Комбинаторный алгоритм подсчёта ранга некоторых матриц

М. Ю. Пелишенко

15 октября 2023 г.

Введение

В данном проекте рассматривается несколько комбинаторных задач, связанных с комбинаторным алгоритмом, позволяющим эффективно считать ранги некоторых матриц. Он используется, скажем, в [1].

Общая идея этого подхода такова: сопоставлять матрице граф, и соединять его вершины рёбрами, если в соответствующей клетке матрицы стоит не 0, и не соединять иначе. Более детально эта идея отражена в Лемме 2.

Комбинаторная часть вопроса выглядит следующим образом:

• при удалении «висячего ребра» из графа (определение дано в Части 1) ранг соответствующей матрицы уменьшается на 2;

• ранг матрицы, соответствующей графу без рёбер равен 0.

В связи с этими простыми фактами возникает такой вопрос: ранги матриц, соответствующие каким графам можно посчитать, используя данные соображения. Эта проблема и является центральной задачей проекта.

Также получены следующие результаты:

• Если из графа можно получить несвязное множество вершин или пустое множество (у матрицы, которой такой граф соответствует, все элементы нулевые, поэтому её ранг равен 0) операциями «добавление» и «удаление» висячего ребра, то можно обойтись только «удалением».

• Из двудольного графа удалениями висячих рёбер можно получить пустое множество тогда и только тогда, когда, в нём есть единственное полное паросочетание. А для дерева условие единственности можно заменить условием существования.

• Для всякого натурального k существуют и единственны (с точностью до изоморфизма) максимальные и минимальные по включению графы на $2k$ вершинах такие, что из них можно получить удалениями висячих рёбер пустое множество. Из графа на $2k$ вершинах можно получить удалениями висячих рёбер пустое множество тогда и только тогда, когда он является подграфом максимального по включению и содержит в себе подграф, изоморфный минимальному по включению.

Структура работы такова: в части 1 показано, что из графа, в котором есть хотя бы одно ребро, но нет висячих вершин, нельзя получить несвязное множество вершин или пустое множество; в части 2 описано, как устроены графы, из которых можно получить несвязное множество вершин или пустое множество, и дан критерий для двудольного графа; в части 3 рассмотрено разбиение на классы эквивалентности по отношению эквивалентности, определяемому через удаление и добавление висячих рёбер; в части 4 продемонстрирован комбинаторный алгоритм подсчёта рангов некоторых матриц и приведён к нему явный пример.

Часть 1: Базовые графы и их базовые свойства

Определение 1. Будем называть *висячей вершиной* графа вершину, имеющую степень 1; а *висячим ребром* графа — ребро, одна из вершин которого висячая.

Определение 2. Будем называть граф *базовым*, если в нём нет висячих рёбер. Таким образом, графы без вершин или без рёбер — тоже базовые.

Определение 3. Будем понимать под *удалением* висячего ребра из графа удаление обеих его вершин, а также всех рёбер, из них идущих. Под *добавлением* висячего ребра к графу будем понимать добавление двух вершин, соединённых ребром, и ещё, возможно, нескольких рёбер между ровно одной из них и какими-то вершинами исходного графа (у второй вершины, таким образом, всегда получается степень 1).

Лемма 1. Дан базовый граф (V, E). Тогда в ходе операций «добавление» и «удаление» висячих рёбер, на каждом этапе получаемый граф будет содержать индуцированный подграф[1] (V', E') для множества вершин V', который изоморфен (V, E).

Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим цепочку операций, приводящую к графу без индуцированного подграфа, изоморфного исходному, и сопоставим ей цепочку без удалений, приводящую к графу, изоморфному получившемуся, что, очевидно, равносильно противоречию. Для этого последовательно будем переходить к эквивалентной композиции, но в ней будет на одно удаление меньше, чем в предыдущей. Поскольку цепочка конечна, а значит, в ней конечно число удалений, в результате мы получим цепочку без удалений.

Так как в исходном графе не было висячих вершин, а значит и рёбер, первой операцией было добавление ребра. Рассмотрим первый момент, когда было удалено ребро — мы обозначим его AB, где B — висячая вершина:

$$(V, E) \xrightarrow{\text{добавление}} (V^+, E^+) \xrightarrow{\text{удаление } AB} (V^-, E^-).$$

Обозначим за $\widetilde{V}$ — множество вершин степени не менее 2 в исходном графе (V, E). Очевидно, что $B \notin \widetilde{V}$.

Пусть $A \in V$. Пусть также $B \in V$. Тогда B имеет степень 0 в графе (V, E). Заметим, что B не имеет смежных вершин из V, так как изначально их не было,

[1] То есть подграф на соответствующем множестве вершин, содержащий все рёбра, проведённые между этими вершинами.

и рёбер между вершинами V не добавлялось. Отсюда $B \notin V$. В таком случае, B была добавлена, а значит, она смежна с вершиной C, с которой её одновременно добавили. А поскольку мы рассматриваем момент первого удаления, получается, что B не висячая (соединена с A и C). Следовательно, $A \notin V$.

Тогда есть два случая:
1. Вершина B добавлялась как висячая и смежная A.
2. Вершина B изначально была изолированной в графе (V, E), но в процессе стала висячей.

Заменим часть цепочки операций от начала до удаления ребра AB включительно на эквивалентную (то есть приводящую к изоморфному графу). В первом случае все операции до добавления AB сохраним, далее операцию «добавление AB» пропускаем. Далее сохраняем все добавления, игнорируя все соединения с вершинами A и B. Очевидно, что таковая цепочка приведёт к изоморфному графу.

Во втором случае, вершина A добавлялась в паре с C, отличной от B. В этом случае также сохраним все операции до добавления AC и пропустим операцию «добавление AC». Далее сохраняем все добавления, и, если в исходной цепочке последующие добавляемые вершины могли соединяться с C, то в её замене ровно те же вершины при добавлении будут соединяться с B. Ясно, что таковая цепочка тоже приведёт к изоморфному графу.

Как результат, цепочка, в которой на одно удаление меньше, получена. □

Следствие 1. Из базового графа, в котором есть хотя бы одно ребро, нельзя, используя операции «добавление» и «удаление» висячих рёбер, получить несвязное множество вершин или пустое множество.

Часть 2: Стратифицированные и двудольные графы

Опишем множество графов, из которых операциями «добавление» и «удаление» висячих рёбер, можно получить несвязное множество вершин или пустое множество.

Теорема 1. Если из графа можно получить несвязное множество вершин или пустое множество (то есть граф без рёбер) операциями «добавление» и «удаление» висячих рёбер, то можно обойтись только «удалением».

Доказательство. Рассмотрим граф, из которого такими операциями можно получить граф без рёбер. Будем удалять из него висячие рёбра до тех пор, пока это возможно. Процесс прервётся, поскольку граф конечный. Если в конце осталось хоть одно ребро, то из полученного графа нельзя получить этими операциями пустое множество или несвязное множество вершин согласно следствию из Леммы 1, что противоречит выбору графа. Следовательно, осталось несвязное множество вершин, или пустое множество. □

Определение 4. Будем называть граф *стратифицированным*, если его вершины можно разбить на чётное число множеств (далее уровней) $V_1, V_2, \ldots, V_{2n}$ так, чтобы:

• из любой вершины нечётного по счёту уровня идёт ровно одно ребро в вершину следующего уровня;

• из любой вершины чётного по счёту уровня идёт ровно одно ребро в вершину предыдущего уровня;

• из любой вершины нечётного уровня могут быть рёбра в вершины чётных уровней с номером, меньшим его;

• не может быть никаких других рёбер из/в вершин(ы) нечётных уровней;

• кроме описанных рёбер могут присутствовать любые рёбра между вершинами любых чётных уровней.

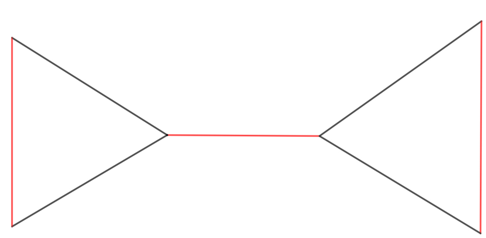
Несложно привести примеры, в которых один и тот же стратифицированный граф может быть разбит на уровни по-разному (в том числе, на разное число уровней).

Предложение 1. Из графа можно удалением висячих рёбер получить пустое множество вершин, или пустое множество тогда и только тогда, когда граф стратифицированный.

Доказательство. Часть «Тогда». Ясно, что в каждом нечётном по счёту уровне вершин столько же, сколько и в последующем. Очевидно, что все вершины из уровня V_1 висячие, а вершины, смежные с ними образуют V_2. Удалим все $|V_1| = |V_2|$ висячих рёбер, в которых есть вершины из V_1 и V_2. После этого, все вершины множества V_3 висячие, а вершины им смежные образуют множество V_4. Аналогично, можно удалить $|V_4| = |V_3|$ висячих рёбер, в которых есть вершины из этих уровней. И так далее: после k-ой серии удалений: либо в графе вовсе не осталось вершин, либо остались вершины уровней V_{2k+1}, V_{2k+2} и, возможно, другие. Все вершины из уровня V_{2k+1} висячие, а вершины, смежные с ними образуют V_{2k+2}. Удалим все $|V_{2k+1}| = |V_{2k+2}|$ висячих рёбер, в которых есть вершины из этих уровней, и продолжим процесс.

Часть «Только тогда». Разобьём граф на уровни. Рассмотрим цепочку удалений, приводящую к пустому множеству. Обозначим число шагов в ней за n. На k-ом этапе удаляется ребро между вершинами A_k и B_k, где B_k висячая. Определим вершину B_k в $2k-1$-ый уровень, а A_k — в $2k$-ый. Очевидно, что это разбиение на уровни удовлетворяет условию стратифицированности. □

Легко заметить, что *стратифицированные* графы содержат единственное полное паросочетание (то есть существует единственный способ разбить вершины на пары так, чтобы вершины внутри каждой пары были соединены ребром). Это условие необходимо, но не достаточно, например, граф, состоящий из двух треугольников, соединённых ребром, очевидно, содержит единственное полное паросочетание, но не является стартифицированным (см. рис. ниже, рёбра полного паросочетания выделены красным).



Теорема 2. Двудольный граф является стратифицированным тогда и только тогда, когда в нём есть единственное полное паросочетание.

Доказательство. В любом стратифицированном графе существует единственное полное паросочетание. Таким образом, осталось проверить, что двудольный граф (V, E) с единственным полным паросочетанием всегда стратифицированный.

Пусть (V, E) непустой и не имеет висячих вершин. Рассмотрим в нём полное паросочетание $\Delta : A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$. Покрасим вершину A_1 в белый цвет, а вершину B_1 — в чёрный. Тогда из B_1 есть ребро, ведущее в вершину другого ребра паросочетания Δ, поскольку она не висячая, не умаляя общности, в одну из вершин A_2, B_2, покрасим её в белый цвет, а вершину ей смежную — в чёрный. Тогда, поскольку эта чёрная вершина не висячая, из неё есть ещё ребро, помимо A_2B_2. И так далее: каждый раз переходим в какую-то вершину, если в ней ещё не были — красим её в белый цвет, идём в вершину, смежную ей по паросочетанию Δ, красим в чёрный цвет, и повторяем операцию. Если в этой вершине уже были — прерываем процесс.

Поскольку граф конечный, то в какой-то момент мы придём в вершину A, в которой уже были, и процесс прервётся. У A будет белый цвет, потому что мы выходим из чёрной вершины, и можем выйти из неё либо в белую (так как граф двудольный в нём нет циклов нечётной длины), либо в не покрашенную, то есть ту, в которой ещё не были. Мы получили цикл $\mathcal{C}$ чётной длины, в котором каждое второе ребро — ребро паросочетания Δ.

Построим полное паросочетание, отличное от исходного. Все рёбра паросочетания Δ, не вошедшие в этот цикл, оставим в новом, а вершины, вошедшие в цикл $\mathcal{C}$, поделим следующим образом: возьмём в паросочетание все рёбра цикла $\mathcal{C}$, кроме входивших в Δ. Получилось полное паросочетание, отличное от исходного. Противоречие. Следовательно, в графе (V, E) есть висячая вершина.

Докажем, что граф (V, E) стратифицированный по индукции по числу вершин $v = |V|$ (из существования полного паросочетания следует, что v всегда чётное).

База. $v = 2$. Очевидно.

Предположение. Утверждение для графа на $v = 2k$ вершинах верно.

Переход. $v = 2(k + 1)$. В соответствии с утверждением выше, в графе (V, E) есть висячее ребро. Любое висячее ребро автоматически входит в любое полное паросочетание. Таким образом, после удаления висячего ребра мы получаем граф (V^-, E^-) на $2k$ вершинах, в котором снова есть единственное паросочетание, и он, очевидно, двудолен. Поэтому, по предположению индукции, (V^-, E^-) стратифицированный. А если к стратифированному графу добавить висячее ребро, то полученный граф тоже стратифицированный. Следовательно, исходный граф (V, E) стратифицированный.

База доказана, переход доказан. Следовательно, утверждение доказано. □

Из того, что висячее ребро входит в любое полное паросочетание, несложно вывести, что в дереве или объединении деревьев не может быть более одного полного паросочетания; то есть, если полное паросочетание есть, то оно единственно. Откуда следует такое утверждение:

Следствие 2. Дерево или объединение деревьев стратифицировано тогда и только тогда, когда в нём есть полное паросочетание.

Часть 3: Классы эквивалентности графов

Определение 5. Будем говорить, что графы *эквивалентны*, если их можно получить друг из друга операциями «добавления» и «удаления» висячих рёбер.

Опишем, как устроены классы эквивалентности всех графов по этому отношению эквивадентности. Все неизоморфные базовые графы принадлежат разным классам эквивалентности: предположим противное — из базового графа G_1 можно получить базовый граф G_2. Тогда из Леммы 1 графы G_1, G_2 содержат индуцированные подграфы, изоморфные G_2, G_1 соответственно; что свидетельствует об изоморфизме самих этих графов. Противоречие. Следовательно, все неизоморфные базовые графы принадлежат разным классам эквивалентности.

При этом, в каждом классе эквивалентности есть базовый граф, так как из каждого класса эквивалентности можно взять произвольный граф, удалять из него висячие рёбра до тех пор, пока это возможно, и в итоге получить базовый граф, который будет принадлежать тому же классу эквивалентности.

Заметим, что точно так же, как и теорема 1, доказывается следующее утверждение:

Теорема 3. Если из графа можно получить базовый граф операциями «добавление» и «удаление» висячего ребра, то можно обойтись только «удалением».

Определение 6. Дан стратифицированный граф H, и дан произвольный граф G, не пересекающийся с H по вершинам. Назовём *стратифицированным объединением* G и H объединение этих графов, возможно, с добавлением некоторых рёбер между вершинами чётных уровней H и вершинами графа G.

Предложение 2. Из графа G_1 можно получить удалениями висячих вершин граф G_2 тогда и только тогда, когда G_1 есть результат стратифицированного объединения графа G_2 и некоторого стратифицированного графа H.

Доказательство. Очевидно, что из стратифицированного объединения G_2 и H можно получить, удаляя висячие рёбра, G_2.

Докажем обратный факт. Рассмотрим обратный процесс превращения графа G_2 в G_1 добавлениями висячих рёбер. Тогда на каждом этапе, индуцированный подграф, состоящий из новых вершин, будет, очевидно, стратифицированным. Также, в этом подграфе вершины, которые были при добавлении висячими, попадут в нечётные по счёту уровни, а, добавляемые с ними в паре, — в чётные, что понятно, если рассмотреть исходный процесс. При этом, вершины, добавляемые висячими, не могут соединяться с вершинами графа G_2, так как добавляются висячими. Поэтому с вершинами G_2 могут соединяться только вершины чётных уровней. □

Совмещая результаты Предложения 2 и Теоремы 3, получаем, что все классы эквивалентности задаются базовыми графами, а все графы в этом же классе получаются стратифицированным объединением графа, эквивалентного пустому множеству, и этого базового графа.

Фиксируем некоторый базовый граф G_0 с v вершинами и выберем целое число $k \geq v$, чётность которого совпадает с чётностью v. Мы хотим описать, пересечение класса эквивалентности, порождаемого G_0, с множеством всех графов на k вершинах. Для этого мы введём следующие графы:

• граф G^k_{min} — объединение G_0 и $\frac{k-v}{2}$ попарно не пересекающихся рёбер;

• определим граф G^k_{max} на k вершинах индуктивно: G^v_{max} совпадает с G_0, G^{i+2}_{max} получается из G^i_{max} добавлением вершины A, соединяемой со всеми вершинами, и добавлением вершины B, соединяемой только с вершиной A.

Предложение 3. а) Графы G^k_{max} и G^k_{min} являются, соответственно, максимальным и минимальным по включению в пересечении класса эквивалентности, порождённого G_0, с графами на k вершинах.
б) Более того, граф на k вершинах принадлежит данному классу эквивалентности тогда и только тогда, когда он является подграфом G^k_{max} и имеет в себе G^k_{min} как подграф.

Доказательство. Утверждение элементарно доказывается по индукции. □

Часть 4: Матрицы и ранги

Для начала введём понятие *ранга* матрицы и некоторых операций, с ним связанных. Более детально эти понятия рассматриваются, скажем, в [2], а ещё более детально, скажем, в [3].

Определение 7. *Ранг системы векторов* — размерность её линейной оболочки. *Ранг матрицы* — ранг системы её строк.

Пусть все элементы матрицы $\mathcal{M}$ принадлежат полю[2] $\mathbb{F}$. Из определения ранга следует, что следующие операции не меняют ранг матрицы, см. [2] :

- умножение одной из строк на ненулевой элемент поля $\mathbb{F}$;
- добавление/вычитание к/из одной из строк другой строки, умноженной на какой-то ненулевой элемент поля $\mathbb{F}$;
- перестановка строк.

Аналогичное утверждение для столбцов тоже верно, см. [3, Гл. 2, §3].

Рассмотрим квадратную матрицу $\mathcal{M}$ размера $n \times n$ с элементами из какого-то поля $\mathbb{F}$, у которой элементы на главной диагонали равны 0, и если какой-то элемент не равен (или равен 0), то симметричный ему относительно главной диагонали тоже не равен (или равен 0). Сопоставим такой матрице граф G: пронумеруем строки и столбцы от 1 до n по порядку. Каждым строке и столбцу мы будем сопоставлять вершину графа

[2]Определение смотрите, например в [3, Гл. 1, §3]

так, что строкам и столбцам с одинаковым номером сопоставляется одна и та же вершина. И, если какой-то элемент матрицы равен 0, то для вершин, соответствующих его строке и столбцу, ребра между ними нет, и оно проведено, иначе.

Ребро AB в графе G, сопоставляемого матрице $\mathcal{M}$ с элементами из поля $\mathbb{F}$, висячее, и вершина B висячая. Вершинам A, B сопоставляются столбцы/строки с номерами a, b. Мы можем добавить строку b, возможно, умноженную предварительно на какой-то элемент поля $\mathbb{F}$, к каждой строке, в которой элемент на пересечении со столбцом a не равен 0 так, чтобы он стал равен 0. Проведём аналогичные действия для столбцов с теми же номерами. Получили, что в строках и столбцах с номерами a, b по одному лишь ненулевому элементу: на пересечении строки a и столбца b, строки b и столбца a стоят не 0. Тогда после удаления этих столбцов ранг получившейся матрицы, очевидно, будет меньше на 2, чем у исходной.

Лемма 2. Если из графа G_1, сопоставляемого матрице $\mathcal{M}$, удалениями висячих рёбер можно получить несвязное множество вершин мощности k (если можно получить пустое множество, то $m = 0$), то ранг $\mathcal{M}$ равен $n - k$.

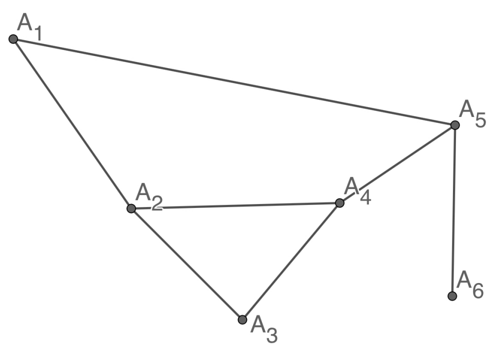
Доказательство. Поскольку из графа G_1 удалениями рёбер можно получить несвязное множество вершин мощности k, то, согласно предложению 3, граф G_1 есть стратифицированное объединение графа, состоящего из k несвязных вершин, и некоторого стратифицированного графа H на $n-k$ вершинах. Тогда все вершины графа H можно разбить на уровни $V_1, V_2, \ldots, V_{2r}, r \in \mathbb{N}$. Из графа H можно одновременно удалить $|V_2| = |V_1| = l_1$ висячих рёбер $\mathrm{A}_1 B_1, A_2 B_2 \ldots A_{l_1} B_{l_1}$ (B_i висячая для всех i от 1 до l_1). Этим вершинам соответствуют строки и столбцы с номерами $a_1, b_1, \ldots, a_{l_1}, b_{l_1}$. Тогда в строках и столбцах с номерами $b_1, b_2, \ldots, b_{l_1}$ по одному ненулевому элементу. Тогда для всех i от 1 до l_1 мы можем добавлять строку b_i, умноженную на какой-то элемент поля, ко всем тем строкам, у которых элемент на пересечении со стобцом a_i не равен 0 так, чтобы он стал равен 0. Аналогичные действия проведём для столбцов с теми же номерами. Теперь удалим строки и столбцы с номерами $a_1, b_1, \ldots, a_{l_1}, b_{l_1}$. Этой матрице соответствует граф G_1, которому удалили все l_1 висячих рёбер. Ранг этой матрицы уменьшился на $2l_1$. И так далее: на i-ом шаге из графа G_i, сопоставляемого текущей матрице, можно одновременно удалить $|V_{2i-1}| = |V_{2i}| = l_i$ висячих рёбер $\mathrm{A}_{i,1} B_{i,1}, A_{i,2} B_{i,2} \ldots A_{i,l_i} B_{i,l_i}$ (вершины $B_{i,j}$ для всех j от 1 до l_i — висячие). Этим вершинам соответствуют строки и столбцы с номерами $a_{i,1}, b_{i,1}, a_{i,2}, b_{i,2} \ldots a_{i,l_i}, b_{i,l_i}$. Тогда в строках и столбцах с номерами $b_{i,1}, b_{i,2} \ldots b_{i,l_i}$ по одному ненулевому элементу. Тогда для всех j от 1 до l мы можем добавлять строку $b_{i,j}$, умноженную на какой-то элемент поля, ко всем тем строкам, у которых элемент на пересечении со стобцом $a_{i,j}$ не равен 0 так, чтобы он стал равен 0. Аналогичные действия проведём для столбцов с теми же номерами. Удалим строки и столбцы с номерами $a_{i,1}, b_{i,1}, a_{i,2}, b_{i,2} \ldots a_{i,l_i}, b_{i,l_i}$. Полуенной матрице сопоставляется граф G_i, которому удалили все l_i висячих рёбер. Ранг этой матрицы уменьшился на $2l_i$

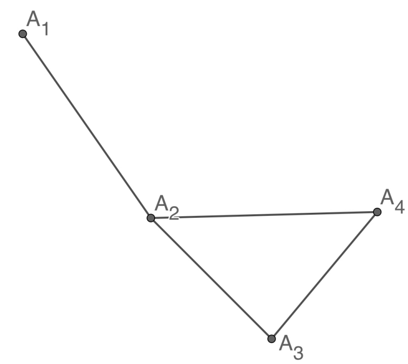
В итоге, за r шагов мы получим матрицу, которой соответствует граф, у всех вершин которого степени равны 0. В конечной матрице по k нулевых строк и столбцов. У неё ранг равен 0. Всего было удалено $\frac{n-k}{2}$ пар строк, то есть ранг суммарно уменьшился на $2\frac{n-k}{2} = n - k$. Следовательно, у исходной матрицы ранг равен $n - k$. □

Пример 1. Рассмотрим матрицу $\mathcal{M}_{6\times 6}$ с элементами из поля вещественных чисел.

$$\mathcal{M}_{6\times 6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ей соответствует первый из следующих графов.





Висячей является вершина A_6, она смежны с A_5. Добавим 6ую строку к 4й строке и, умноженную на -1, к 1й строке. Произведём аналогичные оперции для столбцов с теми же номерами. Из получившейся матрицы удалим строки и столбцы с номерами 5 и 6, и получим новую матрицу с рангом, уменьшенным на 2:

$$\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ей соответствует граф, которому удалили висячее ребро A_5A_6 (см. рисунок справа выше). В нём висячая вершина A_1, и ей смежна вершина A_2. В матрице $\mathcal{M}_1$ добавим первую строку к четвёртой и, домноженную на -1, к третьей. Произведём аналогичные оперции для столбцов с теми же номерами. Затем удалим строки и столбцы с номерами 1 и 2. Ранг получившейся матрицы $\mathcal{M}_2$ уменьшился ещё на 2.

Матрице $\mathcal{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ соответствует граф на двух вершинах, соединённых ребром.

Удалим из неё строки и столбцы с номерами 1 и 2, ранг уменьшится ещё на два, получилась пустая матрица. У неё нулевой ранг. Всего было три удаления, а значит ранг всего уменьшился на $3 * 2 = 6$, то есть у исходной матрицы ранг был равен 6.

Как известно, система линейных уравнений из n уравнений на n переменных имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ранг её матрицы коэффицентов равен n, доказательство смотрите в [3, Гл. 2, §3]

Матрица $\mathcal{M}$ квадратная, и её ранг совпадает с числом строк (и столбцов), поэтому у любой системы линейных уравнений, у которой матрица коэффицентов совпадает с $\mathcal{M}$, имеет единственное решение.

$$\begin{cases} x_2 - x_5 = a_1 \\ -x_1 - x_3 + x_4 = a_2 \\ x_2 + x_4 = a_3 \\ -x_2 - x_3 + x_5 = a_4 \\ x_1 - x_4 + x_6 = a_5 \\ -x_5 = a_6 \end{cases}$$

Благодарности

Автор очень благодарен Петухову А. В. в редакторской и научной правке при подготовке проекта, а также постановке вопроса.

Список литературы

[1] А. В. Петухов, М. В. Игнатьев — «Страты Андре и орбиты малых размерностей для максимальних нильпотентных подалгебр классических алгебр Ли» — дописывается.

[2] А. Б. Скопенков и др. — «Минимизация ранга восполнением матриц» — ЛКТГ 2022, https://www.turgor.ru/lktg/2022/3/index.html.

[3] Э. Б. Винберг — «Курс алгебры» — 5-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2021.