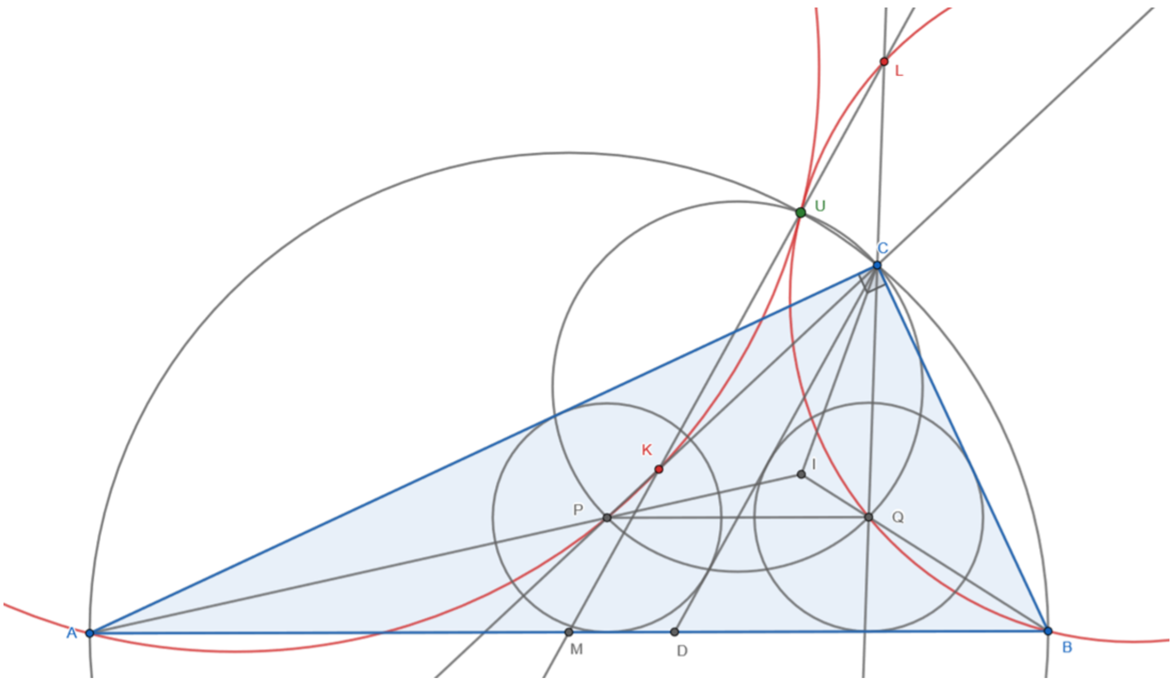
Две равные вписанные окружности в прямоугольном треугольнике

Комаров Сергей Сергеевич

ВШЭ

Теорема:

Точка D выбрана на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC так, что окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, имеют равные радиусы. Назовём центры этих окружностей P и Q соответственно, а середину AB обозначим через M. Определим точки K и L как пересечения прямой, проходящей через M параллельно CD, с прямыми PC и QC соответственно. Обозначим точку пересечения, отличную от C, описанных окружностей треугольников ABC и PCQ через U. Тогда описанные окружности треугольников AKP и BQL касаются в точке U.



Обозначения основных точек:

I - центр вписанной окржности тругольника ABC.
E – точка касания вписанной окружности треугольника ABC с прямой AB.
F – середина PQ.
G – точка пересечения прямой CI и прямой, симметричной прямой CD относительно PQ.
T – точка пересечения прямой IE и прямой CD.
$U^{'}$ – точка пересечения прямой IE и описанной окружности треугольника ABC.
R – точка, в которую перешла C при гомотетии $H_I^{\frac{IP}{IA}}$.
Окружность, проходящая через точки $A_1, A_2 \ldots, A_n$ обозначим $(A_1 A_2 \ldots A_n)$.
$J := IE \cap (PQC)$.
$X := CI \cap (ARB)$.
$Y := IE \cap (ARB)$.
$S := IE \cap (ABC)$.
$Z := CI \cap (ABC)$.
$N := IE \cap (ARB)$.
$W := CD \cap (PQC)$.

Лемма 1.1. Прямая CD проходит через середину отрезка PQ.
Лемма 1.2. Прямая CD симметрична CI относительно биссектрисы $\angle PCQ$, то есть $\angle ICQ = \angle PCF$.
Лемма 1.3. Прямая, симметричная прямой CD относительно PQ, персекает прямую CI на описанной окружности треугольника PCQ.
Лемма 2. Точка F равноудалена от точек P, D, E, Q. [1]
Лемма 3. Прямая, проходящая через M параллельно CD, прямая IE и описанная окружность треугольника ABC пересекаются в точке U', а также окружность $PDEQ$ переходит в окружность ABC при H_I^k.
Лемма 4. Четырёхугольник $PQCU'$ – вписанный, то есть $U' = U$.
Лемма 5. Точка I – ортоцентр треугольника PUQ, $\triangle APU \sim \triangle UQB$ и окружности, описанные около треугольнкиов QUB и PUA касаются в точке U.

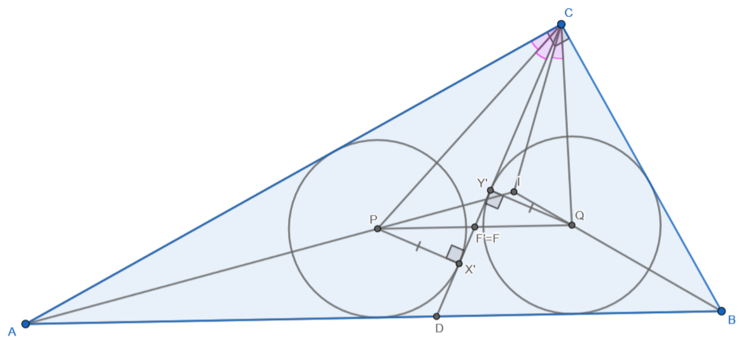


Рис. 1: К леммам 1.1 и 1.2

Доказательство леммы 1.1.
Определим X' и Y' как точки касания вписанных окружностей с CD.
Определим $F' = CD \cap PQ$.

$$\begin{cases} \text{PX'} = \text{QY'}, \text{ как радиусы} \\ \angle\text{PX'F'} = \angle\text{F'Y'Q} = 90^\circ \\ \angle\text{PF'X'} = \angle\text{Y'F'Q}, \text{ как вертикальные.} \end{cases} \Rightarrow \quad \triangle PX'F' = \triangle QY'F'. \quad \text{Тогда } F' \text{ – середина отрезка } PQ. \ \textbf{QED}$$

Доказательство леммы 1.2.
Так как CI, CP и CQ биссектрисы углов $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ACD$ и $\angle DCB$ соответственно, то $\angle PCQ = \dfrac{\angle ACB}{2} = 45^\circ = \angle ACI$. Тогда $\angle ACP = \angle ICQ$. Вспомним, что CP - биссектриса угла $\angle ACD$. Получим, что $\angle ACP = \angle PCF$. Из выше сказанного следует, что $\angle ICQ = \angle PCF$. **QED**

Доказательство леммы 1.3.

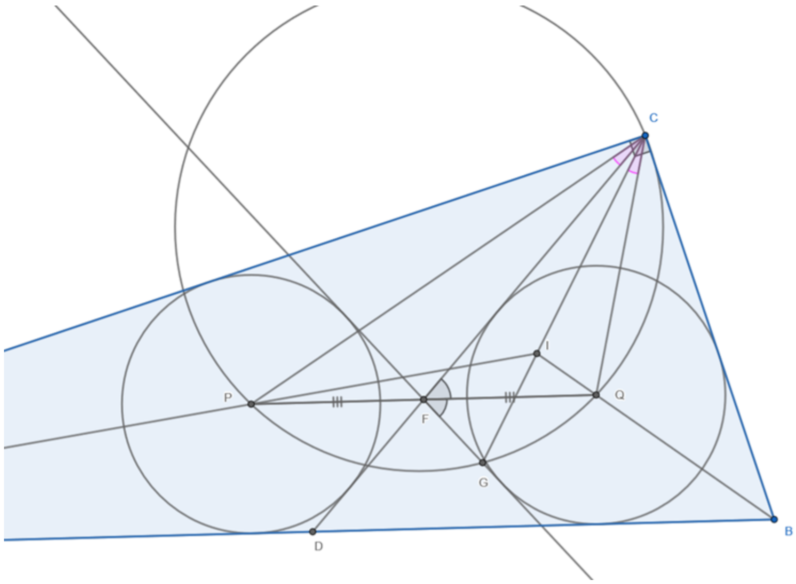


Рис. 2: К лемме 1.3

Из лемм 1.1 и 1.2 следует, что прямая CI – симедиана в треугольнике PCQ, а прямая CF – его медиана. Отразим прямую CD относительно линии центров PQ двух вписанных окружностей. Получится вторая общая внутренняя касательная этих окружностей. Обозначим точку пересечения полученной общей касательной с прямой CI через G. Тогда, применив факт №1 для треугольника PCQ, получим, что G лежит на описанной окружности треугольника PCQ. **QED**

Факт №1. *Если отразить медиану относительно стороны, к которой она проведена, то она пересечет симедиану, проведённую к той же стороне, в точке на описанной окружности этого треугольника.*
Доказательство факта №1

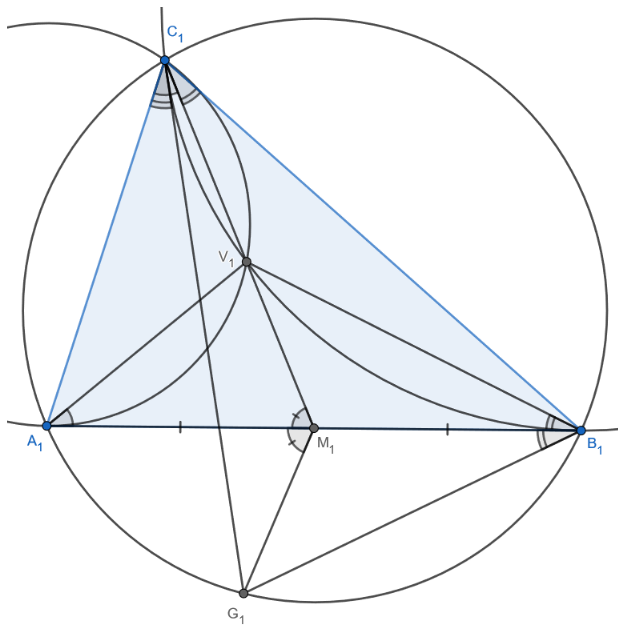


Рис. 3: К факту 1

Возьмём произвольный треугольник $A_1B_1C_1$.
Определим точку Шалтая V_1 как пересечение двух окружностей, проходящих через вершину C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ и касающихся прямой A_1B_1 в точках A_1 и B_1 соответственно.
Определим M_1 как точкау пересечения прямых C_1V_1 и A_1B_1.
Так как прямая V_1C_1 - это радикальная ось окружностей $A_1V_1C_1$ и $B_1C_1V_1$, то $A_1M_1^2 = M_1V_1 \cdot M_1C_1 = M_1B_1^2$. Значит, $A_1M_1 = M_1B_1$. Поэтому прямая C_1M_1 – медиана в треугольнике $A_1B_1C_1$.
Имеем $\angle A_1C_1V_1 = \angle V_1A_1B_1$ (по теореме про угол между касательной A_1B_1 и хордой A_1V_1), аналогично $\angle V_1C_1B_1 = \angle V_1B_1A_1$. Из предыдущих двух равенств углов получим, что $\angle V_1B_1A_1 + \angle V_1A_1B_1 = \angle A_1C_1B_1$. Тогда $\angle A_1C_1B_1 + \angle A_1V_1B_1 = 180°$.
Отразим точку V_1 относительно A_1B_1 и получим точку G_1. Тогда $\triangle A_1V_1B_1 = \triangle A_1G_1B_1$. Значит, $\angle A_1V_1B_1 = \angle A_1G_1B_1$. Поэтому $\angle A_1C_1B_1 + \angle A_1G_1B_1 = 180°$. Значит, $A_1C_1B_1G_1$ – вписанный. Отсюда получаем, что $\angle A_1C_1G_1 = \angle A_1B_1G_1$.
Так как $\triangle A_1V_1B_1 = \triangle A_1G_1B_1$, то $\angle A_1B_1G_1 = \angle A_1B_1V_1$. Значит, $\angle A_1C_1G_1 = \angle A_1B_1V_1 = \angle V_1C_1B_1$. Получается, что медианеа A_1V_1 симметрична прямой C_1G_1 относительно биссектрисы $\angle A_1B_1C_1$, то есть C_1G_1 - симедиана. Тогда симедиана и медиана, отраженная относительно A_1B_1, пересекаются на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. **QED**

Доказательство леммы 3

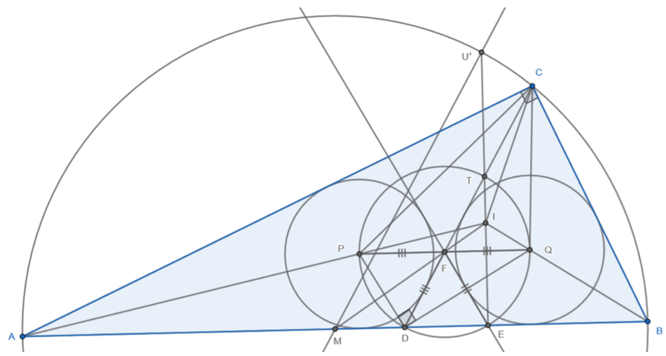


Рис. 4: К лемме 3

Продлим IE до пересечения с CD в точке T. Так как $IE \perp AB$ и $PQ \parallel AB$, то $IE \perp PQ$. Тогда при симетрии относительно $PQ : IE$ переходит в себя и CD переходит во вторую общую касательную FE. Так как PQ – диаметр окружности $PDEQ$, то окружность $PDEQ$ переходит сама в себя при симметрии относительно PQ. Откуда получим, что при обратной симметрии прямые CD и IE пересекаются на окружности $PDEQ$. Значит, прямые IE и CD пересекаются на окружности $PDEQ$ в точке T.

Сделаем гомотетию с центром в I такую, что P переходит в A. Обозначим через k коэффициент этой гомотетии, то есть отношение $\frac{IP}{IA}$. Так как $PQ \parallel AB$, то $\frac{IP}{IA} = \frac{IQ}{IB}$. Поэтому Q переходит в B. Тогда отрезок PQ переходит в отрезок AB, F переходит в M и диаметр окружности $PDEQT$ переходит в диаметр окружности, описанной около треугольника ABC. Значит, окружность $PDEQT$ переходит в окружность, описанную около треугольника ABC. Пусть точка T переходит в U''. Тогда, так как прямая IE переходит сама в себя, то $U'' \in IE$. Также $U'' \in$ окружности, описанной около треугольника ABC, так как $T \in$ окружности $PDEQ$, которая переходит в окружность, описанную около треугольника ABC. Следовательно $U'' = U'$. Теперь мы знаем, что TF переходит в $U'M$. Значит, $TF \parallel U'M$. Это равносильно тому, что $CD \parallel U'M$. **QED**

Доказательство леммы 4

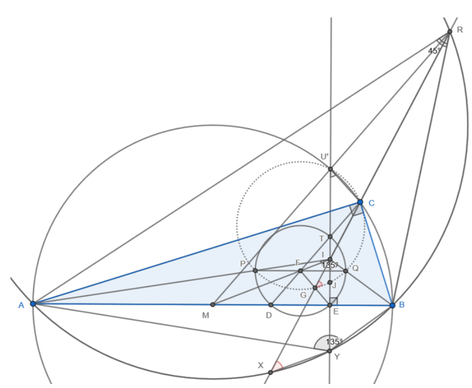


Рис. 5: К лемме 4 (1): Хотим доказать равенство углов $\angle CU'I = \angle IGJ$.

Из леммы 1.3 следует, что G лежит на описанной окружности треугольника PCQ. Тогда вписанность четырёхугольника $PQCU'$ равносильна вписанности четырёхугольника $GJCU'$, которая равносильна равенству $\angle CU'I = \angle IGJ$. Сделаем гомотетию с центром в I такую, что P переходит в A. Обозначим через k коэффициент этой гомотетии, то есть отношение $\frac{IP}{IA}$. Обозначим через R точку, в которую перешла C при гомотетии H_I^k. Тогда при H_I^k треугольник PCQ переходит в треугольник ARB. Следовательно отрезок CF переходит в отрезок RM, как медиана в соответсвенном треугольнике. Также описанная окружность треугольника PCQ переходит в описанную окружность треугольника ARB. Теперь можно сказать, что $\angle PCQ = \angle ARB$. Значит, $45° = \angle PCQ = \angle ARB$.
Мы знаем, что $\angle ARB = 45°$ и $ARBY$ – вписанный. Поэтому, $\angle AYB = 135°$.
Также $\angle AIB = 90° + \dfrac{\angle ACB}{2} = 135°$.
Из выше сказанного следует, что окружности AIB и AYB симметричны относительно AB. Поэтому $IE \perp AB$.
Из трех выше стоящих абзацев вытекает, что $IE = EY$.
При H_I^k окружность PCQ переходит в окружность ARB. Значит, G переходит в X и J переходит в Y. Тогда треугольник GIJ переходит в треугольник XIY . Следовательно $\triangle GIJ \sim \triangle XIY$. Откуда получаем, что $\angle IGJ = \angle IXY$.
Значит, равенство $\angle CU'I = \angle IGJ$ равносильно равенству $\angle CU'I = \angle IXY$, которое равносильно вписанности четырёхугольника $XYCU'$.
Докажем, что $XYCU'$ – вписанный.

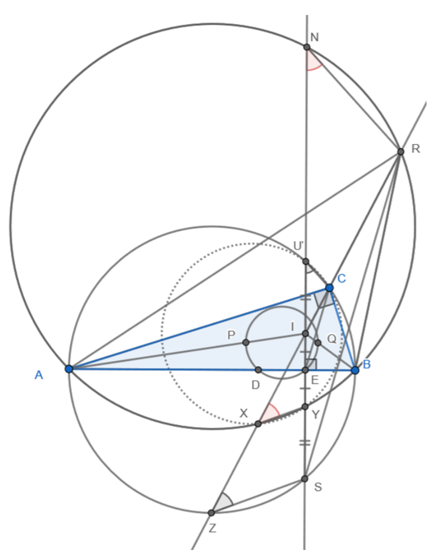


Рис. 6: К лемме 4 (2)

По лемме 3 при гомотетии H_I^k окружность $PDEQ$ переходит в окружность ABC и IE переходит сама в себя. Тогда E переходит в S. Следовательно отрезок EC переходит в отрезок RS. Откуда получаем, что $EC \parallel RS$.
(1) По доказанному выше $IE = EY$.
Так как AB – диаметр окружности, описанной около треугольника ABC, и $IE \perp AB$, то (2)$EU' = ES$,
Из (1) и (2) следует, что $U'I = YS$.
Обозначим $x := EY$, $y := YS$.
Вписанность четырёхугольника $XYCU'$ равносильна равенству $IY \cdot IU' = IX \cdot IC$, которое равносильно равенству $2xy = IX \cdot IC$.
Степень точки I относительно окружности ARB равена $IX \cdot IR = IN \cdot IY = 2x \cdot (y + U'N)$.
Имеем $EC \| RS$. Поэтому

$$\frac{IC}{IR} = \frac{IE}{IS} \;\Leftrightarrow\; \frac{IC}{IR} = \frac{x}{2x+y} \;\Leftrightarrow\; IR = \frac{IC \cdot (2x+y)}{x}.$$

Степень точки E относительно окружности ARB равна $EN \cdot EY = AE \cdot EB$. Степень точки E относительно окружности ACB равна $EU' \cdot ES = AE \cdot EB$. Из двух предыдущих равенств вытекает равенство $EN \cdot EY = EU' \cdot ES \Leftrightarrow (x+y+U'N) \cdot x = (x+y)^2 \Leftrightarrow x^2 + xy + x \cdot U'N = x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow U'N = \dfrac{y \cdot (x+y)}{x}$.
Из равенств $IX \cdot IR = 2x \cdot (y + U'N)$ и $IR = \dfrac{IC \cdot (2x+y)}{x}$ следует, что $IX \cdot \dfrac{IC \cdot (2x+y)}{x} = 2x \cdot (y + U'N)$.
Подставим выражение $U'N = \dfrac{y \cdot (x+y)}{x}$ и получим $IX \cdot \dfrac{IC \cdot (2x+y)}{x} = 2x \cdot (y + \dfrac{y \cdot (x+y)}{x}) \Leftrightarrow IX \cdot IC = \dfrac{2x^2 y + 2xy \cdot (x+y)}{2x+y} = 2xy$. Мы доказали, что $XYCU'$ - вписанный.
Значит, $PQCU'$ – вписанный, то есть $U' = U$. **QED**

Доказательство леммы 5

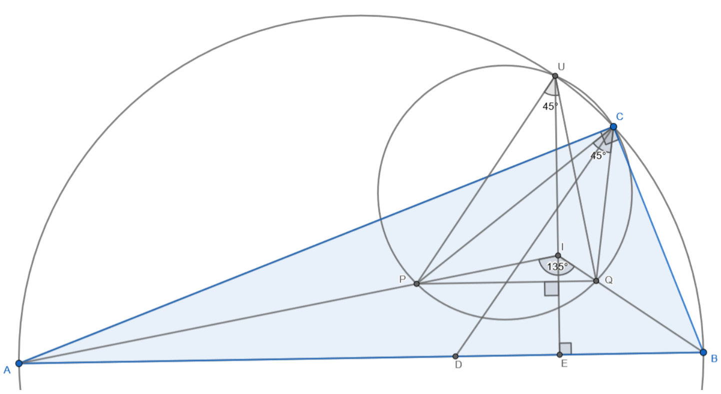


Рис. 7: К лемме 5 (1)

(1) По лемме 2 $IE \perp PQ$.
(2) По лемме 4 $\angle PIQ = 135°$.
(3.1) По лемме 1.2 $\angle PCQ = 45°$.
(3.2) По лемме 4 $PQCU$ – вписанный.
(3) Из (3.1) и (3.2) следует, что $\angle PCQ = 45° = \angle PUQ$.

Из (2) и (3) следует, что $\angle PIQ + \angle PUQ = 180°$.
Также из предыдущего факта и (1) следует, что I – ортоцентр треугольника PUQ.

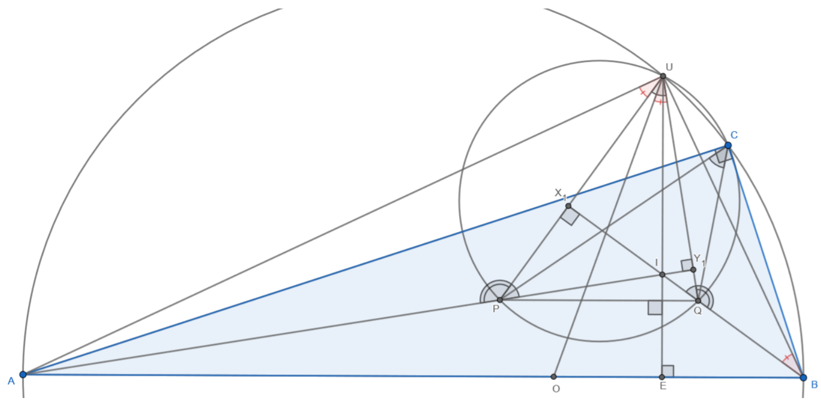


Рис. 8: К лемме 5 (2): две серые дужки - 135°, одна серая дужка - 45°

Обозначим $X_1 = BQ \cap PU$, $Y_1 = BQ \cap PU$.
Точка I – ортоцентр треугольника PUQ. Тогда $BQ \perp PU$. Следовательно $\angle UX_1Q = 90^\circ$. Из (3) видно, что $\angle X_1UQ = 45^\circ$. Значит, $\angle X_1QU = 45^\circ$. Поэтому $\angle UQB = 135^\circ$ как смежный с $\angle X_1QU$. Аналогично $\angle APU = 135^\circ$.
Проведем биссектрису UO в треугольнике ABU. Так как AB - диаметр окружности, описанной около треугольника ABC, то $\angle AUO = \angle OUB = \dfrac{\angle AUB}{2} = 45^\circ$. Из доказанного выше $\angle UQB = 135^\circ$. Тогда из теоремы о сумме углов треугольника QBU получаем, что $\angle QBU + \angle QUB = 45^\circ$. Также по доказанному выше $\angle OUQ + \angle QUB = \angle OUB = 45^\circ$. Значит, $\angle QBU = \angle OUQ$.
Из равенства углов $\angle QBU = \angle OUQ$ следует касание описанной окружности треугольника QUB и прямой UO (по теореме о уголе между касательной и хордой). Аналогично описанная окружность треугольника PUA касается прямой UO. Значит, окружности, описанные около треугольнкиов QUB и PUA касаются в точке U.
Имеем $\angle PUQ = \angle AUO = 45^\circ$. Следовательно $\angle AUP = \angle OUQ = \angle QBU$.
Из последнего равенства и того, что $\angle UQB = \angle APU = 135^\circ$, вытекает, что $\triangle APU \sim \triangle UQB$. **QED**

Доказательство теоремы

Во введённых обозначениях нужно доказать, что $APKU$ и $BQUL$ – вписанные четырёхугольники, описанные окружности которых касаются в точке U.
Докажем, что $BQUL$ – вписанный в следующих 5 абзацах.

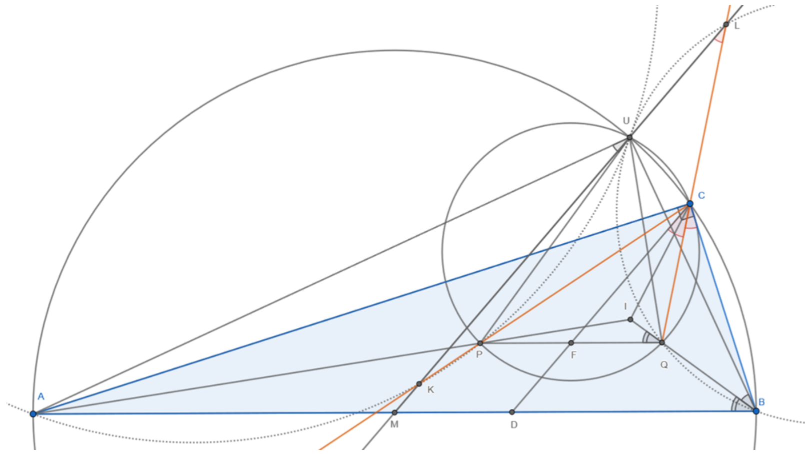


Рис. 9: Хотим доказать равенство углов $\angle ULQ = \angle UBQ$

Имеем $BQUL$ – вписанный, что равносильно равенству $\angle ULQ = \angle UBQ$. Введём $2\beta := \angle ABC, 2\gamma := \angle DCB$.
Из леммы 3 и того, что прямая CQ является биссектрисой $\angle DCB$, следует, что $MU \parallel CD$. Значит, $\angle ULQ = \angle DCQ = \angle QCB = \gamma$.
По лемме 5 $\triangle APU \sim \triangle UQB$. Тогда $\angle UBQ = \angle AUP = \angle AUC - \angle PUC$.
Имеем $AB \parallel PQ$. Поэтому $\angle ABI = \angle PQI = \beta$. Также $\angle IQC = \angle QCB + \angle QBC = \gamma + \beta$. Значит, $\angle PQC = \gamma + 2\beta$. Тогда, так как $PQCU$ – вписанный, то $\angle PUC = 180° - \angle PQC = 180° - \gamma - 2\beta$.
По лемме 4 $U' = U$, а $AU'CB$ – вписанный. Значит, $AUCB$ – вписанный. Следовательно $\angle AUC = 180° - \angle ABC = 180° - 2\beta$.

$$\angle UBQ = \angle AUC - \angle PUC = (180° - 2\beta) - (180° - \gamma - 2\beta) = \gamma = \angle ULQ.$$

Значит, $BQUL$ – вписанный. Аналогично $AKPU$ – вписанный. Тогда из вписанности $BQUL$, $AKPU$ и леммы 5 вытекает, что окружности $APKU$ и $BQUL$ касаются в точке U. **QED**

Автор выражает благодарность А.Б. Скопенкову и А.А. Заславскому за внимание к работе и ценные указания.

Список литературы

[1] А. Блинков, Ю. Блинков Две окружности в треугольнике, три окружности в треугольнике // КВАНТ 2012 №2