Теорема об исключении висячих рёбер

М. Ю. Пелишенко

25 ноября 2023 г.

Будем называть *висячей вершиной* графа вершину, имеющую степень 1; а *висячим ребром* графа — ребро, одна из вершин которого висячая.

Будем называть *исключением* висячего ребра AB из графа удаление обеих вершин A и B, а также всех рёбер, из вершин A и B идущих.

Теорема. Дана последовательнось графов $G_0, \ldots, G_n$, в которой G_n не имеет висячих рёбер, и один из любых соседних графов получается из другого исключением висячего ребра. Тогда существует последовательность графов, в которой первый граф — G_0, последний граф — изоморфный G_n, и каждый граф, кроме первого, получается из предыдущего исключением висячего ребра.

Лемма 1. Пусть для последовательности графов $G_0, \ldots, G_k, k \geq 1$ выполнены следующие условия:
• Граф G_0 не имеет висячих рёбер;
• Каждый граф, кроме последнего и предпоследнего, получается из следующего исключением висячего ребра. Последний граф получается из предпоследнего исключением висячего ребра.

Тогда существует другая последовательность графов, начинающаяся с G_0, кончающаяся графом, изоморфным G_k, в которой каждый граф, кроме последнего, получается из следующего исключением висячего ребра.

Доказательство леммы. Так как граф G_0 не имеет висячих рёбер, то G_0 получается исключением висячего ребра из G_1, а не наоборот, отсюда $k \neq 1$. Обозначим ребро, исключением которого из графа G_{k-1} получается G_k, через AB, где B — висячая вершина графа G_{k-1}. Обозначим через $V(G_0)$ множество вершин графа G_0. В следующих двух абзацах докажем, что существует такое целое m, $0 < m < k$, что граф G_{m-1} получается из G_m исключением ребра, содержащего вершину A и ещё одну вершину B', совпадающую с B при $B \notin V(G_0)$.

Если $B \in V(G_0)$. Из условия следует, что граф G_{k-1} содержит G_0. В графе G_{k-1} вершина B имеет не более одной смежной вершины из $V(G_0)$, так как B висячая в G_{k-1}. Но в графе G_0 каждая вершина либо имеет степень не меньше 2, либо является изолированной. Поэтому, B является изолированной в графе G_0. Тогда существует такое целое m, $0 < m < k$, что граф G_{m-1} получается из G_m исключением ребра, содержащего вершину A и ещё одну вершину B'.

Иначе $B \notin V(G_0)$. Тогда существует такое целое m, $0 < m < k$, что граф G_{m-1} получается из G_m исключением висячего ребра, содержащего вершину B и ещё одну

вершину D. Граф G_{k-1} содержит G_m, поэтому в G_{k-1} вершины B и D смежны, и B висячая и смежна с A. Отсюда $D = A$.

Предъявим требуемую последовательность: первые m графов в ней это $G_0, \ldots,$ G_{m-1}. Далее идут графы $G_{m+1}, \ldots, G_{k-1}$, из которых исключено ребро AB. Очевидно, в получившейся последовательности каждый граф, кроме последнего, получается из следующего исключением висячего ребра. Если $B \notin V(G_0)$, то последний граф в этой последовательности совпадает с графом G_k. Иначе, изоморфизм между этими графами может быть задан переименованием вершины B' в B. □

Доказательство теоремы. Будем строить последовательность, начинающуюся с графа G_0, в которой каждый следующий граф получается исключением висячего ребра, до тех пор, пока это возможно: если в графе, получаемом на i-ом шаге, есть хоть одно висячее ребро, то процесс продолжается, и останавливается, иначе. Поскольку граф G_0 конечный, процесс прервётся на некотором графе G', не имеющем висячих рёбер. Тогда существует последовательность графов, начинающаяся с G' и кончающаяся G_n, в которой для любых соседних графов в ней один получается из другого исключением висячего ребра. Из Леммы 1 по индукции следует, что существует последовательность графов, начинающаяся с G', кончающаяся графом, изоморфным G_n, в которой каждый граф, кроме последнего, получается из следующего исключением висячего ребра. Поэтому G_n содержит индуцированный подграф, изоморфный G'. Аналогично, G' содержит индуцированный подграф, изоморфный G_n. Поэтому графы G_n и G' изоморфны. Получили последовательность графов, начинающуюся с G_0 и завершающуюся графом, изоморфным G_n, в которой каждый граф, кроме первого, получается из предыдущего исключением висячего ребра. □

Благодарности

Автор очень благодарен Петухову А. В. в редакторской и научной правке при подготовке проекта и постановке вопроса, а также Скопенкову А. Б. и Мирошникову А. В. за консультации и внимание к работе.