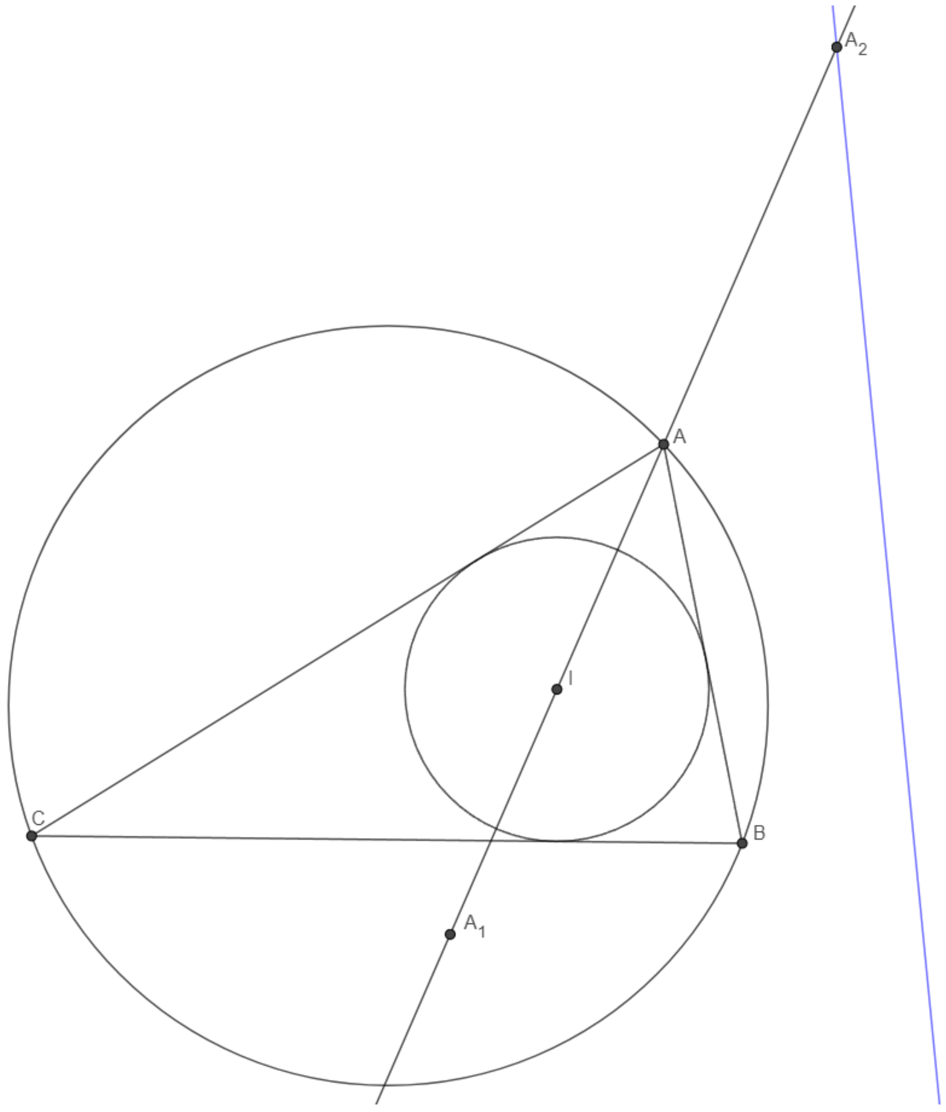
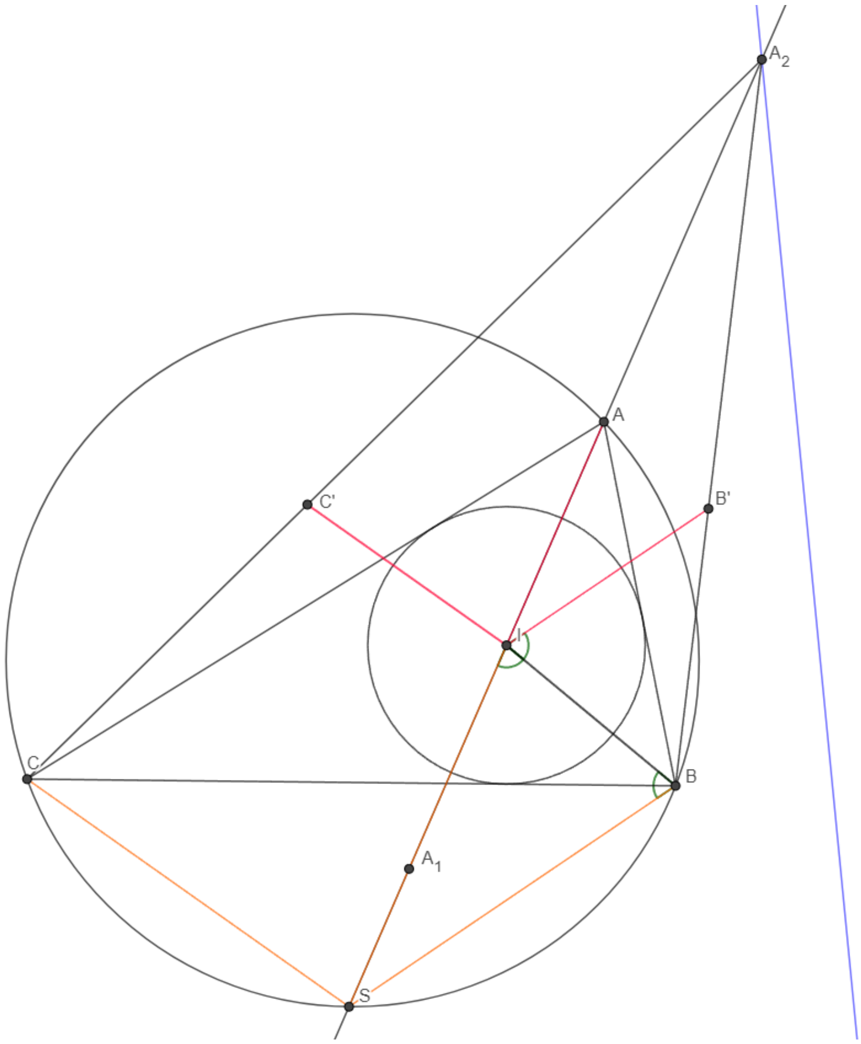
# Гипотеза

Дан треугольник $ABC$. Точка $A_1$ симметрична $A$ относительно центра $I$ вписанной окружности, точка $A_2$ изогонально сопряжена $A_1$ относительно $ABC$. Тогда $A_2$ лежит на радикальной оси описанной окружности $ABC$ и точки $I$.



## Доказательство




Пусть $B'$ и $C'$ — точки, симметричные $A_1$ относительно прямых $BI$, $I$. Из определения изогонального сопряжения следует, что эти точки лежат на прямых $BA_2$, $CA_2$, а из симметрии $IA = IA_1 = IB' = IC'$. Также отметим $S$ — пересечение биссектрисы угла А с описанной окружностью $ABC$. По лемме о трезубце $SI = SB = SC$.

Тогда (из равнобедренности $IBS$ и свойства симметрии) $\angle IBS = \angle BIS = \angle BIB'$, то есть $IB' \parallel SB$. Аналогичным образом можно доказать, что $IC' \parallel SC$. Следовательно $A_2$ — центр гомотетии, переводящей $IB'$ в $SB$, $IC'$ в $SC$. При этой гомотетии прямая $AI$ переходит в себя, а коэффициент равен $\frac{IB'}{SB} = \frac{IA}{SI}$. Тогда отрезок $IA$ перейдёт в отрезок $SI$.

Запишем отношение для гомотетии $I$ в $S$, $A$ в $I$: $A_2A : A_2I = A_2I : A_2S$, то есть $A_2I^2 = A_2A \cdot A_2S$. Степень точки $A_2$ относительно точки $I$ это $A_2I^2$, а относительно описанной окружности $ABC$ — $A_2A \cdot A_2S$. Так как степени точки равны, $A_2$ лежит на радикальной оси, ч. т. д.