

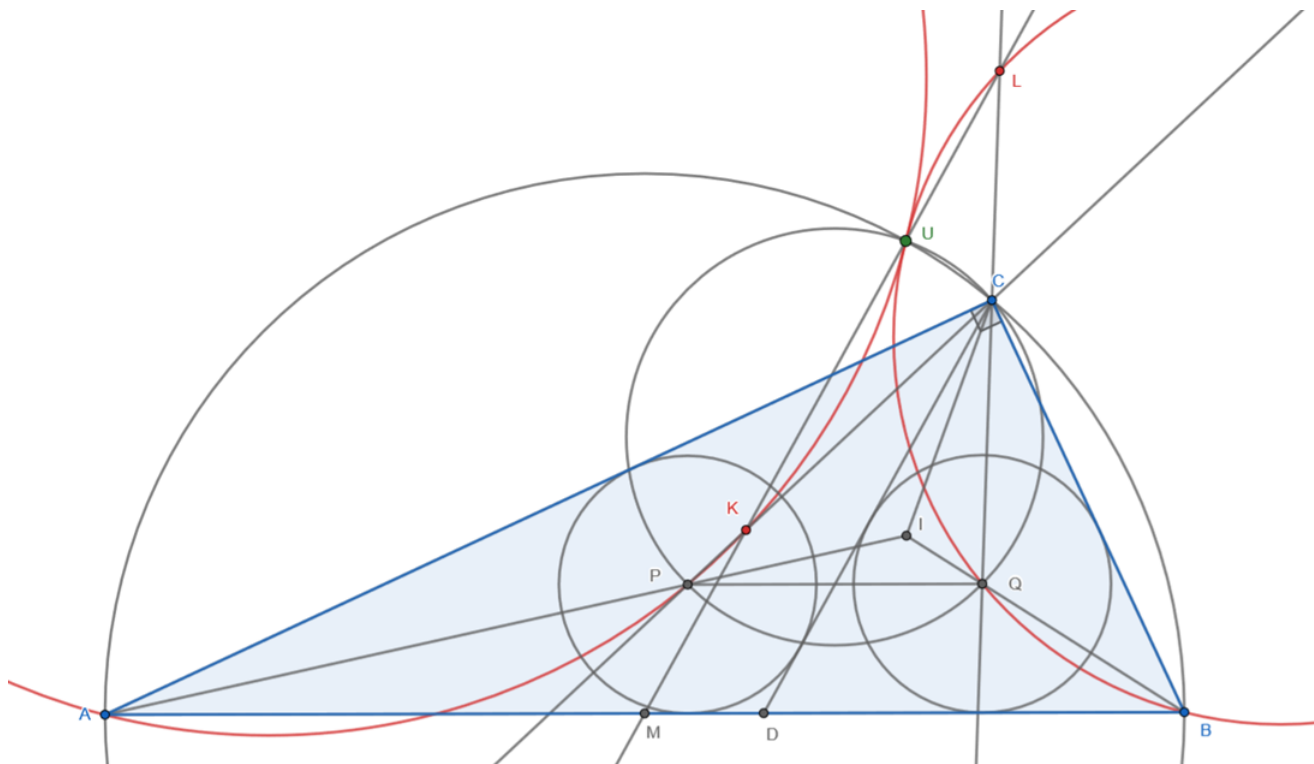
**Две равные вписанные окружности в прямоугольном
треугольнике**

Комаров Сергей Сергеевич

ВШЭ

Теорема.

Точка D выбрана на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC так, что окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD , имеют равные радиусы. Назовём центры этих окружностей P и Q соответственно, а середину AB обозначим через M . Определим точки K и L как пересечения прямой, проходящей через M параллельно CD , с прямыми PC и QC соответственно. Обозначим точку пересечения, отличную от C , описанных окружностей треугольников ABC и PCQ через U . Тогда описанные окружности треугольников AKP и BQL касаются в точке U .



Соглашение. В этой статье мы используем обозначения, введённые в формулировке основной теоремы.

Обозначения.

I - центр вписанной окружности треугольника ABC .

E - точка касания вписанной окружности треугольника ABC с прямой AB .

F - середина PQ .

G - точка пересечения прямой CI и прямой, симметричной прямой CD относительно PQ .

U' - точка пересечения прямой IE и описанной окружности треугольника ABC .

R - точка, в которую перешла C при гомететии $H_I^{\frac{IP}{IA}}$.

Окружность, проходящая через точки A_1, A_2, \dots, A_n обозначим $(A_1A_2 \dots A_n)$.

$J := IE \cap (PQC)$.

$X := CI \cap (ARB)$.

$Y := IE \cap (ARB)$.

$S := IE \cap (ABC)$.

$Z := CI \cap (ABC)$.

$N := IE \cap (ARB)$.

$W := CD \cap (PQC)$.

Лемма 1.1. Прямая CD проходит через середину отрезка PQ . (Эта лемма справедлива для равных окружностей и произвольного треугольника)

Лемма 1.2. Прямая CD симметрична CI относительно биссектрисы $\angle PCQ$, то есть $\angle ICQ = \angle PCF$. (Эта лемма справедлива для любых окружностей и произвольного треугольника)

Лемма 1.3. Прямая, симметричная прямой CD относительно PQ , пересекает прямую CI на описанной окружности треугольника PCQ . (Эта лемма справедлива для равных окружностей и произвольного треугольника)

Лемма 2. Точка F равноудалена от точек P, D, E, Q . [1] (Эта лемма справедлива для любых окружностей и произвольного треугольника)

Лемма 3.1. Прямые IE и CD пересекаются на окружности $PDEQ$.

Лемма 3.2. Окружность $PDEQ$ переходит в окружность ABC при H_I^k .

Лемма 3.3. Прямая, проходящая через M параллельно CD , прямая IE и описанная окружность треугольника ABC пересекаются в точке U' .

Лемма 4.1. (а) $IE = EY$ (б) $U'I = YS$.

Лемма 4.2. $IY \cdot IU' = IX \cdot IC$.

Лемма 4.3. Четырёхугольник $PQCU'$ – вписанный, то есть $U' = U$.

Лемма 5.1. Точка I – ортоцентр треугольника PUQ .

Лемма 5.2. $\triangle APU \sim \triangle UQB$.

Лемма 5.3. Окружности, описанные около треугольников QUB и PUA , касаются в точке U .

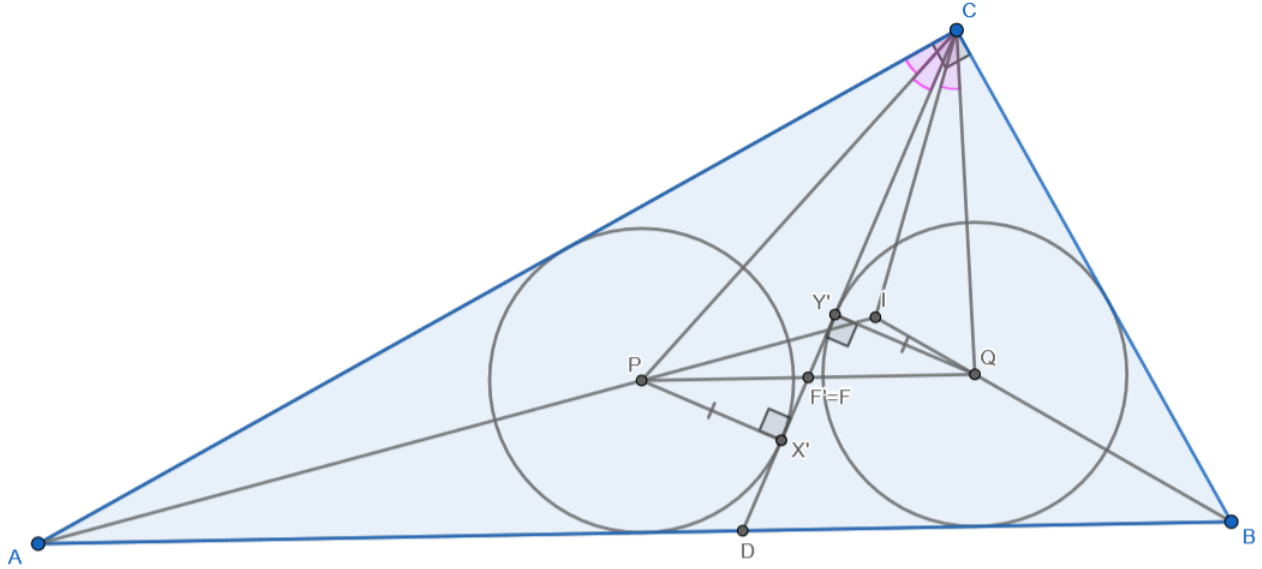


Рис. 1: К леммам 1.1 и 1.2

Доказательство леммы 1.1.

Определим X' и Y' как точки касания вписанных окружностей с CD .

Определим $F' = CD \cap PQ$.

$$\begin{cases} PX' = QY', \text{ как радиусы} \\ \angle PX'F' = \angle F'Y'Q = 90^\circ \\ \angle PF'X' = \angle Y'F'Q, \text{ как вертикальные.} \end{cases} \Rightarrow \triangle PX'F' = \triangle QY'F'. \text{ Тогда } F' \text{ – середина отрезка } PQ. \text{ QED}$$

Доказательство леммы 1.2.

Так как CI , CP и CQ биссектрисы углов $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ACD$ и $\angle DCB$ соответственно, то $\angle PCQ = \frac{\angle ACB}{2} = 45^\circ = \angle ACI$. Тогда $\angle ACP = \angle ICQ$. Вспомним, что CP - биссектриса угла $\angle ACD$. Получим, что $\angle ACP = \angle PCF$. Из выше сказанного следует, что $\angle ICQ = \angle PCF$. **QED**

Доказательство леммы 1.3.

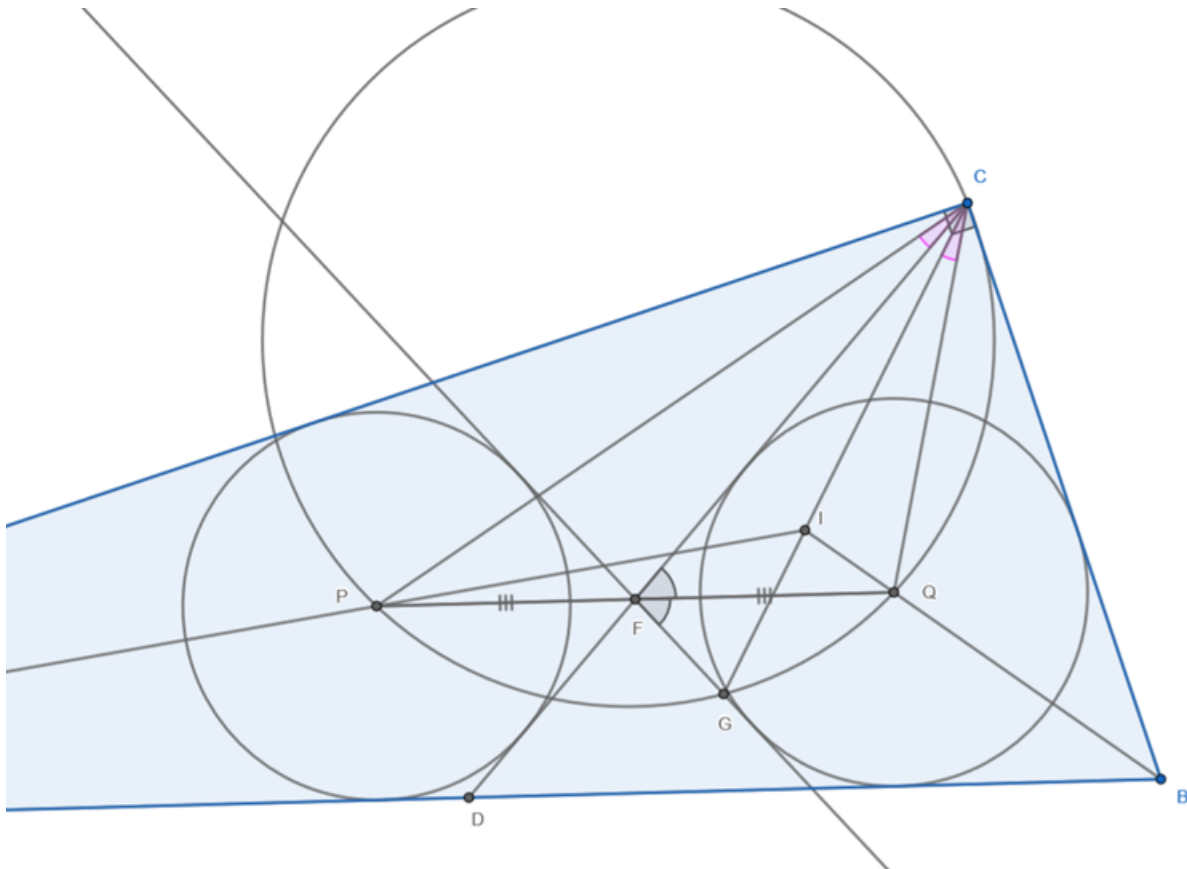


Рис. 2: К лемме 1.3

Из лемм 1.1 и 1.2 следует, что прямая CI – симедиана в треугольнике PCQ , а прямая CF – его медиана. Отразим прямую CD относительно линии центров PQ двух вписанных окружностей. Получится вторая общая внутренняя касательная этих окружностей. Обозначим точку пересечения полученной общей касательной с прямой CI через G . Тогда, применив факт 1 для треугольника PCQ , получим, что G лежит на описанной окружности треугольника PCQ . **QED**

Факт 1. Если отразить медиану относительно стороны, к которой она проведена, то она пересечёт симедиану, проведённую к той же стороне, в точке на описанной окружности этого треугольника. (Этот факт является фольклором)

Доказательство.

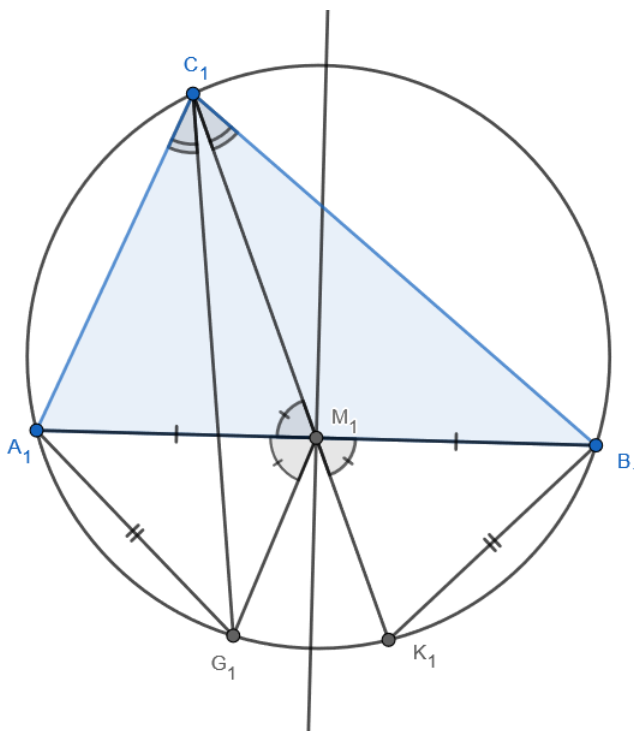


Рис. 3: К факту 1

Обозначим данный треугольник $A_1B_1C_1$.

Определим K_1 как точку пересечения, отличную от C_1 , медианы C_1M_1 с описанной окружностью треугольника $A_1B_1C_1$. Отразим описанную окружность треугольника $A_1B_1C_1$ относительно серединного перпендикуляра отрезка A_1B_1 . Обозначим G_1 точку, в которую перейдёт K_1 при сделанной симметрии. Тогда из равенства $\angle C_1M_1A_1 = \angle B_1M_1K_1 = \angle A_1M_1G_1$ очевидно следует, что прямые M_1G_1 и C_1M_1 симметричны относительно прямой A_1B_1 . Также при сделанной симметрии дуга B_1K_1 переходит в дугу A_1G_1 . Значит, $\angle B_1C_1K_1 = \angle A_1C_1G_1$. Поэтому C_1G_1 симедиана треугольника $A_1C_1B_1$. Следовательно, симедиана пересекает прямую, симметричную медиане относительно A_1B_1 , на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$. **QED**

Конструкция гомотетии для лемм 3.1, 3.2, 3.3, 4.1, 4.2, 4.3.

Сделаем гомотетию с центром в I такую, что P переходит в A . Обозначим через k коэффициент этой гомотетии, то есть отношение $\frac{IA}{IP}$. Будем обозначать эту гомотетию H_I^k .

Замечание: Данная конструкция применялась для решения задачи с Московской устной олимпиады по геометрии, 2006 года, которая звучала так: "Дан произвольный треугольник ABC. Постройте прямую, проходящую через вершину B и делящую его на два треугольника, радиусы вписанных окружностей которых равны."

Обозначим через T точку пересечения прямой CD и окружности $PDEQ$ из леммы 2.
Доказательство леммы 3.1.

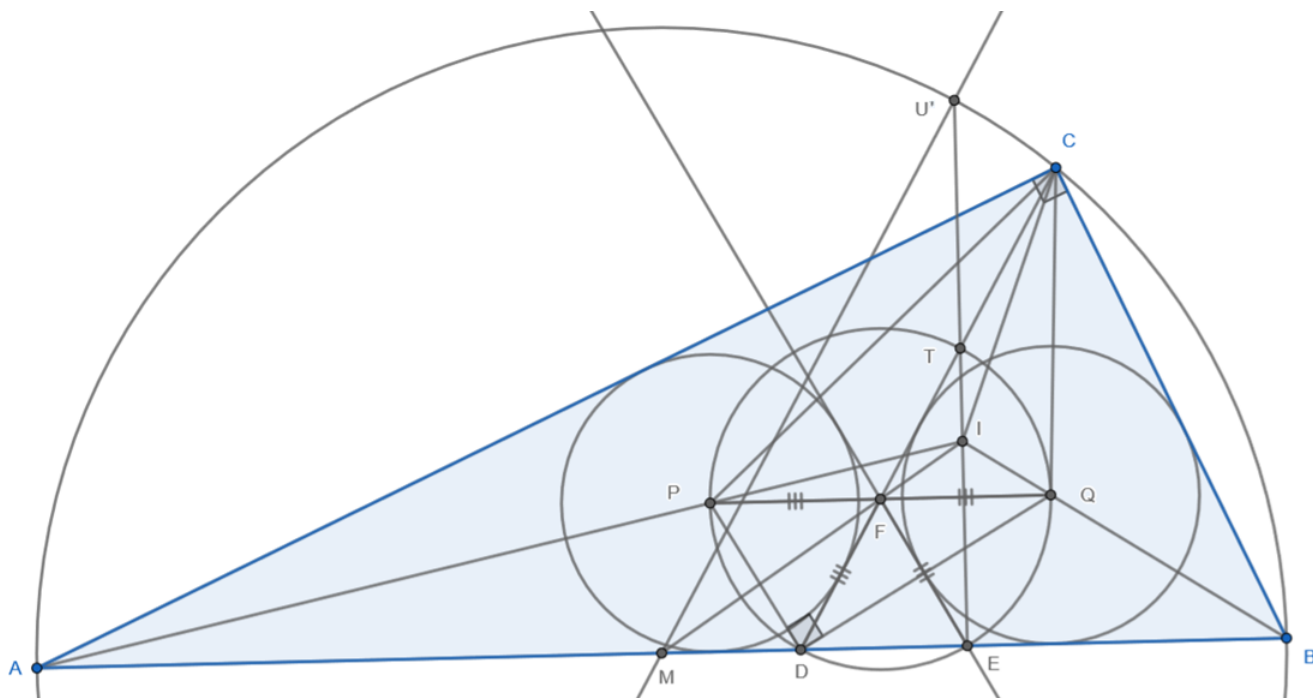


Рис. 4: К лемме 3.1

По лемме 1.1 прямая CD проходит через середину F отрезка PQ . По лемме 2 точка F является центром окружности $PDEQ$. Тогда прямая CD пересекает окружность $PDEQ$ в точке T , диаметрально противоположной D . Поэтому угол DET прямой, как и угол DEI , откуда T, I, E лежат на одной прямой. Значит, прямые IE и CD пересекаются на окружности $PDEQ$ в точке T . **QED**

Доказательство леммы 3.2.

Сделаем H_I^k . Так как $PQ \parallel AB$, то $\frac{IA}{IP} = \frac{IB}{IQ}$. Поэтому Q переходит в B . Тогда отрезок PQ переходит в отрезок AB , F переходит в M и диаметр окружности $PDEQT$ переходит в диаметр окружности, описанной около треугольника ABC . Значит, окружность $PDEQT$ переходит в окружность, описанную около треугольника ABC . **QED**

Доказательство леммы 3.3.

Пусть точка T переходит в U'' при H_I^k . Тогда, так как прямая IE переходит сама в себя, то $U'' \in IE$. Также $U'' \in$ окружности, описанной около треугольника ABC , так как $T \in$ окружности $PDEQ$, которая переходит в окружность, описанную около треугольника ABC . Следовательно, $U'' = U'$. Теперь мы знаем, что TF переходит в $U'M$. Значит, $TF \parallel U'M$. Это равносильно тому, что $CD \parallel U'M$. **QED**

Доказательство леммы 4.1.

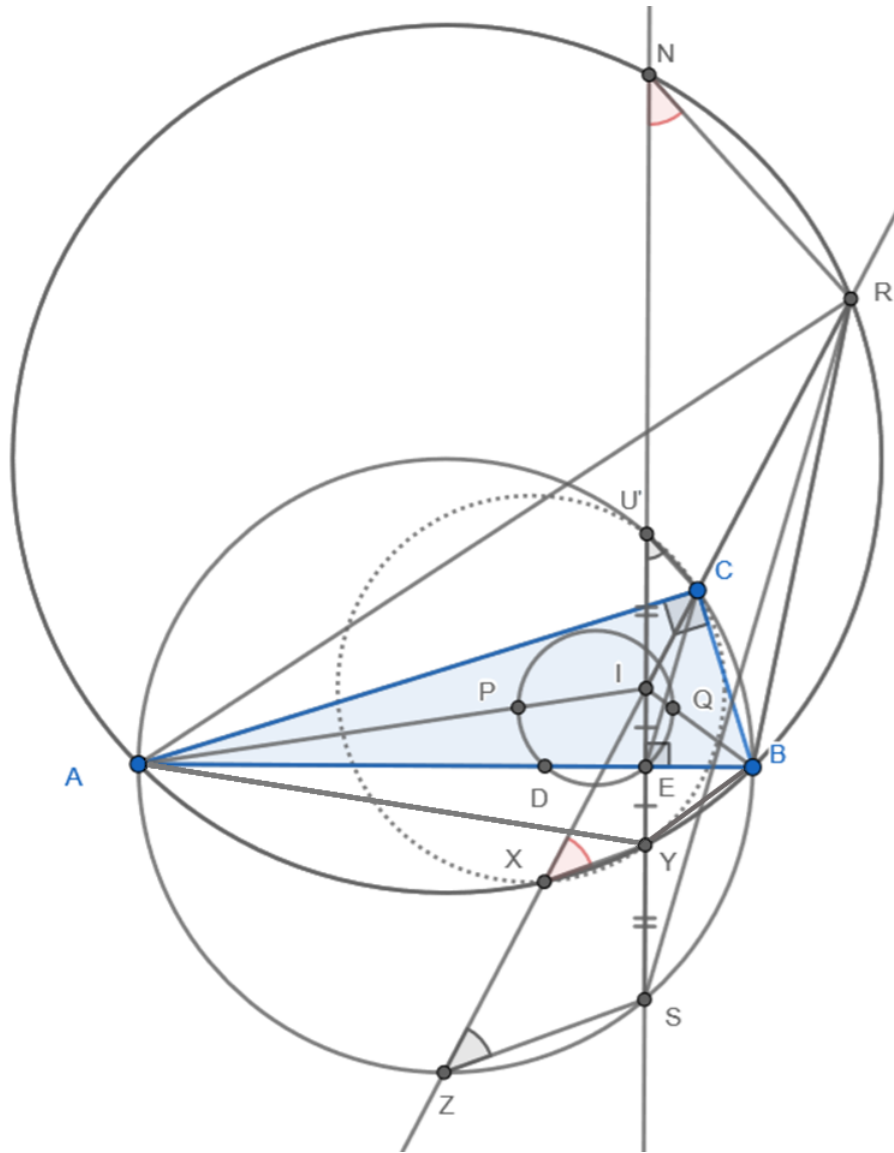


Рис. 5: К лемме 4.1

(а) Сделаем H_I^k . Тогда треугольник PCQ переходит в треугольник ARB . Теперь можно сказать, что $\angle PCQ = \angle ARB$. Значит, $45^\circ = \angle PCQ = \angle ARB$.

Мы знаем, что $\angle ARB = 45^\circ$ и $ARBY$ – вписанный. Поэтому $\angle AYB = 135^\circ$.

Также $\angle AIB = 90^\circ + \frac{\angle ACB}{2} = 135^\circ$.

Тогда окружности AIB и AYB симметричны относительно прямой AB и $IY \perp AB$. Значит, $IE = EY$. **QED**

(б) Так как AB – диаметр окружности, описанной около треугольника ABC , и $IE \perp AB$, то $EU' = ES$. **QED**

Доказательство леммы 4.2.

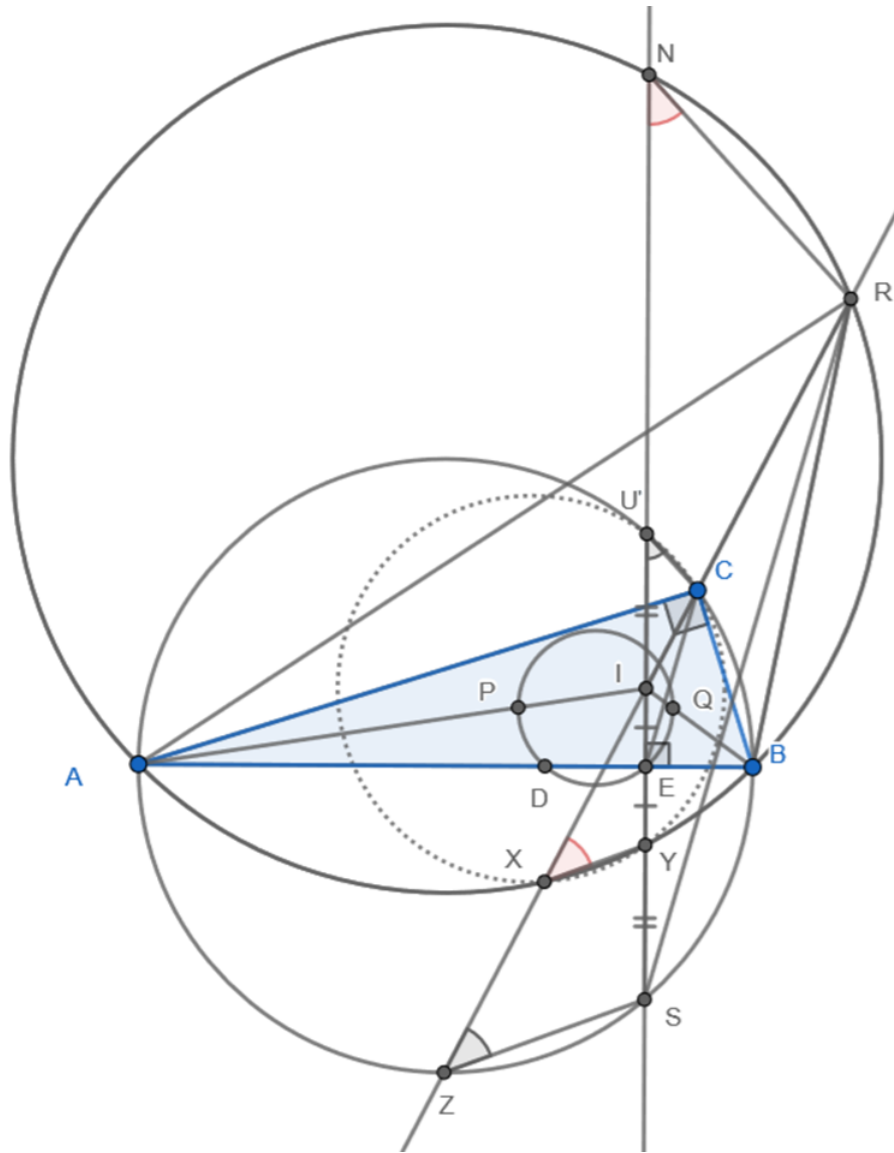


Рис. 6: К лемме 4.2

Обозначим длину отрезка EY через x , а длину отрезка SY через y .

Из леммы 4.1 следует, что $IU' = YS$.

Тогда вместо равенства $IY \cdot IU' = IX \cdot IC$ будем доказывать, что $2xy = IX \cdot IC$.

Равенство 1. $IX \cdot IR = 2x \cdot (y + U'N)$.

Доказательство.

Степень точки I относительно окружности ARB равна $IX \cdot IR = IN \cdot IY = 2x \cdot (y + U'N)$. **QED**

Равенство 2. $IR = \frac{IC \cdot (2x + y)}{x}$.

Доказательство.

По лемме 3.2 при гомотетии H_I^k окружность $PDEQ$ переходит в окружность ABC , а IE переходит сама

в себя. Тогда E переходит в S . Откуда получаем, что $EC \parallel RS$. Поэтому

$$\frac{IC}{IR} = \frac{IE}{IS} \Leftrightarrow \frac{IC}{IR} = \frac{x}{2x+y} \Leftrightarrow IR = \frac{IC \cdot (2x+y)}{x}. \quad \mathbf{QED}$$

Равенство 3. $U'N = \frac{y \cdot (x+y)}{x}$.

Доказательство.

Степень точки E относительно окружности ARB равна $EN \cdot EY = AE \cdot EB$. Степень точки E относительно окружности ACB равна $EU' \cdot ES = AE \cdot EB$. Из двух предыдущих выражений вытекает равенство

$$EN \cdot EY = EU' \cdot ES \Leftrightarrow (x+y+U'N) \cdot x = (x+y)^2 \Leftrightarrow x^2 + xy + x \cdot U'N = x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow U'N = \frac{y \cdot (x+y)}{x}.$$

QED

Подставим равенства 2 и 3 в равенство 1 и получим $IX \cdot \frac{IC \cdot (2x+y)}{x} = 2x \cdot (y + \frac{y \cdot (x+y)}{x}) \Leftrightarrow IX \cdot IC = \frac{2x^2y + 2xy \cdot (x+y)}{2x+y} = 2xy$. **QED**

Доказательство леммы 4.3.

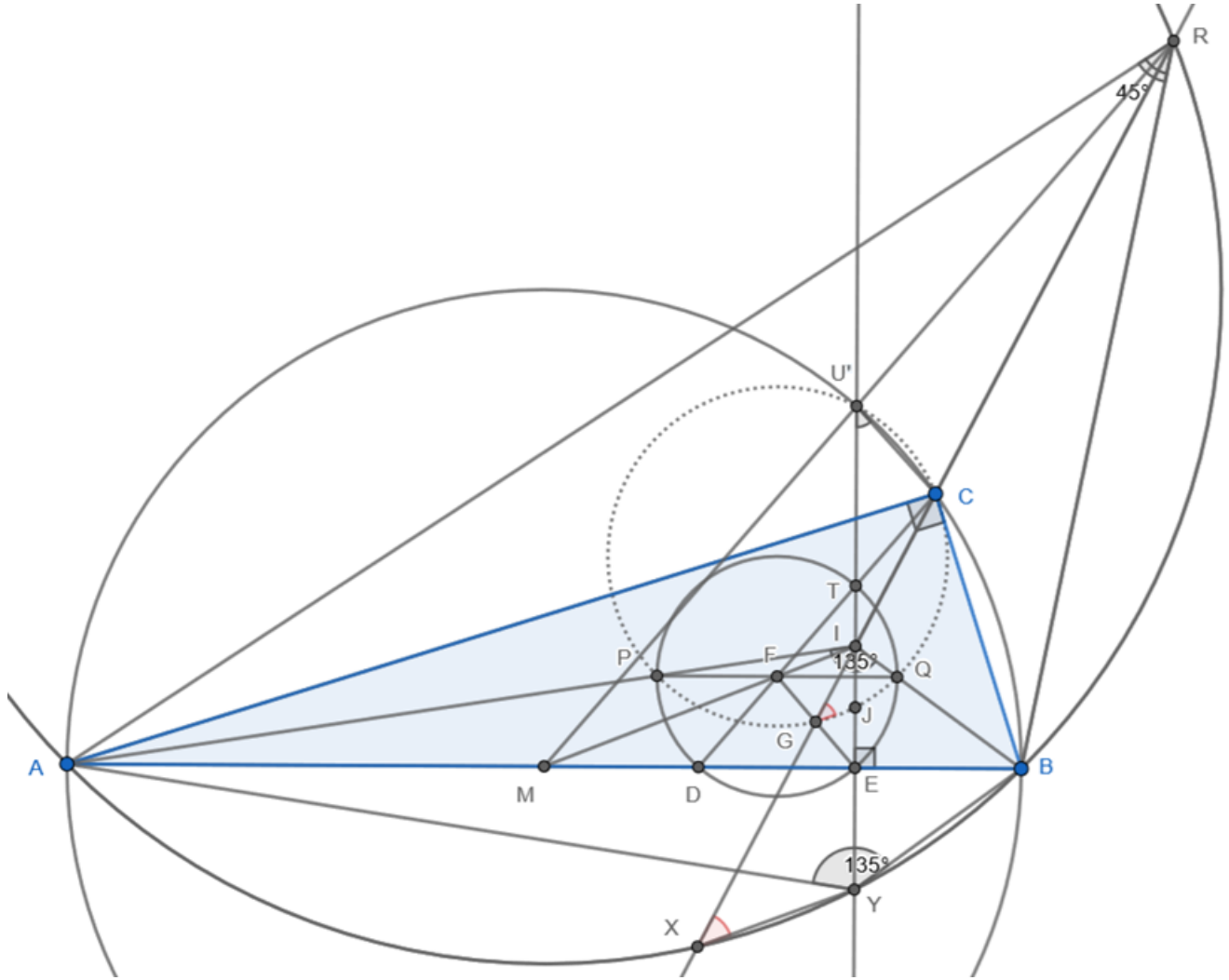


Рис. 7: К лемме 4.3

По лемме 4.2 $IY \cdot IU' = IX \cdot IC$. Тогда четырёхугольник $XYCU'$ - вписанный. Следовательно, $\angle CU'I = \angle IXU'$.

Сделаем H_I^k . Тогда треугольник PCQ переходит в треугольник ARB . Поэтому при H_I^k описанная окружность треугольника PCQ переходит в описанную окружность треугольника ARB . Значит, G переходит в X и J переходит в Y . Тогда треугольник GII переходит в треугольник XIY . Откуда получаем, что $\angle IGJ = \angle IXU'$.

Значит, $\angle CU'I = \angle IGJ$. Тогда $GJCU'$ - вписанный. Из леммы 1.3 следует, что G лежит на описанной окружности треугольника PCQ , а точки J и C лежат на окружности PCQ из их определения. Поэтому окружности PCQ и $GJCU'$ совпадают, то есть четырёхугольник $PQCU'$ - вписанный. **QED**

Доказательство леммы 5.1.

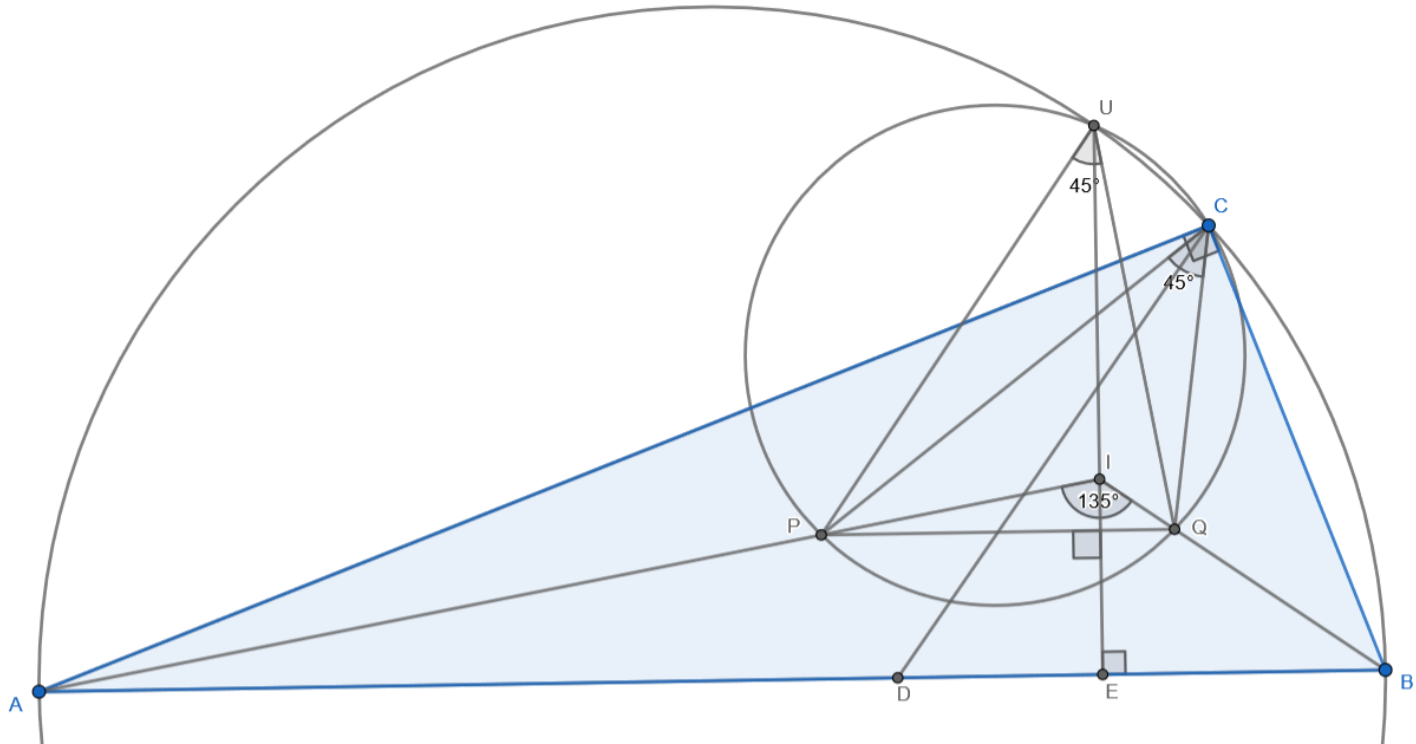


Рис. 8: К лемме 5.1

По лемме 2 $IE \perp PQ$.

По лемме 4.1 $\angle PIQ = 135^\circ$.

По лемме 1.2 $\angle PCQ = 45^\circ$.

По лемме 4.3 $PQCU$ – вписанный.

Так как $\angle PCQ = 45^\circ$ и $PQCU$ – вписанный, то $\angle PCQ = 45^\circ = \angle PUQ$.

Так как $\angle PIQ = 135^\circ$ и $\angle PUQ = 45^\circ$, то $\angle PIQ + \angle PUQ = 180^\circ$.

Теперь из равенства $\angle PIQ + \angle PUQ = 180^\circ$ и $IE \perp PQ$ получаем, что I – ортоцентр треугольника PUQ .

QED

Доказательство леммы 5.2.

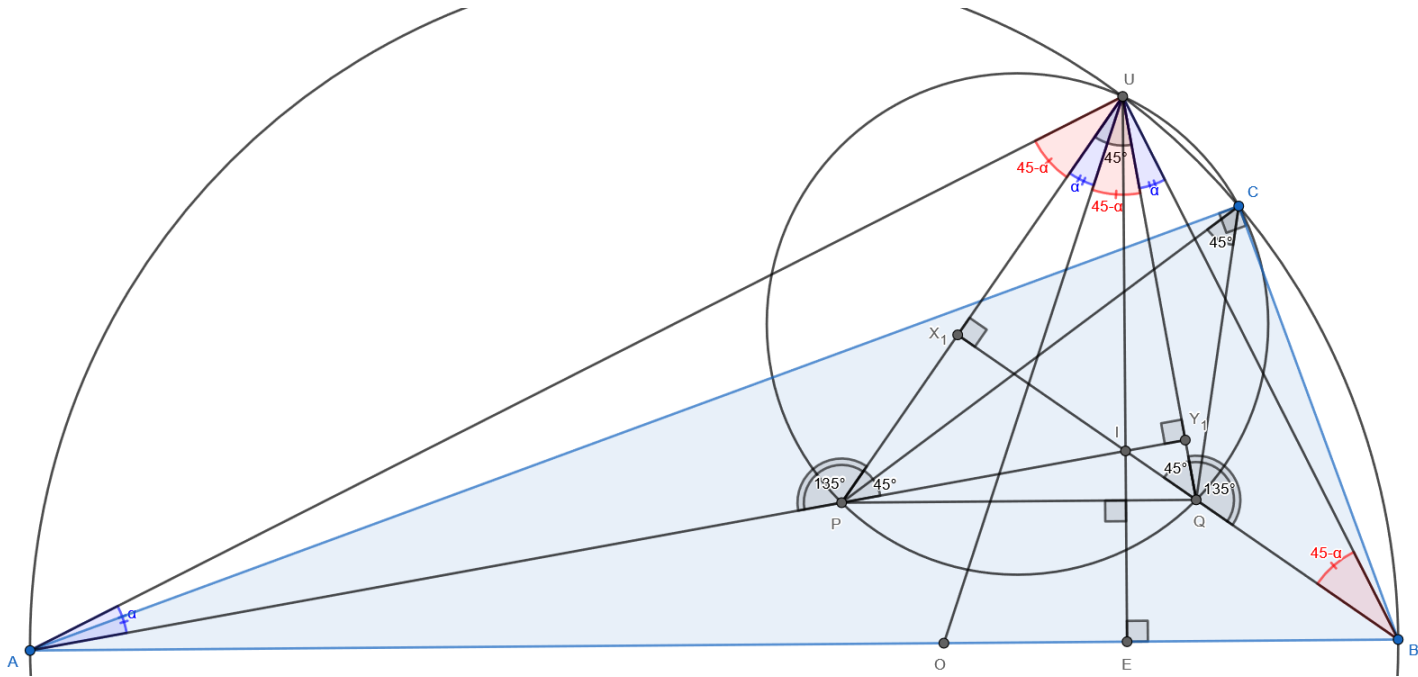


Рис. 9: К лемме 5.2

Обозначим $X_1 = BQ \cap PU$, $Y_1 = AP \cap UQ$.

Точка I – ортоцентр треугольника PUQ по лемме 5.1. Тогда $BQ \perp PU$. Следовательно, $\angle UX_1Q = 90^\circ$. Из равенства $\angle PUQ = 45^\circ$ видно, что $\angle X_1UQ = 45^\circ$. Значит, $\angle X_1QU = 45^\circ$. Поэтому $\angle UQB = 135^\circ$ как смежный с $\angle X_1QU$. Аналогично $\angle APU = 135^\circ$.

Проведем биссектрису UO в треугольнике ABU . Так как AB – диаметр окружности, описанной около треугольника ABC , то $\angle AUO = \angle OUB = \frac{\angle AUB}{2} = 45^\circ$. Из доказанного выше $\angle UQB = 135^\circ$. Тогда из теоремы о сумме углов треугольника QBU получаем, что $\angle QBU + \angle QUB = 45^\circ$. Также по доказанному выше $\angle OUQ + \angle QUB = \angle OUB = 45^\circ$. Значит, $\angle QBU = \angle OUQ$.

Имеем $\angle PUQ = \angle AUO = 45^\circ$. Следовательно, $\angle AUP = \angle OUQ = \angle QBU$.

Из последнего равенства и того, что $\angle UQB = \angle APU = 135^\circ$, вытекает, что $\triangle APU \sim \triangle UQB$. **QED**

Доказательство леммы 5.3.

Из равенства углов $\angle QBU = \angle OUQ$ следует касание описанной окружности треугольника QUB и прямой UO (по теореме о угле между касательной и хордой). Аналогично описанная окружность треугольника PUA касается прямой UO . Значит, окружности, описанные около треугольников QUB и PUA касаются в точке U . **QED**

Доказательство теоремы.

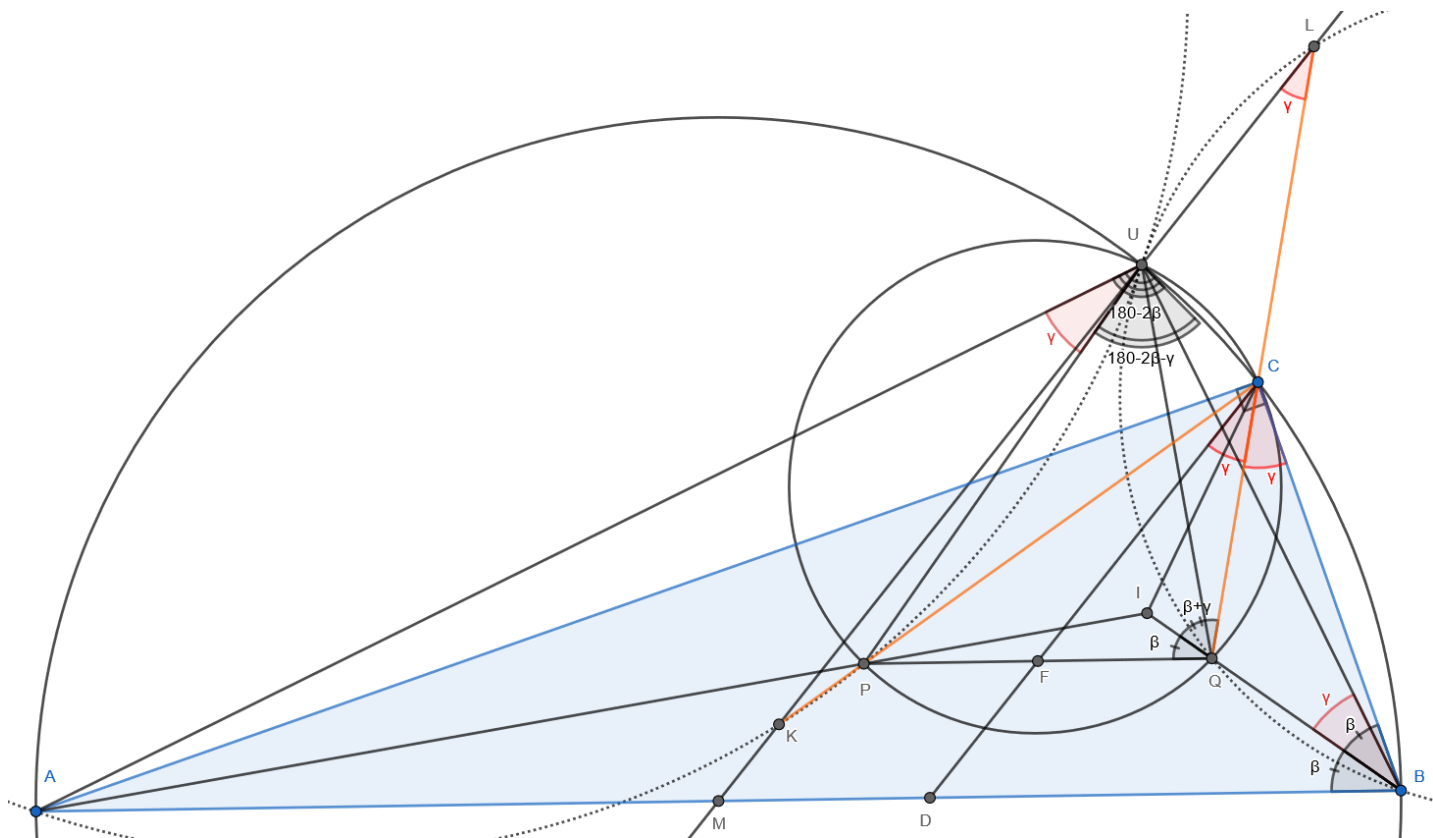


Рис. 10: Хотим доказать равенство углов $\angle ULQ = \angle UBQ$

Равенство 1. $\angle ULQ = \angle UBQ$.

Доказательство.

Обозначим величину угла ABC через 2β , а величину угла DCB через 2γ .

Из леммы 3.3 известно, что $MU \parallel CD$ и мы знаем, что CQ является биссектрисой $\angle DCB$. Значит, $\angle ULQ = \angle DCQ = \angle QCB = \gamma$.

По лемме 5.3 $\triangle APU \sim \triangle UQB$. Тогда $\angle UBQ = \angle AUP = \angle AUC - \angle PUC$.

Имеем $AB \parallel PQ$. Поэтому $\angle ABI = \angle PQI = \beta$. Также $\angle IQC = \angle QCB + \angle QBC = \gamma + \beta$. Значит, $\angle PQC = \gamma + 2\beta$. Тогда, так как $PQCU$ – вписанный, то $\angle PUC = 180^\circ - \angle PQC = 180^\circ - \gamma - 2\beta$.

По лемме 4.3 $U' = U$, а $AU'CB$ – вписанный. Значит, $AUCB$ – вписанный. Следовательно, $\angle AUC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 2\beta$.

$$\angle UBQ = \angle AUC - \angle PUC = (180^\circ - 2\beta) - (180^\circ - \gamma - 2\beta) = \gamma = \angle ULQ. \quad \mathbf{QED}$$

Во введённых обозначениях нужно доказать, что $APKU$ и $BQUL$ – вписанные четырёхугольники, описанные окружности которых касаются в точке U .

Из равенства углов ULQ и UBQ следует, что $BQUL$ – вписанный. Аналогично $AKPU$ – вписанный. Тогда из вписанности $BQUL$, $AKPU$ и леммы 5.3 вытекает, что окружности $APKU$ и $BQUL$ касаются в точке U . **QED**

Автор выражает благодарность А.Б. Скопенкову и А.А. Заславскому за внимание к работе и ценные указания.

Список литературы

[1] А. Блинков, Ю. Блинков Две окружности в треугольнике, три окружности в треугольнике // КВАНТ 2012 №2