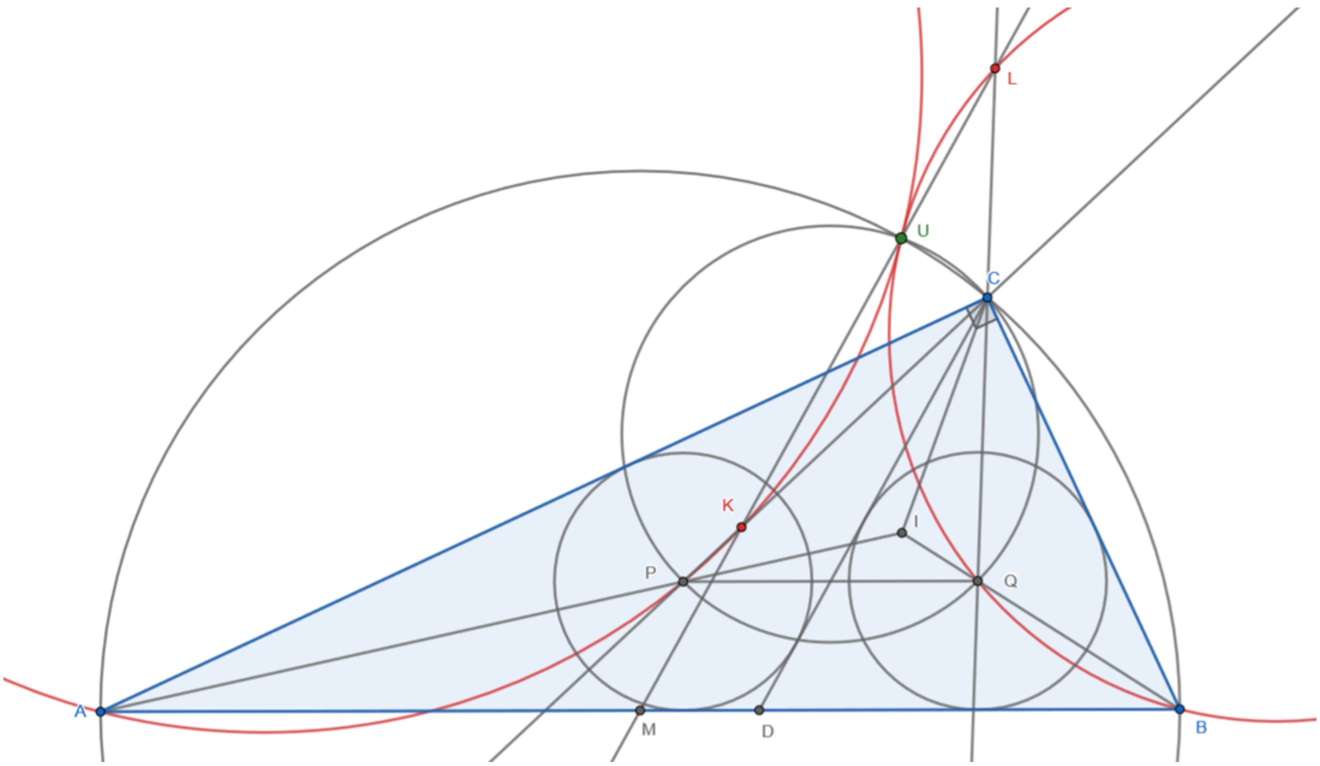
Две равные вписанные окружности в прямоугольном треугольнике

Комаров Сергей Сергеевич

ВШЭ

Теорема.

Точка D выбрана на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC так, что окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, имеют равные радиусы. Назовём центры этих окружностей P и Q соответственно, а середину AB обозначим через M. Определим точки K и L как пересечения прямой, проходящей через M параллельно CD, с прямыми PC и QC соответственно. Обозначим точку пересечения, отличную от C, описанных окружностей треугольников ABC и PCQ через U. Тогда описанные окружности треугольников AKP и BQL касаются в точке U.



Соглашение. В этой статье мы используем обозначения введённые в формулировке основной теоремы.

Обозначения.

I - центр вписанной окружности треугольника ABC.

E – точка касания вписанной окружности треугольника ABC с прямой AB.

F – середина PQ.

G – точка пересечения прямой CI и прямой, симметричной прямой CD относительно PQ.

$U^{'}$ – точка пересечения прямой IE и описанной окружности треугольника ABC.

R – точка, в которую перешла C при гомотетии $H_I^{\frac{IP}{IA}}$.

Окружность, проходящая через точки $A_1, A_2 \ldots, A_n$ обозначим $(A_1 A_2 \ldots A_n)$.

$J := IE \cap (PQC)$.

$X := CI \cap (ARB)$.

$Y := IE \cap (ARB)$.

$S := IE \cap (ABC)$.

$Z := CI \cap (ABC)$.

$N := IE \cap (ARB)$.

$W := CD \cap (PQC)$.

Лемма 1.1. Прямая CD проходит через середину отрезка PQ. (Эта лемма справедлива для равных окружностей и произвольного треугольника)
Лемма 1.2. Прямая CD симметрична CI относительно биссектрисы $\angle PCQ$, то есть $\angle ICQ = \angle PCF$. (Эта лемма справедлива для равных окружностей и произвольного треугольника)
Лемма 1.3. Прямая, симметричная прямой CD относительно PQ, персекает прямую CI на описанной окружности треугольника PCQ. (Эта лемма справедлива для равных окружностей и произвольного треугольника)
Лемма 2. Точка F равноудалена от точек P, D, E, Q.[1] (Эта лемма справедлива для любых окружностей и произвольного треугольника)
Лемма 3.1. Прямые IE и CD пересекаются на окружности $PDEQ$.
Лемма 3.2. Окружность $PDEQ$ переходит в окружность ABC при H_I^k.
Лемма 3.3. Прямая, проходящая через M параллельно CD, прямая IE и описанная окружность треугольника ABC пересекаются в точке U'.
Лемма 4.1. (а)$IE = EY$ (б)$U'I = YS$.
Лемма 4.2. $IY \cdot IU' = IX \cdot IC$.
Лемма 4.3. Четырёхугольник $PQCU'$ – вписанный, то есть $U' = U$.
Лемма 5.1. Точка I – ортоцентр треугольника PUQ.
Лемма 5.2. Окружности, описанные около треугольников QUB и PUA, касаются в точке U.
Лемма 5.3. $\triangle APU \sim \triangle UQB$.

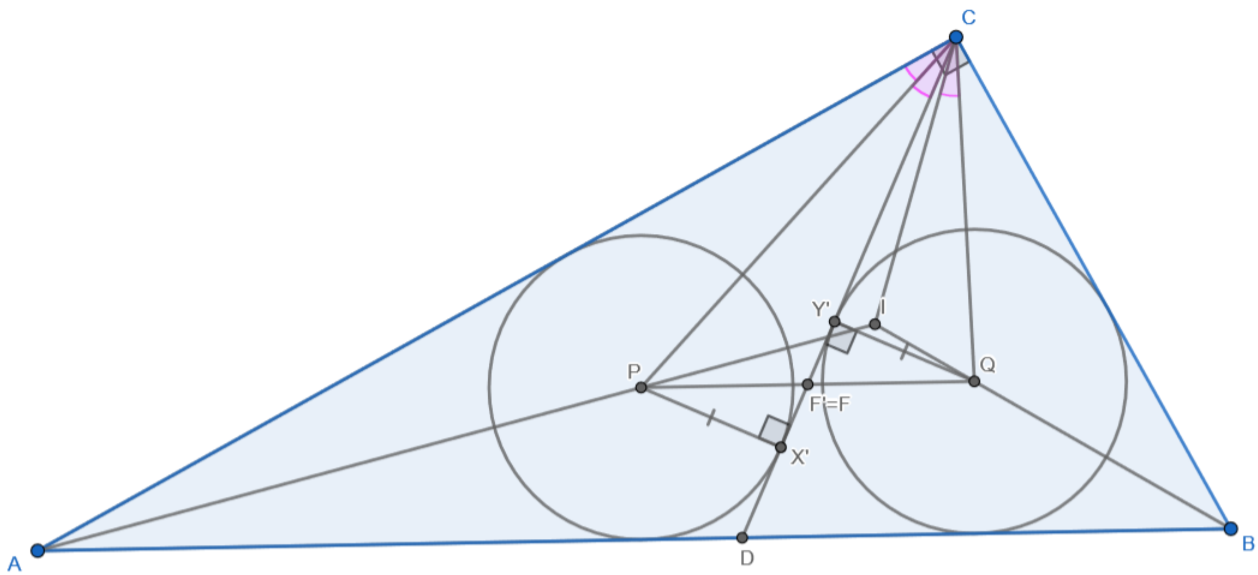


Рис. 1: К леммам 1.1 и 1.2

Доказательство леммы 1.1.
Определим X' и Y' как точки касания вписанных окружностей с CD.
Определим $F' = CD \cap PQ$.

$$\begin{cases} PX' = QY', \text{ как радиусы} \\ \angle PX'F' = \angle F'Y'Q = 90^\circ \\ \angle PF'X' = \angle Y'F'Q, \text{ как вертикальные.} \end{cases} \Rightarrow \triangle PX'F' = \triangle QY'F'.$$ Тогда F' – середина отрезка PQ. **QED**

Доказательство леммы 1.2.

Так как CI, CP и CQ биссектрисы углов $\angle ACB = 90°$, $\angle ACD$ и $\angle DCB$ соответственно, то $\angle PCQ = \dfrac{\angle ACB}{2} = 45° = \angle ACI$. Тогда $\angle ACP = \angle ICQ$. Вспомним, что CP - биссектриса угла $\angle ACD$. Получим, что $\angle ACP = \angle PCF$. Из выше сказанного следует, что $\angle ICQ = \angle PCF$. **QED**

Доказательство леммы 1.3.

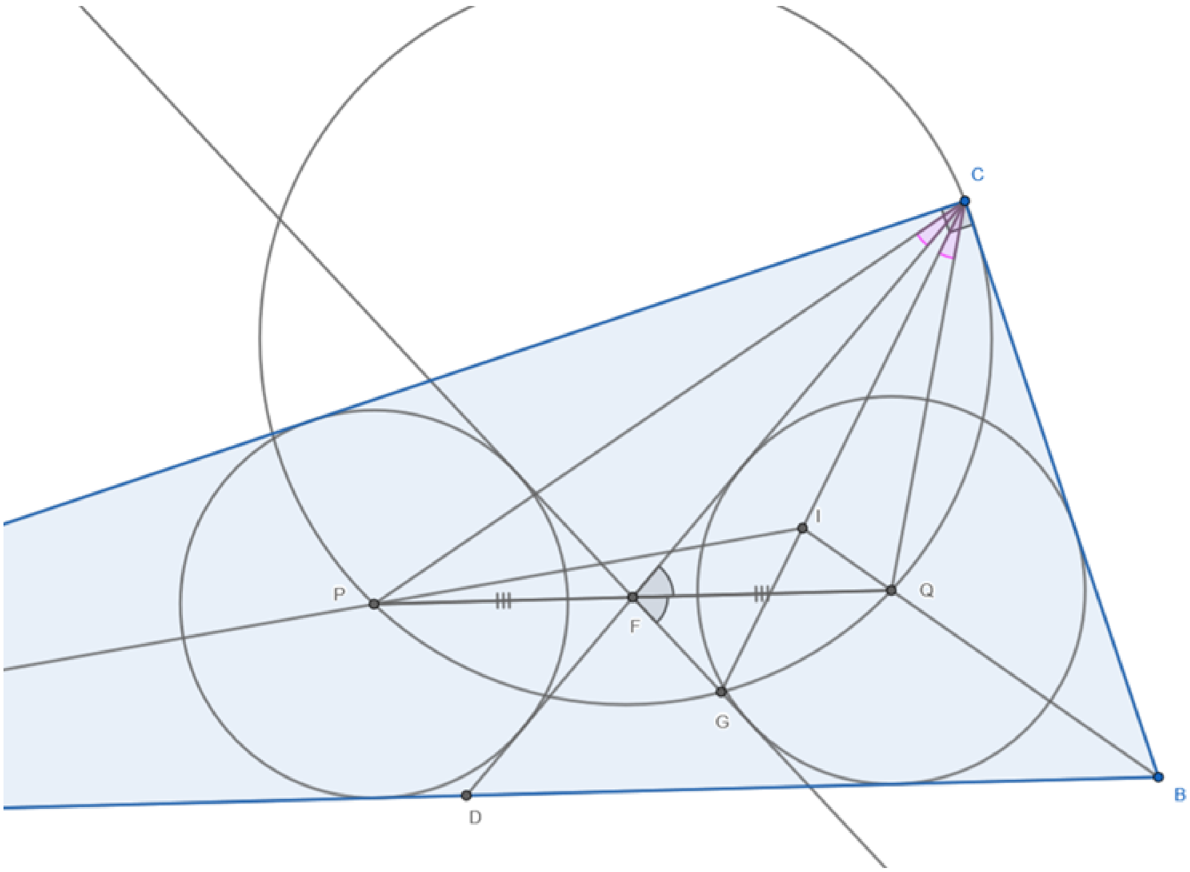


Рис. 2: К лемме 1.3

Из лемм 1.1 и 1.2 следует, что прямая CI – симедиана в треугольнике PCQ, а прямая CF – его медиана. Отразим прямую CD относительно линии центров PQ двух вписанных окружностей. Получится вторая общая внутренняя касательная этих окружностей. Обозначим точку пересечения полученной общей касательной с прямой CI через G. Тогда, применив факт 1 для треугольника PCQ, получим, что G лежит на описанной окружности треугольника PCQ. **QED**

Факт 1. *Если отразить медиану относительно стороны, к которой она проведена, то она пересечёт симедиану, проведённую к той же стороне, в точке на описанной окружности этого треугольника.* (Этот факт является фольклором)
Доказательство.

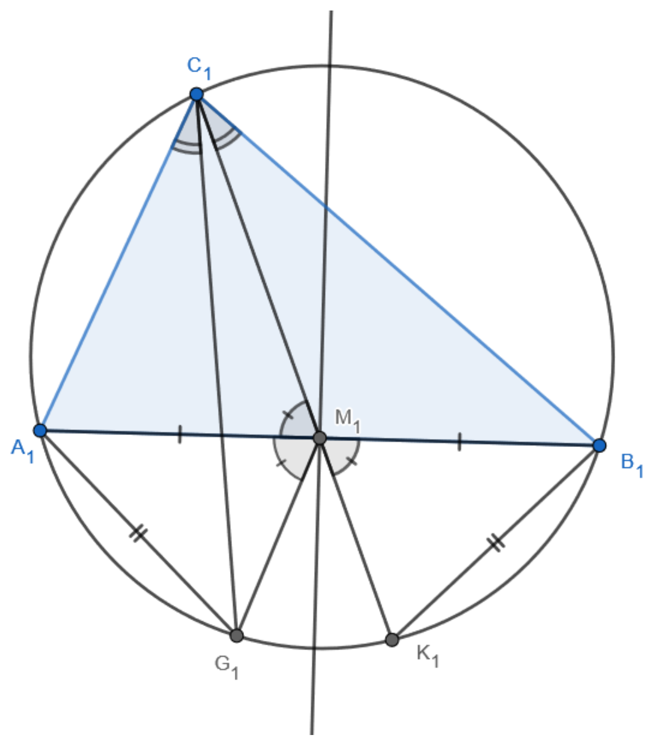


Рис. 3: К факту 1

Обозначим данный треугольник $A_1B_1C_1$.
Определим K_1 как точку пересечения, отличную от C_1, медианы C_1M_1 с описанной окружностью треугольника $A_1B_1C_1$. Отразим описанную окружность треугольника $A_1B_1C_1$ относительно серидинного перпендикуляра отрезка A_1B_1. Обозначим G_1 точку в которую перейдёт K_1 при сделанной симметрии. Тогда из равенства $\angle C_1M_1A_1 = \angle B_1M_1K_1 = \angle A_1M_1G_1$ очевидно следует, что прямые M_1G_1 и C_1M_1 симметричны относительно A_1B_1. Также при сделанной симметрии дуга B_1K_1 переходит в дугу A_1G_1. Значит, $\angle B_1C_1K_1 = \angle A_1C_1G_1$. Поэтому C_1G_1 симедиана угла $A_1C_1B_1$. Следовательно симедиана пересекает прямую, симметричную медиане относительно A_1B_1, на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. **QED**

Конструкция гомотетии для лемм 3.1, 3.2, 3.3, 4.1, 4.2, 4.3.
Сделаем гомотетию с центром в I такую, что P переходит в A. Обозначим через k коэффициент этой гомотетии, то есть отношение $\frac{IP}{IA}$. Будем обозначать эту гомотетию H_I^k.

Замечание: Данная конструкция применялась для решения задачи с Московской устной олимпиады по геометрии, 2006 года, которая звучала так: "Дан произвольный треугольник ABC. Постройте прямую, проходящую через вершину B и делящую его на два треугольника, радиусы вписанных окружностей которых равны."

Обозначим через T точку пересечения прямой IE и прямой CD.

Доказательство леммы 3.1.

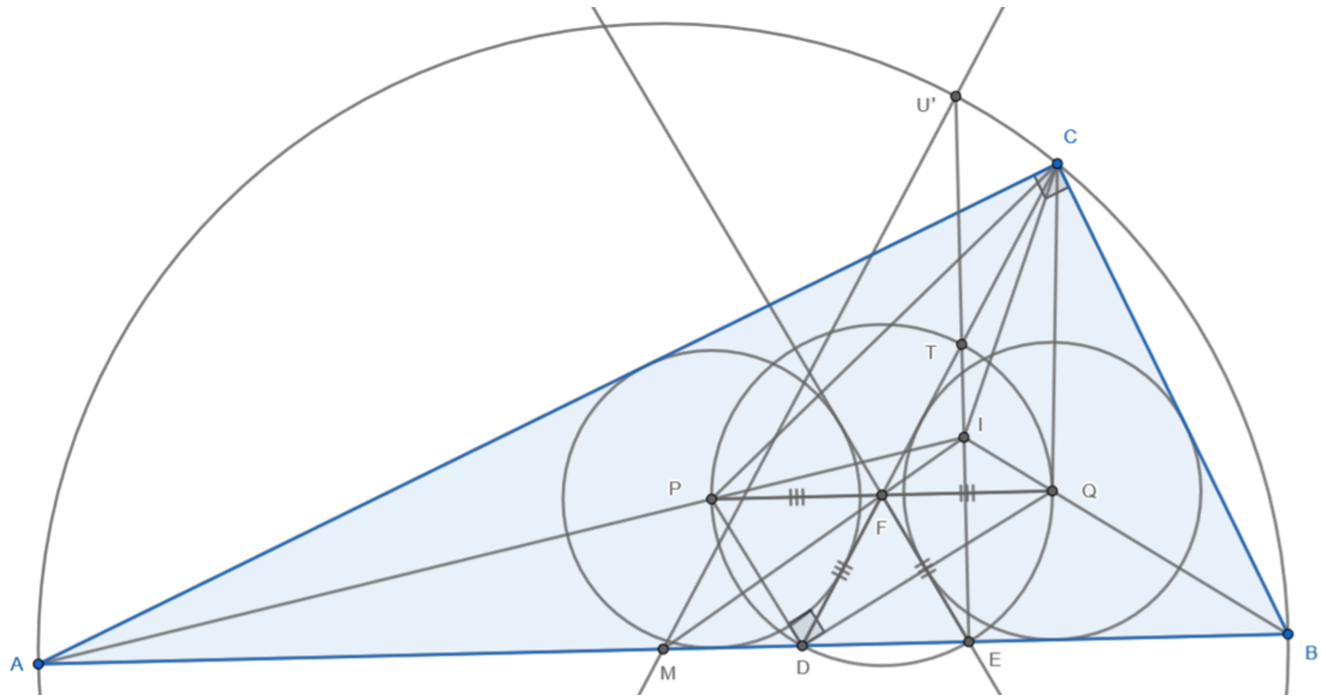


Рис. 4: К лемме 3.1

Продлим IE до пересечения с CD в точке T. Так как $IE \perp AB$ и $PQ \parallel AB$, то $IE \perp PQ$. Тогда при симметрии относительно $PQ : IE$ переходит в себя и CD переходит во вторую общую касательную FE. Так как PQ – диаметр окружности $PDEQ$, то окружность $PDEQ$ переходит сама в себя при симметрии относительно PQ. Откуда получаем, что при обратной симметрии прямые CD и IE пересекаются на окружности $PDEQ$. Значит, прямые IE и CD пересекаются на окружности $PDEQ$ в точке T. **QED**

Доказательство леммы 3.2.

Сделаем H_I^k. Так как $PQ \parallel AB$, то $\frac{IP}{IA} = \frac{IQ}{IB}$. Поэтому Q переходит в B. Тогда отрезок PQ переходит в отрезок AB, F переходит в M и диаметр окружности $PDEQT$ переходит в диаметр окружности, описанной около треугольника ABC. Значит, окружность $PDEQT$ переходит в окружность, описанную около треугольника ABC. **QED**

Доказательство леммы 3.3.

Пусть точка T переходит в U'' при H_I^k. Тогда, так как прямая IE переходит сама в себя, то $U'' \in IE$. Также $U'' \in$ окружности, описанной около треугольника ABC, так как $T \in$ окружности $PDEQ$, которая переходит в окружность, описанную около треугольника ABC. Следовательно $U'' = U'$. Теперь мы знаем, что TF переходит в $U'M$. Значит, $TF \parallel U'M$. Это равносильно тому, что $CD \parallel U'M$. **QED**

Доказательство леммы 4.1.

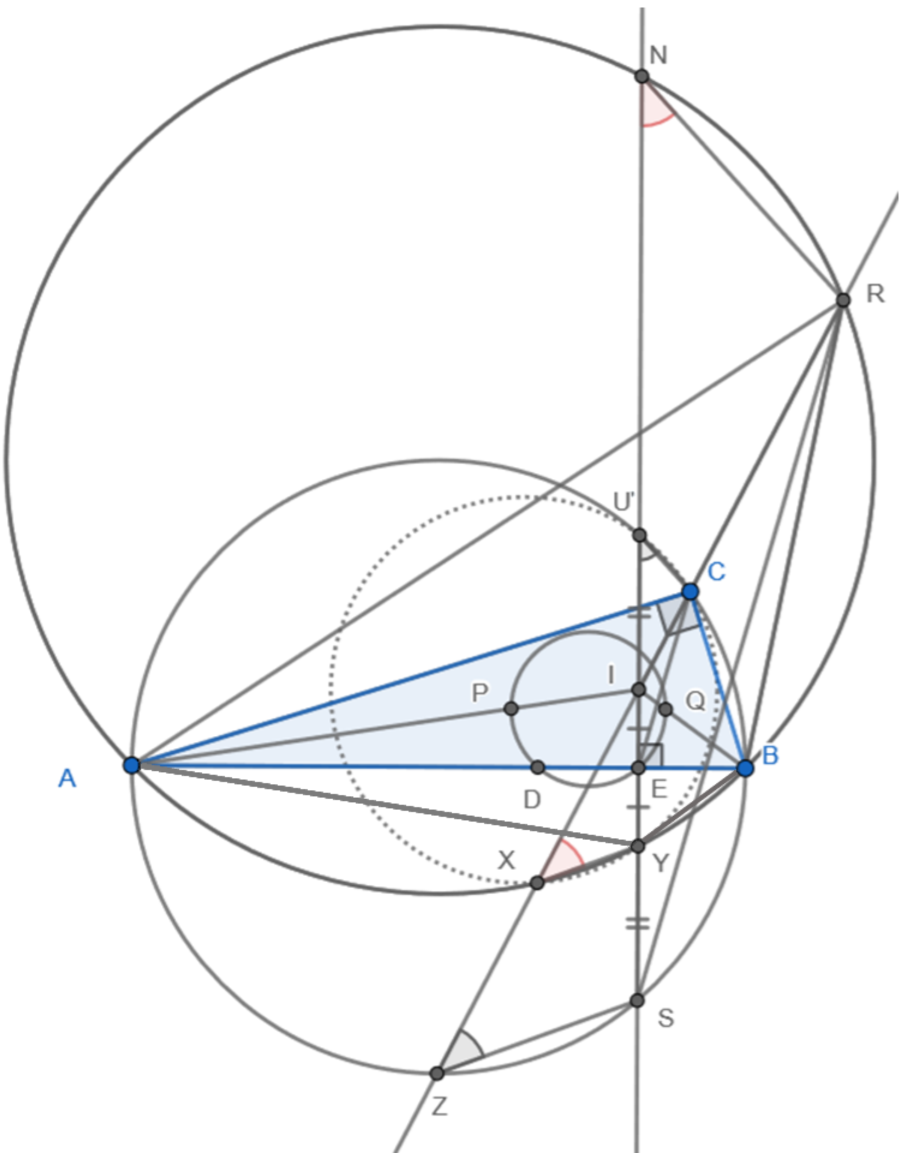


Рис. 5: К лемме 4.1

(a) Сделаем H_I^k. Тогда треугольник PCQ переходит в треугольник ARB. Также описанная окружность треугольника PCQ переходит в описанную окружность треугольника ARB. Теперь можно сказать, что $\angle PCQ = \angle ARB$. Значит, $45° = \angle PCQ = \angle ARB$.
Мы знаем, что $\angle ARB = 45°$ и $ARBY$ – вписанный. Поэтому, $\angle AYB = 135°$.
Также $\angle AIB = 90° + \dfrac{\angle ACB}{2} = 135°$.
Тогда окружности AIB и AYB симметричны относительно прямой AB и $IY \perp AB$. Значит, $IE = EY$.
QED

(б) Так как AB – диаметр окружности, описанной около треугольника ABC, и $IE \perp AB$, то $EU' = ES$.
QED

Доказательство леммы 4.2.

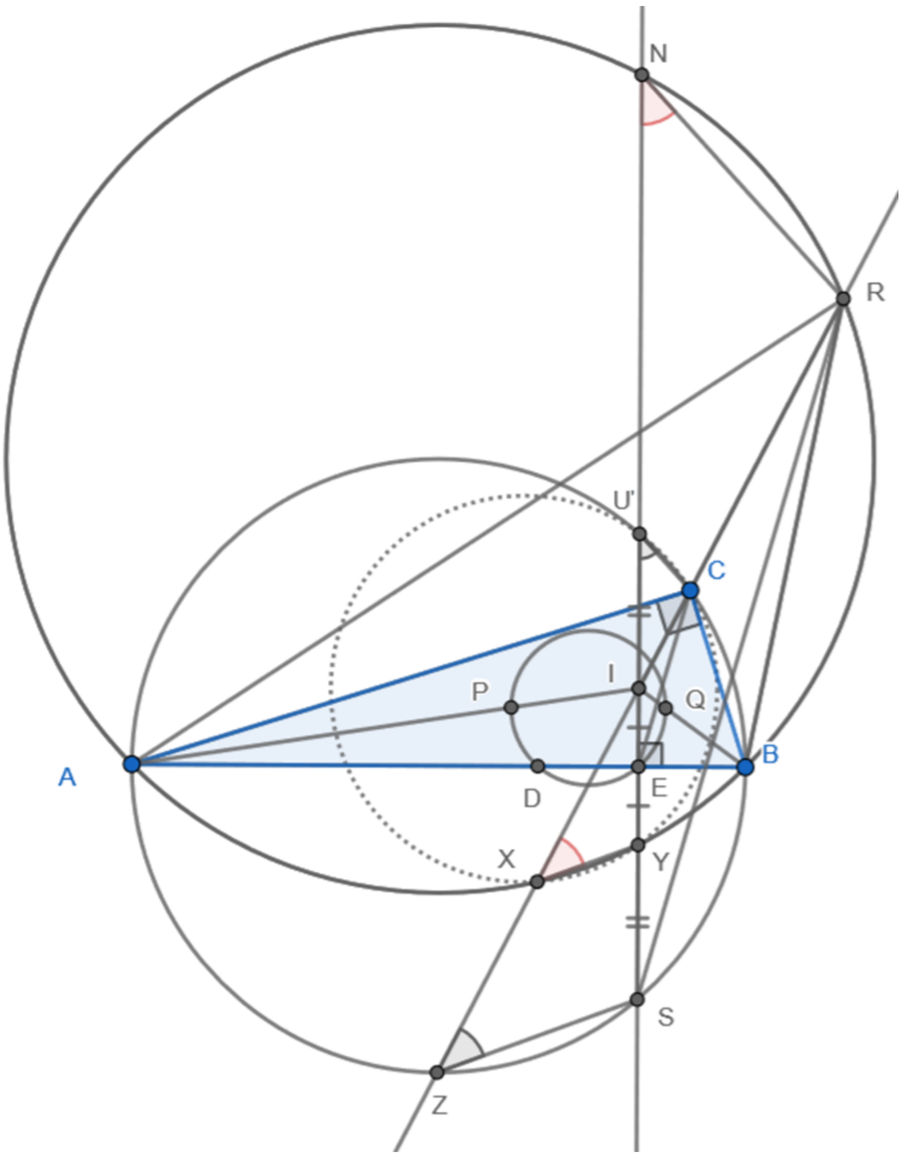


Рис. 6: К лемме 4.2

Обозначим $x := EY$, $y := YS$.
Из леммы 4.1 следует, что $IU' = YS$.
Тогда вместо равенства $IY \cdot IU' = IX \cdot IC$ будем доказывать, что $2xy = IX \cdot IC$.
Равенство 1. $IX \cdot IR = 2x \cdot (y + U'N)$.
Доказательство.
Степень точки I относительно окружности ARB равна $IX \cdot IR = IN \cdot IY = 2x \cdot (y + U'N)$. **QED**
Равенство 2. $IR = \dfrac{IC \cdot (2x+y)}{x}$.
Доказательство.
По лемме 3.2 при гомотетии H_I^k окружность $PDEQ$ переходит в окружность ABC, а IE переходит сама

в себя. Тогда E переходит в S. Следовательно отрезок EC переходит в отрезок RS. Откуда получаем, что $EC \parallel RS$. Поэтому

$$\frac{IC}{IR} = \frac{IE}{IS} \ \Leftrightarrow \ \frac{IC}{IR} = \frac{x}{2x+y} \ \Leftrightarrow \ IR = \frac{IC \cdot (2x+y)}{x}. \ \textbf{QED}$$

Равенство 3. $U'N = \dfrac{y \cdot (x+y)}{x}$.
Доказательство.
Степень точки E относительно окружности ARB равна $EN \cdot EY = AE \cdot EB$. Степень точки E относительно окружности ACB равна $EU' \cdot ES = AE \cdot EB$. Из двух предыдущих выражений вытекает равенство $EN \cdot EY = EU' \cdot ES \Leftrightarrow (x+y+U'N) \cdot x = (x+y)^2 \Leftrightarrow x^2+xy+x \cdot U'N = x^2+2xy+y^2 \Leftrightarrow U'N = \dfrac{y \cdot (x+y)}{x}$.
QED

Подставим равенства 2 и 3 в равенство 1 и получим $IX \cdot \dfrac{IC \cdot (2x+y)}{x} = 2x \cdot (y + \dfrac{y \cdot (x+y)}{x}) \Leftrightarrow IX \cdot IC = \dfrac{2x^2y + 2xy \cdot (x+y)}{2x+y} = 2xy$. **QED**

Доказательство леммы 4.3.

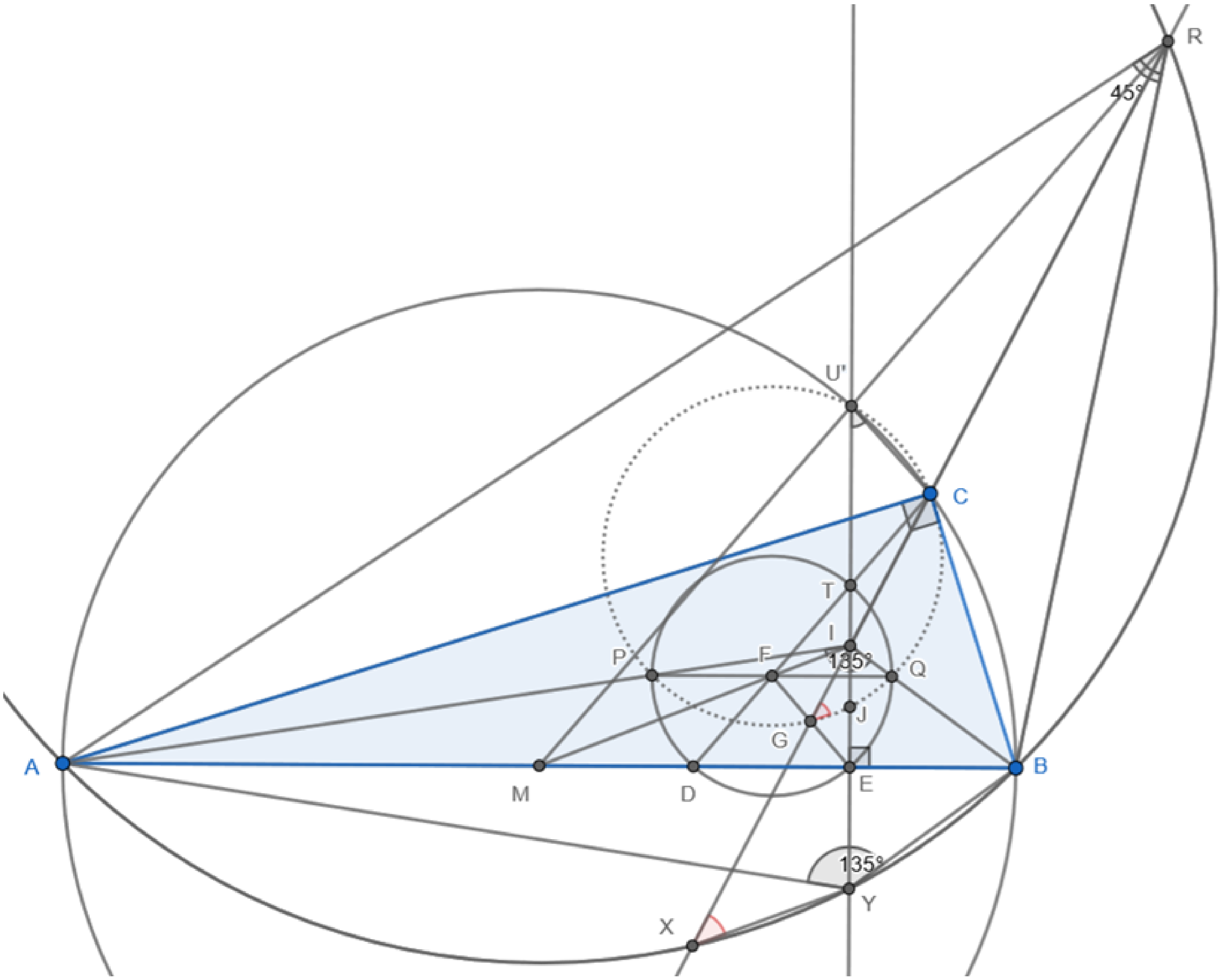


Рис. 7: К лемме 4.3

По лемме 4.2 $IY \cdot IU' = IX \cdot IC$. Тогда четырёхугольник $XYCU'$ - вписанный. Следовательно $\angle CU'I = \angle IXY$.

Сделаем H_I^k. Тогда треугольник PCQ переходит в треугольник ARB. Поэтому, при H_I^k описанная окружность треугольника PCQ переходит в описанную окружность треугольника ARB. Значит, G переходит в X и J переходит в Y. Тогда треугольник GIJ переходит в треугольник XIY. Следовательно $\triangle GIJ \sim \triangle XIY$. Откуда получаем, что $\angle IGJ = \angle IXY$.

Значит, $\angle CU'I = \angle IGJ$. Тогда $GJCU'$ - вписанный. Из леммы 1.3 следует, что G лежит на описанной окружности треугольника PCQ, а точки J и C лежат на окружности PCQ из их определения. Поэтому окружности PCQ и $GJCU'$ совпадают, то есть четырёхугольник $PQCU'$ - вписанный. **QED**

Доказательство леммы 5.1.

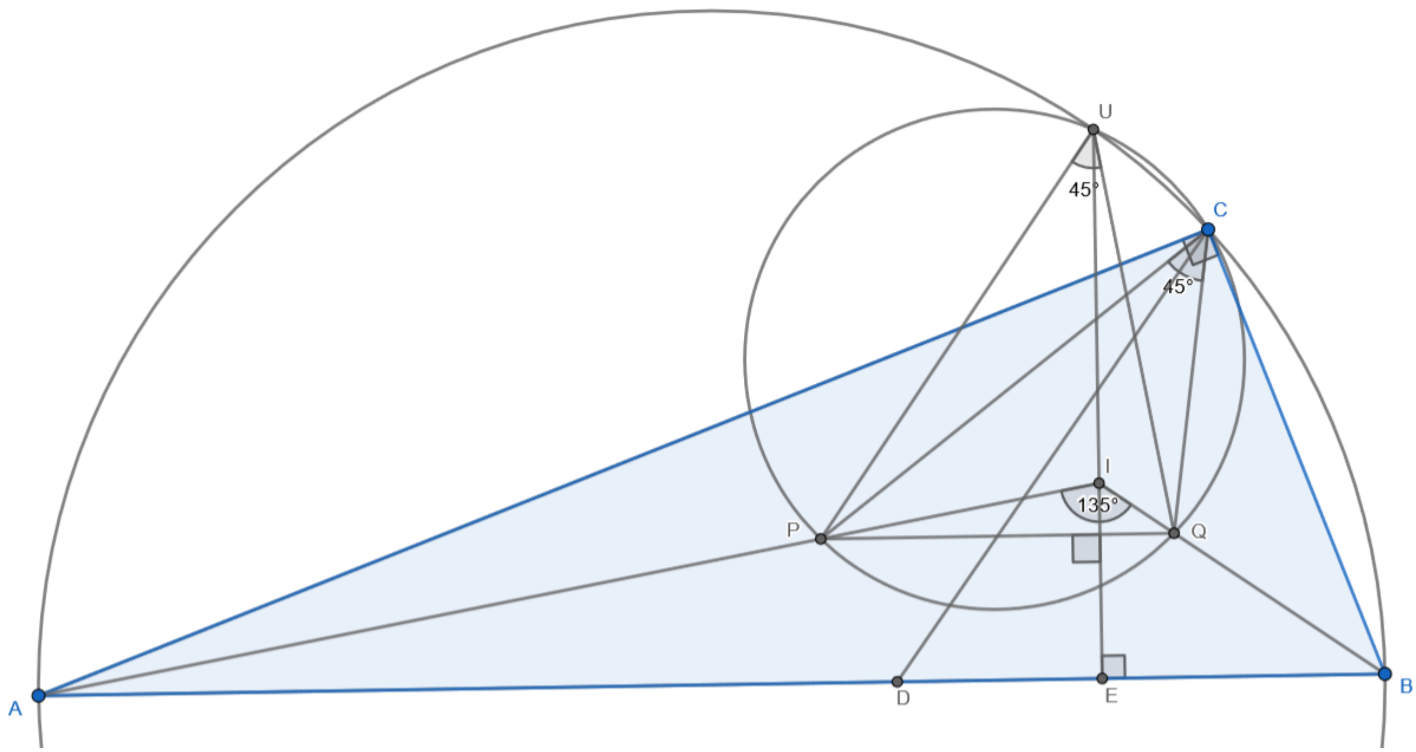


Рис. 8: К лемме 5.1)

По лемме 2 $IE \perp PQ$.
По лемме 4.1 $\angle PIQ = 135°$.
По лемме 1.2 $\angle PCQ = 45°$.
По лемме 4.3 $PQCU$ – вписанный.
Так как $\angle PCQ = 45°$ и $PQCU$ – вписанный, то $\angle PCQ = 45° = \angle PUQ$.
Так как $\angle PIQ = 135°$ и $\angle PUQ = 45°$, то $\angle PIQ + \angle PUQ = 180°$.
Теперь из равнства $\angle PIQ + \angle PUQ = 180°$ и $IE \perp PQ$ получаем, что I – ортоцентр треугольника PUQ.
QED

Доказательство леммы 5.2.

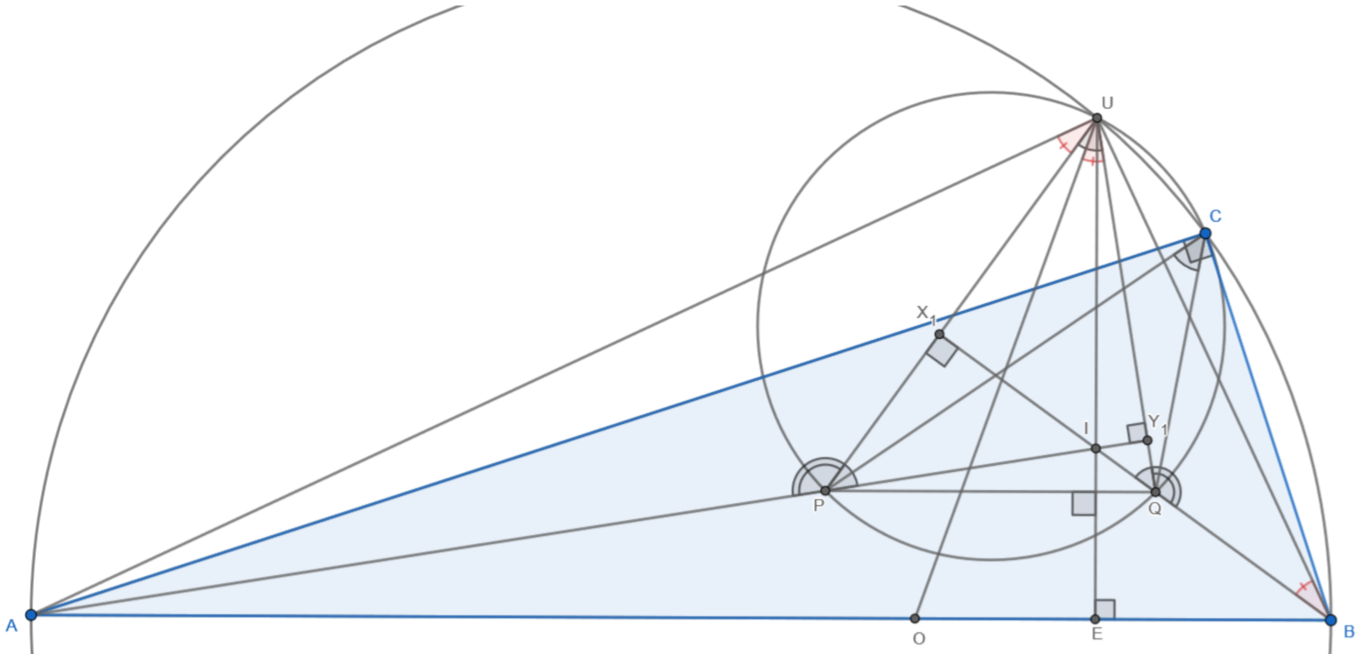


Рис. 9: К лемме 5.2: две серые дужки - 135°, одна серая дужка - 45°

Обозначим $X_1 = BQ \cap PU$, $Y_1 = BQ \cap PU$.
Точка I – ортоцентр треугольника PUQ по лемме 5.1. Тогда $BQ \perp PU$. Следовательно $\angle UX_1Q = 90°$. Из равенства $\angle PUQ = 45°$ видно, что $\angle X_1UQ = 45°$. Значит, $\angle X_1QU = 45°$. Поэтому, $\angle UQB = 135°$ как смежный с $\angle X_1QU$. Аналогично $\angle APU = 135°$.
Проведем биссектрису UO в треугольнике ABU. Так как AB - диаметр окружности, описанной около треугольника ABC, то $\angle AUO = \angle OUB = \dfrac{\angle AUB}{2} = 45°$. Из доказанного выше $\angle UQB = 135°$. Тогда из теоремы о сумме углов треугольника QBU получаем, что $\angle QBU + \angle QUB = 45°$. Также по доказанному выше $\angle OUQ + \angle QUB = \angle OUB = 45°$. Значит, $\angle QBU = \angle OUQ$.
Из равенства углов $\angle QBU = \angle OUQ$ следует касание описанной окружности треугольника QUB и прямой UO (по теореме о уголе между касательной и хордой). Аналогично описанная окружность треугольника PUA касается прямой UO. Значит, окружности, описанные около треугольнкиов QUB и PUA касаются в точке U. **QED**

Доказательство леммы 5.3.
Имеем $\angle PUQ = \angle AUO = 45°$. Следовательно $\angle AUP = \angle OUQ = \angle QBU$.
Из последнего равенства и того, что $\angle UQB = \angle APU = 135°$, вытекает, что $\triangle APU \sim \triangle UQB$. **QED**

Доказательство теоремы.

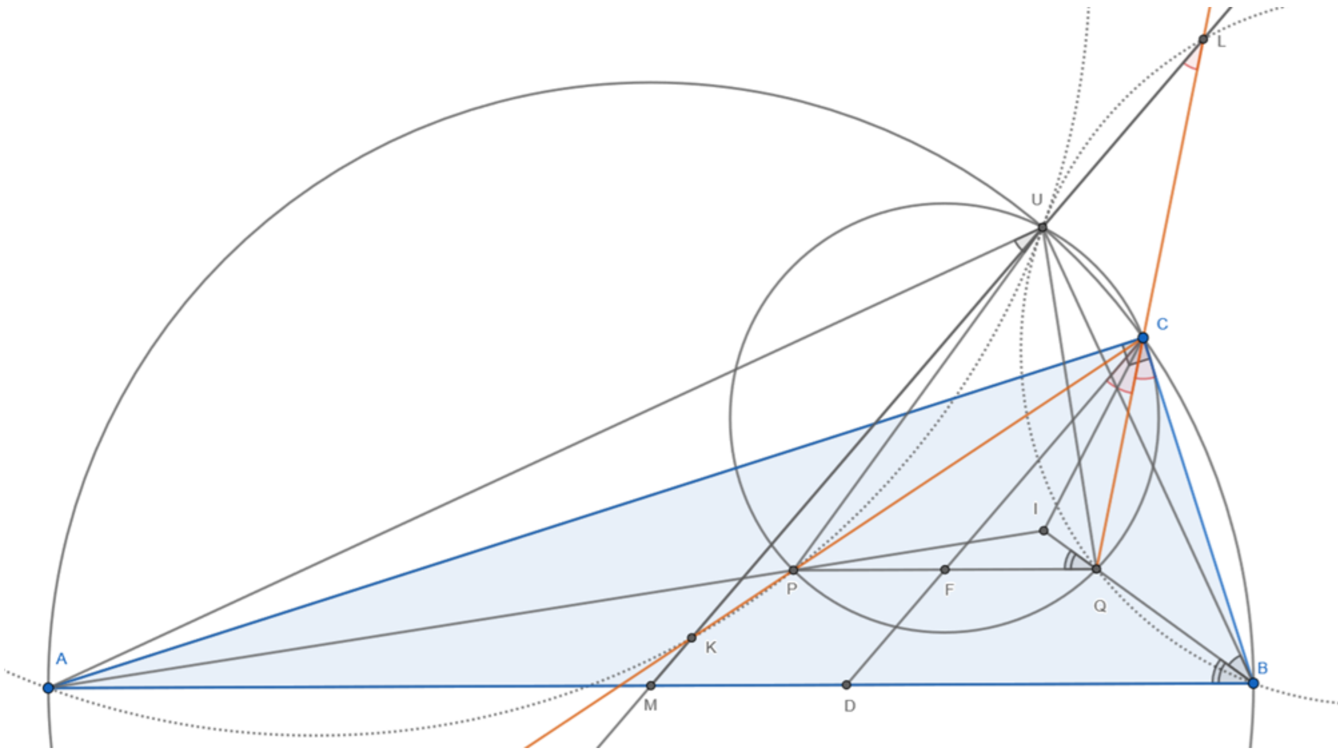


Рис. 10: Хотим доказать равенство углов $\angle ULQ = \angle UBQ$

Равенство 1. $\angle ULQ = \angle UBQ$.
Доказательство.
Введём $2\beta := \angle ABC, 2\gamma := \angle DCB$.
Из леммы 3.3 известно, что $MU \parallel CD$ и мы знаем, что CQ является биссектрисой $\angle DCB$. Значит, $\angle ULQ = \angle DCQ = \angle QCB = \gamma$.
По лемме 5.3 $\triangle APU \sim \triangle UQB$. Тогда $\angle UBQ = \angle AUP = \angle AUC - \angle PUC$.
Имеем $AB \parallel PQ$. Поэтому $\angle ABI = \angle PQI = \beta$. Также $\angle IQC = \angle QCB + \angle QBC = \gamma + \beta$. Значит, $\angle PQC = \gamma + 2\beta$. Тогда, так как $PQCU$ – вписанный, то $\angle PUC = 180^\circ - \angle PQC = 180^\circ - \gamma - 2\beta$.
По лемме 4.3 $U' = U$, а $AU'CB$ – вписанный. Значит, $AUCB$ – вписанный. Следовательно $\angle AUC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 2\beta$.

$$\angle UBQ = \angle AUC - \angle PUC = (180^\circ - 2\beta) - (180^\circ - \gamma - 2\beta) = \gamma = \angle ULQ. \ \textbf{QED}$$

Во введённых обозначениях нужно доказать, что $APKU$ и $BQUL$ – вписанные четырёхугольники, описанные окружности которых касаются в точке U.
Из равенства углов ULQ и UBQ следует, что $BQUL$ – вписанный. Аналогично $AKPU$ – вписанный. Тогда из вписанности $BQUL$, $AKPU$ и леммы 5.2 вытекает, что окружности $APKU$ и $BQUL$ касаются в точке U. **QED**

Автор выражает благодарность А.Б. Скопенкову и А.А. Заславскому за внимание к работе и ценные указания.

Список литературы

[1] А. Блинков, Ю. Блинков Две окружности в треугольнике, три окружности в треугольнике // КВАНТ 2012 №2