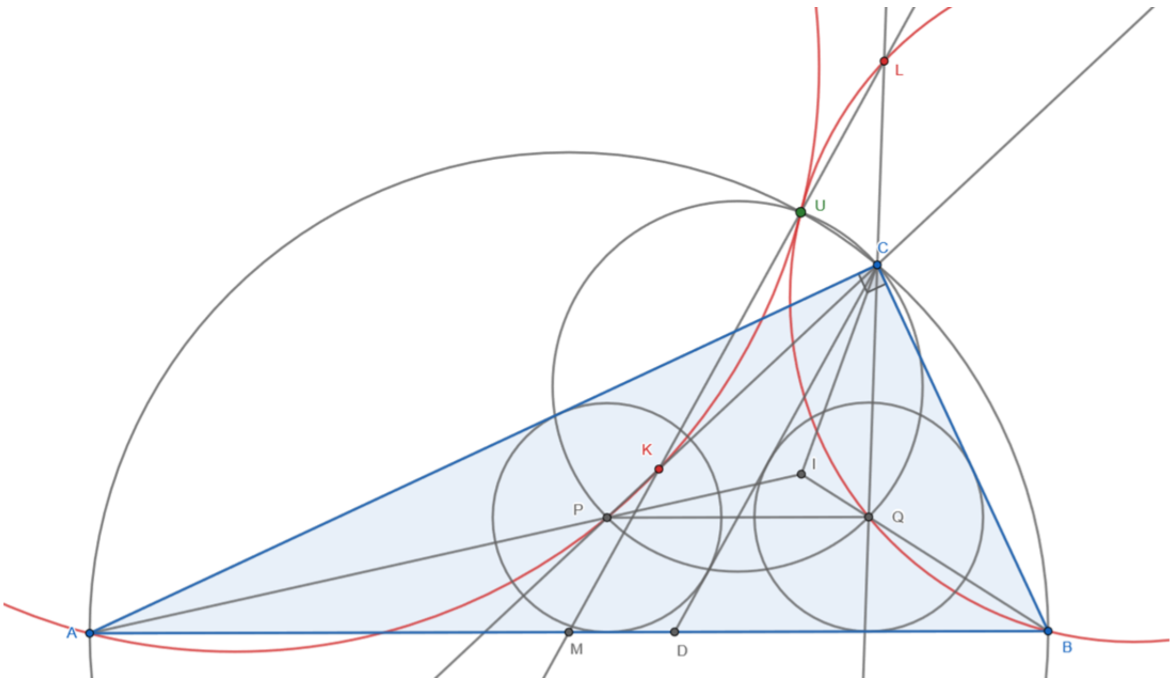
# Две равные вписанные окружности в прямоугольном треугольнике

**Комаров Сергей Сергеевич**

**ВШЭ**

## Теорема:

*Точка $D$ выбрана на гипотенузе $AB$ прямоугольного треугольника $ABC$ так, что окружности, вписанные в треугольники $ACD$ и $BCD$, имеют равные радиусы. Назовём центры этих окружностей $P$ и $Q$ соответственно, а середину $AB$ обозначим через $M$. Определим точки $K$ и $L$ как пересечения прямой, проходящей через $M$ параллельно $CD$, с прямыми $PC$ и $QC$ соответственно. Обозначим точку пересечения, отличную от $C$, описанных окружностей треугольников $\triangle ABC$ и $\triangle PCQ$ через $U$. Тогда описанные окружности треугольников $\triangle AKP$ и $\triangle BQL$ касаются в точке $U$.*




## Обозначение основных точек:

$I$ - центр вписанной окржности тругольника $\triangle ABC$.
$E$ – точка касания вписанной окружности $\triangle ABC$ с прямой $AB$.
$F$ – середина $PQ$.
$G$ – точка пересечения $CI$ и прямой, симметричной $CD$ относительно $PQ$.
$T$ – точка пересечения прямой $IE$, прямой $CD$ и окружности $PDEQ$.
$U^{'}$ – точка пересечения прямой $IE$ и описанной окружности треугольника $\triangle ABC$.
$R$ – точка, в которую перешла $C$ при гомотетии $H_I^{\frac{IP}{IA}}$.
Окружность, проходящая через точки $A_1, A_2 \ldots, A_n$ обозначим $(A_1A_2 \ldots A_n)$.
$J := IE \cap (PQC)$.
$X := CI \cap (ARB)$.
$Y := IE \cap (ARB)$.
$S := IE \cap (ABC)$.
$Z := CI \cap (ABC)$.
$N := IE \cap (ARB)$.
$W := CD \cap (PQCU)$.

**Наметим план доказательства, разбив задачу на отдельные факты, которые сами по себе довольно интересны. В доказательстве леммы с номером n не используются леммы с но-**

**мерами большими, чем n.**
**Лемма 1**
**Лемма 1.1.** Прямая $CD$ проходит через середину отрезка $PQ$.
**Лемма 1.2.** $CD$ симметрична $CI$ относительно биссектрисы угла $\angle PCQ$.
**Лемма 1.3.** Прямая, симметричная $CD$ относительно $PQ$, персекает $CI$ на описанной окружности треугольника $\triangle PCQ$.
**Лемма 2.** *Точка $F$ равноудалена от точек $P, D, E, Q$.* [1]
**Лемма 3.** *Прямая, проходящая через $M$ параллельно $CD$, прямая $IE$ и описанная окружность треугольника $\triangle ABC$ пересекаются в одной точке $U'$.*
**Лемма 4.** *Четырёхугольник $PQCU'$ – вписанный. $\Rightarrow U' = U$.*
**Лемма 5.** *Точка $I$ – ортоцентр треугольника $\triangle PUQ$;* $\triangle APU \sim \triangle UQB$.
**Основная теорема.** *$APKU$ и $BQUL$ – вписанные четырёхугольники, описанные окружности которых касаются в точке $U$.*

## Доказательство леммы 1

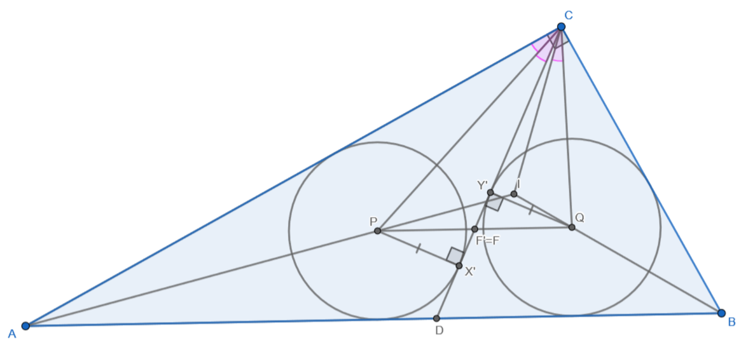



Рис. 1: К леммам 1.1 и 1.2

**Доказательство леммы 1.1.**
Определим $X'$ и $Y'$ как точки касания вписанных окружностей с $CD$.
Определим $F' = CD \cap PQ$.
Докажем, что $F'$ - это середина $PQ$.
$CD$ – это общая внутренняя касательная к вписанным окружностям равного радиуса $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{PX' = QY', как радиусы} \\ \angle\text{PX'F'} = \angle\text{F'Y'Q} = 90^\circ \\ \angle\text{PF'X'} = \angle\text{Y'F'Q, как вертикальные.} \end{cases} \Rightarrow \quad \triangle PX'F' = \triangle QY'F' \quad \Rightarrow \quad F' \text{ – середина } PQ. \ \textbf{QED}$$

**Доказательство леммы 1.2.**
Для этого докажем, что $\angle ICQ = \angle PCF$.
Заметим, что $CI$, $CP$ и $CQ$ биссектрисы углов $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ACD$ и $\angle DCB$ соответственно $\Rightarrow \angle PCQ = \dfrac{\angle ACB}{2} = 45^\circ = \angle ACI \Rightarrow \angle ACP = \angle ICQ$, вспомним, что $CP$ - биссектриса угла $\angle ACD$, и получим, что $\angle ACP = \angle PCF \Rightarrow \angle ICQ = \angle PCF$. **QED**

**Докозательство леммы 1.3.**

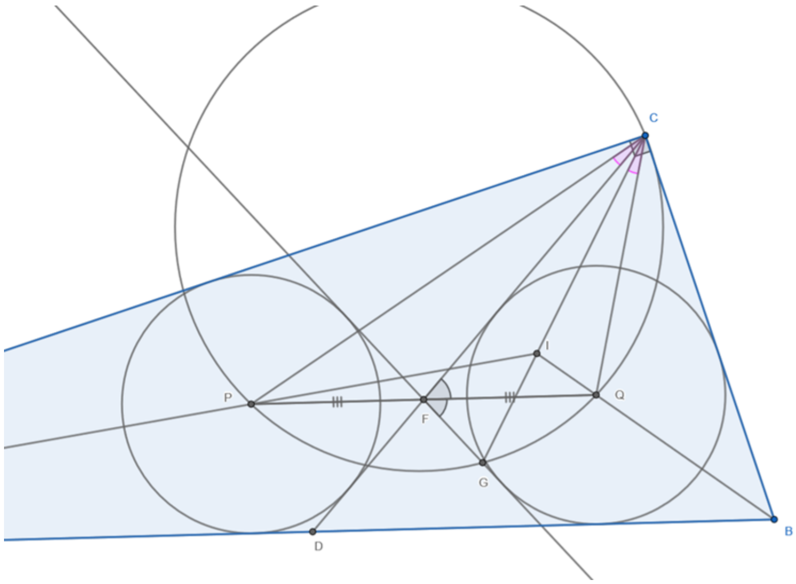



Рис. 2: К лемме 1.3

Из лемм 1.1 и 1.2 следует, что $CI$ – симедиана в $\triangle PCQ$, а $CF$ – его медиана.
Отразим $CD$ относительно $PQ$ - линии центров двух вписанных окружностей. Это будет вторая общая внутренняя касательная этих окружностей. Обозначим точку пересечения этой общей касательной с прямой $CI$ – $G$. Тогда, применив факт №1 для треугольника $\triangle PCQ$, получим, что $G$ будет лежать на описанной окружности треугольника $\triangle PCQ$. **QED**

**Факт №1.** *Если отразить медиану относительно стороны, к которой она проведена, то она пересечет симедиану, проведённую к той же стороне, в точке на описанной окружности этого треугольника. (Эта точка будет являться отраженной точкой Шалтая. Она же дополняет вершины треугольника до гармонического четырехугольника).*
**Доказательство факта №1**

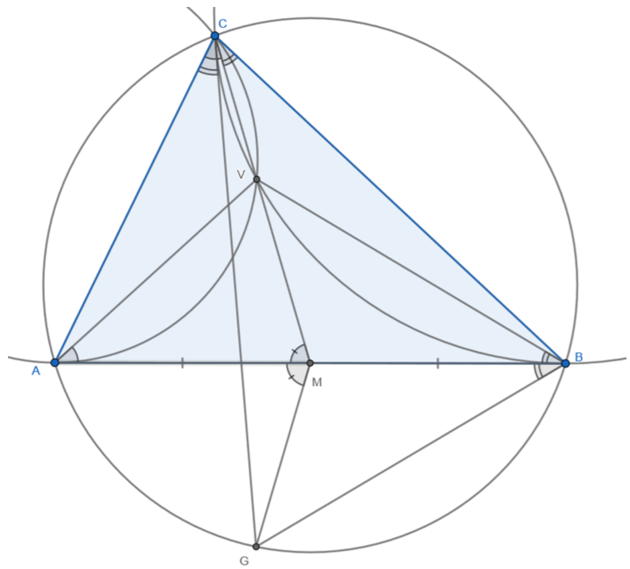



Рис. 3: К известному факту 1

Точки определённые в формулировке факта №1 или его доказательстве не относятся к основным леммам.
$\triangle ABC$ - произвольный треугольник.
Определим точку Шалтая $V$ как пересечение двух окружностей, проходящих через вершину $C$ треугольника $ABC$ и касающихся прямой $AB$ в точках $A$ и $B$.
Определим $M$ как точкау пересечения прямых $CV$ и $AB$.
Т.к. $VC$ - радикальная ось окружностей $AVC$ и $BCV$: $AM^2 = MV \cdot MC = MB^2 \;\Rightarrow\; AM = MB \;\Rightarrow\; CM$ – медиана в $\triangle ABC$.
$\angle ACV = \angle VAB$ (по теореме про угол между касательной $AB$ и хордой $AV$), аналогично $\angle VCB = \angle VBA \Rightarrow \;\angle VBA + \angle VAB = \angle ACB$. Тогда $\boxed{\angle ACB + \angle AVB = 180^\circ}$.
Отразим $V$ относительно $AB$ и получим точку $G$. Тогда $\triangle AVB = \triangle AGB \Rightarrow \angle AVB = \angle AGB \Rightarrow \angle ACB + \angle AGB = 180^\circ \;\Rightarrow\; ACBG$ – вписанный $\Rightarrow \angle ACG = \angle ABG$. $\angle ABG = \angle ABV$, так как $\triangle AVB = \triangle AGB \Rightarrow \angle ACG = \angle ABV = \angle VCB \Rightarrow CG$ – симедиана, так как $AV$ – медиана $\Rightarrow$ симедиана и медиана, отраженная относительно $AB$, пересекаются на описанной окружности $\triangle ABC$. **QED**

# Доказательство леммы 2

Доказательство этой леммы в общем случае и ещё много интересных фактов про две вписанные окружности, в том числе и доказательство того, что $2CD^2 = AC \cdot CB$, приведены в статье.[1]
Я же напишу доказательство этой леммы здесь, чтобы не нарушать целостность рассуждений.

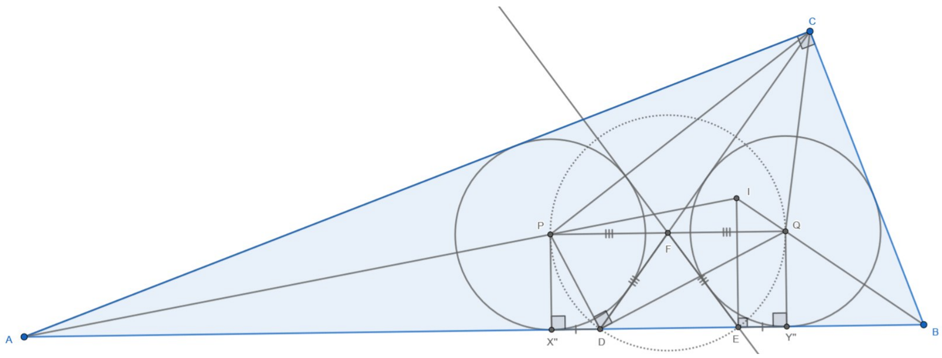



Рис. 4: К лемме 2

Определим $E'$ как точку пересечения прямой симметричной $CD$ относительно $PQ$ с $AB$.
Определим $X''$ и $Y''$ как точки касания вписанных окружностей $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ соответственно со стороной $AB$.
Заметим, что $DP$ и $DQ$ биссектрисы смежных углов $\Rightarrow\ \angle PDQ = 90° \Rightarrow$ по лемме 1.1 $PF = FQ = DF$. Применив факт №2 для $\triangle ABC$, получим, что $E = E'$. Очевидно, $X''PQY''$ – прямоугольник. Заметим, что при симметрии относительно серединного перпендикуляра к $PQ$ : $F \to F,\ P \to Q,\ X'' \to Y''$, а также из факта №2 мы знаем, что $DX'' = EY''$ значит и $D \to E\ \Rightarrow DF = FE\ \Rightarrow F$ равноудалена от точек $P, D, E, Q$. **QED**

**Факт №2.** *В произвольном треугольнике $\triangle ABC$ на стороне $AB$ взята точка $D$. Общая внутренняя касательная, проведённая к вписанным окружностям треугольников $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$, отличная от $CD$, проходит через точку касания вписанной окружности $\triangle ABC$ со стороной $AB$.*

**Доказательство факта №2**

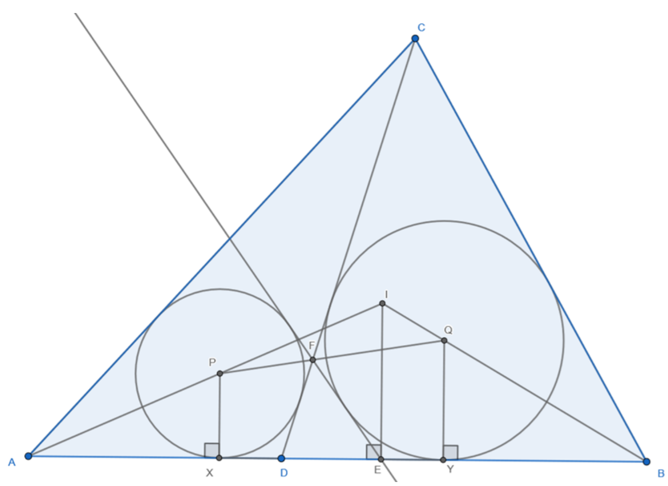



Рис. 5: К известному факту 2

Точки определённые в формулировке факта №2 или его доказательстве не относятся к основным леммам. Определим $P$ и $Q$ как центры вписанных окружностей треугольников $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$
Определим $E$ как точку касания вписанной окружности $\triangle ABC$ с прямой $AB$.
Определим $E'$ как точку пересечения прямой симметричной $CD$ относительно $PQ$ с $AB$.
Определим $F = CD \cap PQ$

Определим $X$ и $Y$ как точки касания вписанных окружностей треугольников $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ соответственно со стороной $AB$.
Обозначим $AC = b,\ CB = a,\ CD = d,\ AD = z,\ DB = t.$
Вписанные окружности $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ являются вневписанными окружностями $\triangle DFE' \Rightarrow XE' = DY = \dfrac{P_{\triangle DFE'}}{2} \Rightarrow DX = \dfrac{P_{\triangle ADC} - b}{2} = \dfrac{z+d-b}{2} = E'Y \quad (1)$
$EY = EB - YB = \dfrac{P_{\triangle ABC} - b}{2} - \dfrac{P_{\triangle DCB} - d}{2} = \dfrac{z+t+a-b}{2} - \dfrac{a+t-d}{2} = \dfrac{z+d-b}{2} \quad (2)$
Из (1) и (2) $\Rightarrow\ E = E'$. **QED**

## Доказательство леммы 3

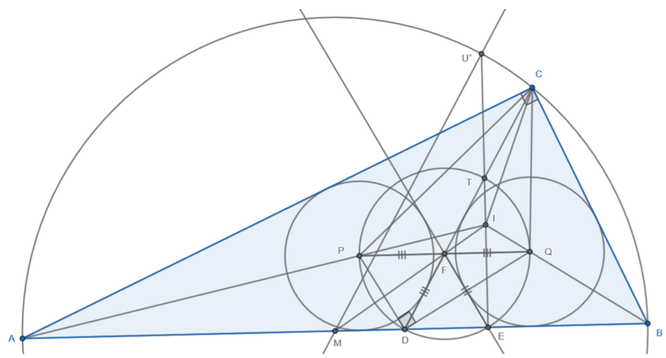



Рис. 6: К лемме 3

• Продлим $IE$ до пересечения с $CD$ до точки $T$. При симметрии относительно $PQ : IE \to IE$, так как $IE \perp AB$ и $PQ \parallel AB\ \Rightarrow IE \perp PQ$, $CD \to$ вторая общая касательная - $FE$. Тогда при обратной симметрии прямые $CD$ и $IE$ тоже пересекутся на окружности $PDEQ$, так как $PQ$ – диаметр этой окружности, а она переходит сама в себя. Значит, $IE$ и $CD$ пересекаются на окружности $PDEQ$ в точке $T$.

• Сделаем гомотетию с центром в $I$, переводящую $P \to A$, так как $PQ \parallel AB \Rightarrow \frac{IP}{IA} = \frac{IQ}{IB} = k\ \Rightarrow Q \to B$. Тогда при $H_I^k : PQ\ \to\ AB\ \Rightarrow F\ \to\ M\ \Rightarrow\ PQ$ – диаметр окружности $PDEQT \to\ AB$ – диаметр окружности, описанной около $\triangle ABC\ \Rightarrow$ окружность $PDEQT \to$ окружность, описанную около $\triangle ABC$. Пусть точка $T$ при гомотетии $H_I^k$ переходит в $U''$. Значит, раз прямая $IE$ переходит сама в себя, то $U'' \in IE$ , а также $U'' \in$ окружности, описанной около $\triangle ABC$, так как $T \in$ окружности $PDEQ$, которая переходит в окружность, описанную около $\triangle ABC \Rightarrow U'' = U'$. Теперь мы знаем, что при $H_I^k : TF\ \to\ U'M \Rightarrow TF \parallel U'M \Rightarrow CD \parallel U'M$. **QED**

## Доказательство леммы 4

Из леммы 1.3 $\Rightarrow G$ лежит на описанной окружности треугольника $\triangle PCQ$. Тогда $PQCU'$ – вписанный $\Leftrightarrow GJCU'$ – вписанный $\Leftrightarrow \angle CU'I = \angle IGJ$. Пусть $R$ – это точка, в которую перешла $C$ при гомотетии $H_I^k$(гомотетия из леммы 3). Тогда при $H_I^k\ \triangle PCQ\ \to\ \triangle ARB \Rightarrow$ отрезок $CF\ \to$ отрезок $RM$, как медианы в соответсвенных треугольниках. Также описанная окружность $\triangle PCQ$ перешла в описанную окружность $\triangle ARB$, но $\angle PCQ = 45° \Rightarrow \angle ARB = 45°$.
(1) $\angle ARB = 45°$, а $ARBY$ – вписанный $\Rightarrow \angle AYB = 135°$.
(2) $\angle AIB = 90° + \dfrac{\angle ACB}{2} = 135°$

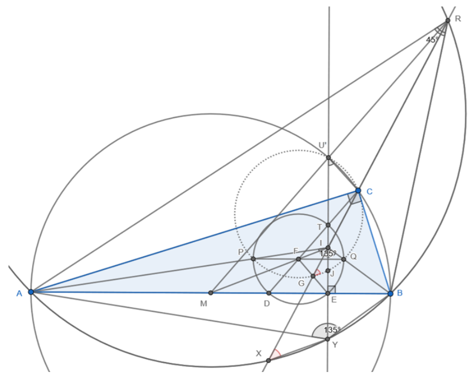


Рис. 7: К лемме 4 (1): Хотим доказать равенство углов $\angle CU'I = \angle IGJ$.

Из (1), (2) $\Rightarrow$ окружности $AIB$ и $AYB$ симметричны относительно $AB$.
(3) $IE \perp AB$
(1), (2), (3) $\Rightarrow$ $IE = EY$ Тогда, так как при $H_I^k$ окружность $PCQ \rightarrow$ окружность $ARB$, то $G \rightarrow X$, $J \rightarrow Y \Rightarrow \triangle GIJ \rightarrow \triangle XIY \Rightarrow \triangle GIJ \sim \triangle XIY \Rightarrow \angle IGJ = \angle IXY$.
**Значит, $\angle CU'I = \angle IGJ$. Это равносильно тому, что $\angle CU'I = \angle IXY$. Это равносильно тому, что $XYCU'$ – вписанный. Докажем, что $XYCU'$ – вписанный.**

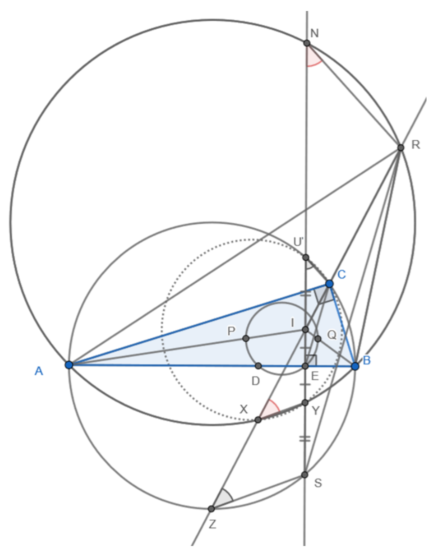



Рис. 8: К лемме 4 (2)

Так как при гомотетии $H_I^k$ окружность $PDEQ \to$ окружность $ABC$, а $IE \to IE$, то $E \to S \Rightarrow$ отрезок $EC \to$ отрезок $RS \Rightarrow EC \parallel RS$.
(I) Из доказанного выше в лемме 4 $IE = EY$
(II)Так как $AB$ – диаметр окружности $ABC$ и $IE \perp AB$, то $EU' = ES$
Из (I) и (II) следует, что $U'I = YS$.
Обозначим $EY = x, YS = y$.
$XYCU'$ – вписанный $\Leftrightarrow IY \cdot IU' = IX \cdot IC \Leftrightarrow 2xy = IX \cdot IC$.
(1) $IX \cdot IR = IN \cdot IY = 2x \cdot (y + U'N)$ (степень точки $I$ относительно окружности $ARB$)
(2) $EC \| RS \Rightarrow \dfrac{IC}{IR} = \dfrac{IE}{IS} \Leftrightarrow \dfrac{IC}{IR} = \frac{x}{2x+y} \Leftrightarrow IR = \dfrac{IC \cdot (2x+y)}{x}$.
(3) $EN \cdot EY = AE \cdot EB$ (степень точки $E$ относительно окружности $ARB$), $EU' \cdot ES = AE \cdot EB$ (степень точки $E$ относительно окружности $ACB$) $\Rightarrow EN \cdot EY = EU' \cdot ES \Leftrightarrow (x + y + U'N) \cdot x = (x+y)^2 \Leftrightarrow x^2 + xy + x \cdot U'N = x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow U'N = \dfrac{y \cdot (x+y)}{x}$
Из (1), (2) $\Rightarrow IX \cdot \dfrac{IC \cdot (2x+y)}{x} = 2x \cdot (y + U'N)$, Из (3) $\Rightarrow IX \cdot \dfrac{IC \cdot (2x+y)}{x} = 2x \cdot (y + \dfrac{y \cdot (x+y)}{x}) \Leftrightarrow IX \cdot IC = \dfrac{2x^2y + 2xy \cdot (x+y)}{2x+y} = 2xy \Leftrightarrow PQCU'$ – вписанный. $\Rightarrow U' = U$. **QED**

## Доказательство леммы 5

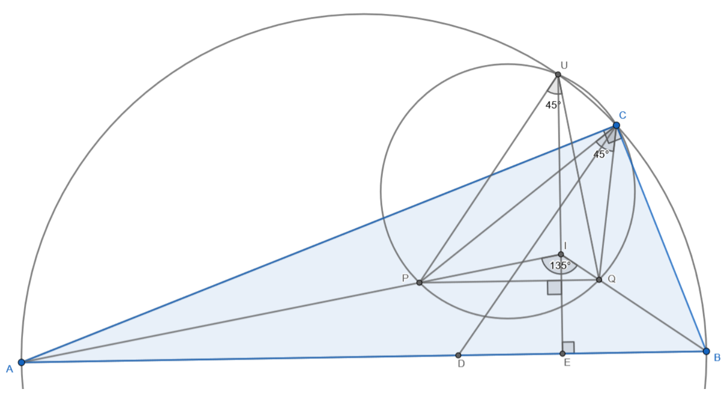



Рис. 9: К лемме 5 (1)

1) По лемме 2 $IE \perp PQ$
2) По лемме 4 $\angle PIQ = 135°$
3.1) По лемме 1.2 $\angle PCQ = 45°$
3.2) По лемме 4 $PQCU$ – вписанный.
3) Из 3.1) и 3.2) $\Rightarrow \angle PCQ = 45° = \angle PUQ$
Из 2) и 3) $\Rightarrow \angle PIQ + \angle PUQ = 180°$.
Также из совокупности предыдущего факта с 1) следует, что $I$ – ортоцентр $\triangle PUQ$.

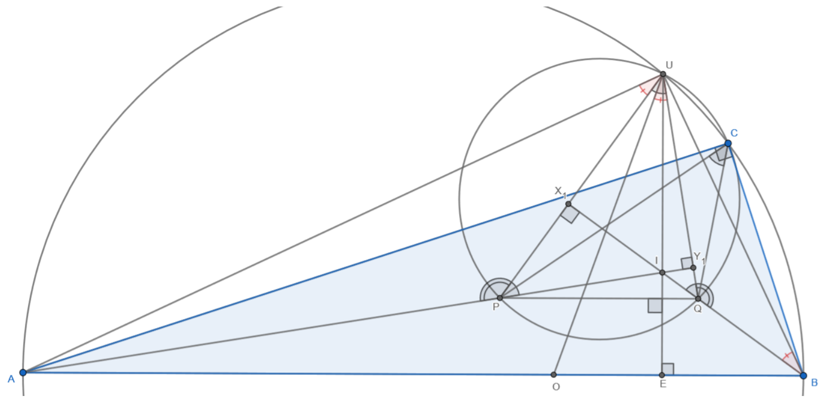



Рис. 10: К лемме 5 (2): две серые дужки - 135°, одна серая дужка - 45°

Обозначим $X_1 = BQ \cap PU$, $Y_1 = BQ \cap PU$.
$I$ – ортоцентр $\triangle PUQ \Rightarrow BQ \perp PU \ \Rightarrow \angle UX_1Q = 90°$, из 3) видно $\angle X_1UQ = 45° \Rightarrow \angle X_1QU = 45° \Rightarrow \angle UQB = 135°$, аналогично $\angle APU = 135°$.
Проведем биссектрису $UO$ в треугольнике $\triangle ABU$. Мы знаем, что $AB$ - диаметр, описанной окружности $\triangle ABC \Rightarrow \angle AUO = \angle OUB = \dfrac{\angle AUB}{2} = 45°$ . $\angle UQB = 135°$ как смежный с $\angle UQX$ $(\star)$, а из суммы углов треугольника $\triangle QBU$: $\angle QBU + \angle QUB = 45°$, $OUB = 45° \ \Rightarrow \angle QBU = \angle OUQ$.
(*)***Заметим, что из равенства углов $\angle QBU = \angle OUQ$ следует касание описанной окружности $\triangle QUB$ и прямой $UO$ (по теореме про угол между касательной и хордой). Аналогично описанная окружность $\triangle PUA$ касается $UO$. Значит окружности, описанные около треугольнкиов $\triangle QUB$ и $\triangle PUA$ касаются в точке $U$.***
$\angle PUQ = \angle AUO = 45° \Rightarrow \ \angle AUP = \angle OUQ = \angle QBU$ $(\star\star)$
Из $(\star)$ и $(\star\star)$ видно, что $\triangle APU \sim \triangle UQB$. **QED**

## Теперь мы готовы доказать теорему полностью

Будем доказывать, что $BQUL$ – вписанный. Для четырёхугольника $AKPU$ рассуждения аналогичны.

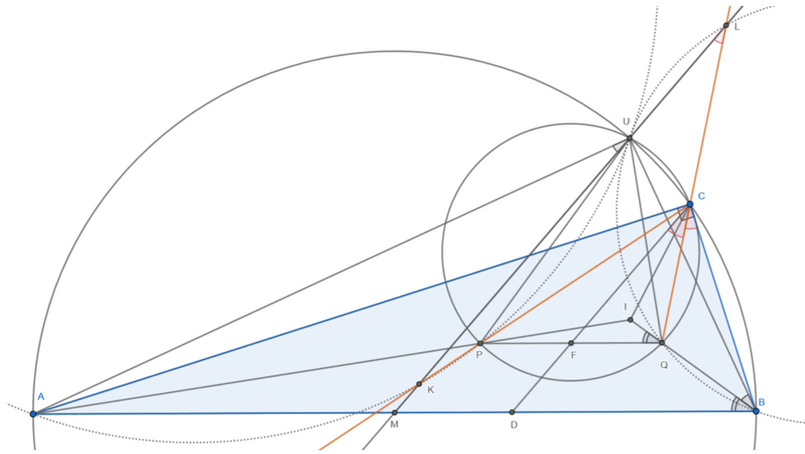



Рис. 11: Хотим доказать равенство углов $\angle ULQ = \angle UBQ$

$BQUL$ – вписанный $\Leftrightarrow \angle ULQ = \angle UBQ$. Введём $\angle ABC = 2\beta, \angle DCB = 2\gamma$.
Из леммы 3 следует, что $MU \parallel CD \Rightarrow \angle ULQ = \angle DCQ = \angle QCB = \gamma$, так как $CQ$ – биссектриса $\angle DCB$.
По лемме 5 $\triangle APU \sim \triangle UQB \Rightarrow\ \angle UBQ = \angle AUP = \angle AUC - \angle PUC$. (1)
По лемме 2 $AB \parallel PQ \Rightarrow \angle ABI = \angle PQI = \beta, \angle IQC = \angle QCB + \angle QBC = \gamma + \beta \Rightarrow \angle PQC = \gamma + 2\beta$. Тогда учитывая, что $PQCU$ – вписанный получаем, что $\angle PUC = 180^\circ - \angle PQC = 180^\circ - \gamma - 2\beta$. (2)
По лемме 3 $AUCB$ – вписанный $\Rightarrow \angle AUC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 2\beta$. (3)
Из (1), (2), (3) следует, что $\angle UBQ = 180^\circ - 2\beta - (180^\circ - \gamma - 2\beta) = \gamma = \angle ULQ \Rightarrow BQUL$– вписанный. Тогда из замечания (*) в лемме 5 следует, что окружности $APKU$ и $BQUL$ касаются в точке $U$. **QED**

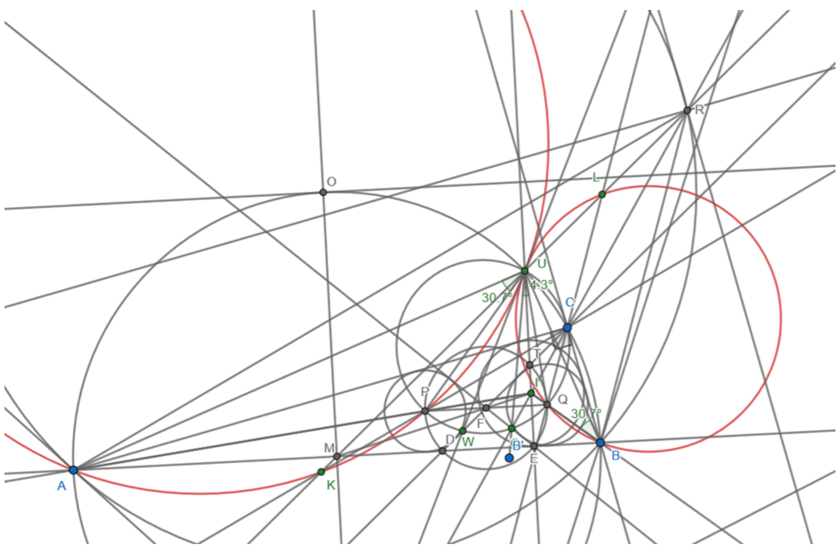



Рис. 12: Всё вместе: красота

Автор выражает благодарность А.Б. Скопенкову и А.А. Заславскому за внимание к работе и ценные указания.

## Список литературы

[1] А. Блинков, Ю. Блинков Две окружности в треугольнике, три окружности в треугольнике // КВАНТ 2012 №2