_1 имеет наименьший периметр из всех возможных. Аналогично построен треугольник NC_2B_2. В каком отношении отрезок PN делит сторону BC?



Решение:

1. Заметим,что рассуждая так же, как в задаче Фаньяно, можно прийти к выводу, что C_1B_1, C_2B_2 — прямые, содержащие образы точек M, N соответственно при симметрии относительно сторон AB, AC треугольника.

2. Заметим, что ортоцентр лежит на обеих прямых, так как они являются прямыми Штейнера точек M, N относительно описанной окружности треугольника ABC.

3. Значит, точка P является ортоцентром треугольник. Следовательно, PN делит BC в отношении $1/1$.

ОТВЕТ: PN делит BC в отношении $1/1$

6 Литература

«От прямой Симсона до Дроз-Фарни», Д. Швецов, 2009
«Теорема об изогоналях», А.Куликова, Д.Прокопенко, 2018
«Свойства ортоцентра в теоремах и задачах», Цю Ноэль Гуанжун, 2015