Утверждение. Число $\cos(2\pi/n)$ представимо в виде $a \pm \sqrt{b}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда $n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12\}$.

Доказательство. Рассмотрим число $\varepsilon_n = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, то есть корень n степени из единицы. Обозначим через $\Phi_n(x)$ многочлен с рациональными коэффициентами наименьшей степени, для которого ε_n является корнем. Я буду пользоваться следующим утверждением: $\deg \Phi_n(x) = \varphi(n)$, а также что $\Phi_n(x) = x^{\varphi(n)}\Phi_n(\frac{1}{x})$, то есть что для любого $n \in \mathbb{N}$ последовательность коэффициентов $\Phi_n(x)$ симметрична (такие многочлены называют возвратными).

Если $n = 1$, то $\cos(2\pi/n) = \cos 2\pi = 1$, а если $n = 2$ $\cos(2\pi/n) = \cos\pi = -1$. Таким образом, получаем, что $n = 1, 2$ подходят.

Лемма 1. При $n > 2$ существует такой неприводимый многочлен $T_n(x)$ степени $\varphi(n)/2$, что $T_n(\cos(\frac{2\pi}{n})) = 0$. Пусть $n > 2$. Тогда $\varphi(n)$ чётно, так как k взаимно просто с n тогда и только тогда, когда $n-k$ взаимно просто с n, и для четных n НОД$(n/2; n) = n/2 > 1$, что задаёт разбиение чисел, взаимно простых с n на пары. Также $\cos(2\pi/n) = \frac{1}{2}(\varepsilon_n + \overline{\varepsilon_n}) = \frac{1}{2}(\varepsilon_n + \frac{1}{\varepsilon_n})$. Рассмотрим многочлен $T_n(x)$ такой, что $T_n(\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})) = \Phi_n(x)/x^{\varphi(n)/2}$. Такую замену можно сделать в силу симметричности последовательности коэффициентов и того факта, что $x^k + y^k$ при $y = \frac{1}{x}$ выражается через $x + y = 2t$ и $xy = 1$ по основной теореме о симметрических многочленах. Покажем, что данный многочлен искомый.

$T_n(x)$ неприводим, так как если $T_n(x) = P(x)Q(x)$, где $\deg P = k < \varphi(n)/2 = \deg T_n$, то $\Phi_n(x) = x^{\varphi(n)/2}T_n(\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})) = x^k P(\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})) \cdot x^{\varphi(n)/2-k}Q(\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})) = R(x) \cdot S(x)$ для некоторых многочленов R, S, что противоречит неприводимости $\Phi_n(x)$. Тогда мы построили неприводимый над $\mathbb{Q}$ многочлен $T_n(x)$ степени $\varphi(n)/2$, у которого $\cos(2\pi/n)$ — корень. Что и требовалось доказать.

Пусть $\cos(2\pi/n) = a \pm \sqrt{b}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$. Рассмотрим многочлен $f(x) = (x - a - \sqrt{b})(x - a + \sqrt{b}) = (x - a)^2 - b \in \mathbb{Q}[x]$. Тогда заметим, что $f(\cos(2\pi/n)) = 0$; $T_n(\cos(2\pi/n)) = 0$. Таким образом, мы нашли два многочлена над $\mathbb{Q}$, у которых есть общий корень. Но в таком случае мы получаем, что у них есть НОД над $\mathbb{Q}$ степени выше 0. Тогда так как $T_n(x)$ неприводим, $T_n(x)$ делит $f(x)$, следовательно $\varphi(n)/2 = \deg T_n(x) \leqslant \deg f(x) = 2$. Итого мы получаем, что $\varphi(n) \leqslant 4$. Верно и обратное: если $\phi(n) \leqslant 4$, то так как $T_n(x)$ — многочлен степени не выше второй, то все его корни — квадратичные иррациональности (если $T_n = ax + b$, то корень — $-\frac{b}{a}$, а если $T_n = ax^2 + bx + c$ при $a \neq 0$, то корни имеют вид $-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$). Итого осталось найти все такие $n \in \mathbb{N}$, для которых $\varphi(n) \leqslant 4$.

Лемма 2. Если $\varphi(n) \leqslant 4$, то $n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12\}$.

Доказательство. Как известно, $\varphi(n) = \prod_{p|n, p\in\mathbb{P}}(p-1)p^{\nu_p(n)-1}$, где $\nu_p(n)$ - степень вхождения простого p в n. Если $\varphi(n) \leqslant 4$, то n не имеет простых делителей больше 5. Если $5|n$, то $\varphi(n) \geqslant 5 - 1 = 4$, т.е. у $\varphi(n)$ нет иных отличных от 1 делителей, значит, $n \in \{5; 10\}$. $\nu_3(n) \leqslant 1$, иначе $\varphi(n) \geqslant 6$. $\nu_2(n) \leqslant 3$, иначе $\varphi(n) \geqslant 8$. Тогда все n такие, что $\varphi(n) \leqslant 4$ и $5 \nmid n$ лежат в множестве $\{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24; 48\}$. $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$, $\varphi(8) = 4$, $\varphi(12) = 4$, $\varphi(24) = 8$, $\varphi(48) = 16$. Видно, что подходят все n, кроме 24 и 48. Таким образом, итоговое множество чисел, функция Эйлера от которых не превосходит 4 — это $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12\}$. Значит, лемма доказана.

Значит, мы доказали и наше изначальное утверждение: число $\cos(2\pi/n)$ представимо в виде $a \pm \sqrt{b}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда $n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12\}$.