МАТЕМАТИКА В ЗАДАЧАХ

Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду

Под редакцией А. А. Заславского, Д. А. Пермякова,
А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова

Москва
Издательство МЦНМО
2009

УДК 51
ББК 74.200.58:22.1
М34

Поддержано Департаментом образования г. Москвы в рамках программы «Одаренные дети»

Рецензент: А. К. Ковальджи

Математика в задачах. Сборник материалов выездных школ
М34 команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду / Под ред. А. А. Заславского, Д. А. Пермякова, А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова. — М.: МЦНМО, 2009. — 488 с.

ISBN 978-5-94057-477-4

В данный сборник вошли материалы выездных школ по подготовке команды Москвы на Всероссийскую олимпиаду. Материалы сборника могут использоваться как школьниками для самостоятельных занятий, так и преподавателями. В большинстве материалов сборника приведены дававшиеся на занятиях задачи, а также решения или указания к ключевым задачам.

ББК 74.200.58:22.1

Рисунки Е. С. Горской

ISBN 978-5-94057-477-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакторов

В данный сборник вошли материалы выездных школ по подготовке команды Москвы на Всероссийскую олимпиаду. Подробнее об этих школах, их программах, их преподавателях (многие из которых являются авторами сборника) и т. д. написано в приложении. Материалы сборника могут использоваться как школьниками для самостоятельных занятий, так и преподавателями. В большинстве материалов сборника приведены дававшиеся на занятиях задачи [1], а также решения или указания к ключевым задачам. Обычно ключевые задачи самостоятельно решаются некоторыми школьниками и после этого разбираются, а остальные задачи сдаются школьниками как на занятии, так и после него.

Материалы разделены на три части: «Алгебра», «Геометрия», «Комбинаторика», а внутри каждой части на разделы. В скобках после названия каждого раздела указано, для каких классов он рекомендуется. Эта рекомендация примерно соответствует тому, каким участникам этот раздел предлагался на Школе. Конечно, эта рекомендация весьма условна.

Достоинство данного сборника в том, что почти все разделы независимы друг от друга. Если в одном разделе используются только определение из другого, то эти разделы не считаются зависимыми — все такие определения общеприняты. Схема зависимости разделов приведена в начале каждой главы (или в начале раздела написано, на какие другие разделы он опирается). Это дает большую свободу руководителю кружка при подготовке занятий, но одновременно требует его высокой квалификации.

Для решения задач достаточно понимания их условий. Все определения, не входящие в школьную программу, приводятся в той же главе, где используются (но не всегда в том же разделе). Иногда могут оказаться полезными другие задачи того же раздела или разделов, от которых «зависит» данный. Никакие другие знания и теории не нужны. Если условие задачи является формулировкой утверждения, то подразумевается, что это утверждение надо доказать.

---

[1] По некоторым темам занятия проводились неоднократно на различных школах, причем иногда разными преподавателями. В сборнике соответствующие материалы объединены.

Некоторые материалы сборника отражают опыт преподавания не только на Школах, но также в СУНЦ МГУ и на кружке «Олимпиады и математика» в МЦНМО. Многие материалы использовались для дистанционного обучения математике [2]. В таких материалах присутствуют контрольные вопросы с выбором ответов (предназначенные для быстрой оценки готовности школьника к решению данного цикла задач; такие задания не используются на школах) и перечисление номеров задач, являющихся зачетными по данной теме при дистанционном обучении.

Сборник предваряют заметки об общих принципах преподавания, адресованные прежде всего преподавателям. Возможно, заметки окажутся полезными и школьникам.

Мы благодарим проректора МИОО директора МЦНМО И. В. Ященко за идею создания Школ и книги, а также за организацию материальной основы. Мы благодарим авторов настоящего сборника за серьезную работу над материалами (эти материалы существенно доработаны по сравнению с тем, что предлагалось на занятиях). Мы благодарим участников школ, поскольку эти материалы создавались для них (более того, иногда участники помогали совершенствовать материалы), благодарим А. К. Ковальджи за общее рецензирование книги (после рецензирования нами отдельных материалов), М. Г. Быкову за техническое редактирование текста и Е. С. Горскую за подготовку рисунков.

Редакторы сборника частично поддержаны грантами РФФИ 06-01-72551-НЦНИЛа и 07-01-00648-а, НШ-4578.2006.1, РНП 2.1.1.7988, ИНТАС 06-1000014-6277.

Олимпиады и математика [3]

А. Б. Скопенков

> To him a thinking man's job was not to deny one reality at the expense of the other, but to include and to connect.
>
> *U. K. Le Guin.* The Dispossessed [4]

Перед учителями и руководителями кружков, занимающимися с сильными школьниками, встает вопрос: как подготовить школьников к олимпиадам или к «серьезной» математике? Некоторые думают, что

---

[2] `http://math.olymp.mioo.ru`.

[3] Это обновленный вариант введения к статье из Мат. просвещения. 2006. № 10. С. 57–63. Обновляемый текст: http://www.mccme.ru/circles/oim/oimphil.pdf.

[4] Для него работой мыслителя было не отрицание одной реальности за счет другой, а взаимовключение и взаимосвязь. *У. К. Ле Гуин.* Обделенные. — *Пер. автора.*

для первого надо прорешивать задачи последних олимпиад, для второго надо читать научную литературу, и что ввиду принципиальной разницы первого и второго бессмысленно пытаться достичь и того, и другого. Автор этой заметки придерживается распространенного мнения о том, что эти подходы недостаточно эффективны и приводят к вредным «побочным эффектам»: школьники либо чрезмерно увлекаются *спортивным* элементом в решении задач, либо изучают *язык* высшей математики вместо ее содержания.

Мне кажется, что основу математического образования сильного ученика должно составлять *решение и обсуждение задач, в процессе работы над которыми он знакомится с важными математическими идеями и теориями.* Это одновременно подготовит школьника и к математической науке, и к олимпиадам и не нанесет вреда его развитию в целом. Это будет более эффективно и для достижения успеха только в олимпиадах или только в науке (если не учитывать большого количества других факторов кроме разумной организации занятий).

Как и при естественном развитии самой математики, каждая следующая задача должна быть мотивирована либо практикой, либо уже решенными задачами (см. подробнее [4]). Поэтому ученик, занимающийся «мотивированной для него» математикой (обычно более элементарной, но содержательной и потому сложной) вместо «немотивированной для него» математики (обычно менее элементарной, но языковой и потому тривиальной), имеет преимущество в дальнейшей учебе и научной работе. А. Н. Колмогоров говорил, что до тридцати лет математику разумнее всего заниматься решением конкретно поставленных задач. А значит, умение решать сложные задачи является одним из важнейших для молодого математика.

Олимпиадных задач очень много, большинство из них интересны школьнику, и среди них много математически содержательных. Такие задачи могут составить основу изучаемого материала. Однако решение олимпиадных задач без изучения математических идей и теорий недостаточно эффективно даже для «чистой» подготовки к олимпиадам (на долгих — год и более — промежутках времени, как и вообще решение сиюминутных задач без фундаментального развития). Кроме того, большинству людей легче достичь успеха на олимпиадах в том случае, когда они не считают успех главной целью. Сложную задачу легче решить, если спокойно думать о самой задаче, а не о награде, которая последует за ее решением. Поэтому школьник, имеющий более высокую цель, чем успех на олимпиаде, имеет на этой олимпиаде психологическое преимущество.

Как удачно подобрать задачи для обучения учеников? Этот вопрос учителя́ задавали себе последние десять тысяч лет [1, предисловие],

[2], [3, с. 26–33], [5, предисловие]. Очередным примером являются материалы настоящего сборника.

[1] *Генкин С. А.*, *Итенберг И. В.*, *Фомин Д. В.* Ленинградские математические кружки. Киров, 1994.

[2] *Судзуки Д.* Основы дзен-буддизма. Наука дзен — ум дзен. Киев, 1992.

[3] *Платон.* Федон // Федон, Пир, Федр, Парменид. М.: Мысль, 1999.

[4] *Скопенков А. Б.* Философско-методическое отступление, наст. сборник.

[5] *Шклярский Д. О.*, *Ченцов Н. Н.*, *Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. М.: Физматлит, 2001.

Философско-методическое отступление [5)]

А. Б. Скопенков

> Круг мог, нацелясь в стаю самых признанных и возвышенных человеческих мыслей, вмиг ссадить ворону в павлиньих перьях.
>
> *В. Набоков.* Под знаком незаконнорожденных

По моему мнению, именно с *новых идей*, а не с *немотивированных определений*, полезно *начинать* изучение любой теории [6)].

«Мы стараемся свести к минимуму число понятий, откладывая определения до момента, когда они напрашиваются сами собой, и избегая задач на понимание и применение формальных определений (типа „ является ли множество целых чисел группой по сложению?“)» [5].

«При изложении материала нужно ориентироваться на объекты, которые основательнее всего укореняются в человеческой памяти. Это — отнюдь не системы аксиом и не логические приемы в доказательстве теорем. Изящное решение красивой задачи, формулировка которой ясна и доступна, имеет больше шансов удержаться в памяти студента, нежели абстрактная теория. Скажем больше: именно по такому реше-

[5)] Это часть исходной версии заметки [3], не включенная в опубликованную версию. Обновляемый текст: `http://www.mccme.ru/circles/oim/oimphil.pdf` и `http://arxiv.org/abs/0804.4357`.

[6)] Такие идеи наиболее ярко выражаются доказательствами, подобными приведенным в [3].

нию, при наличии некоторой математической культуры, студент впоследствии сможет восстановить теоретический материал. Обратное же, как показывает опыт, практически невозможно» [2, предисловие].

Известно также, что «путь познания должен повторять путь развития» [7].

По моему мнению, такой стиль изложения не только делает материал более доступным, но позволяет сильным студентам (для которых доступно даже абстрактное изложение) приобрести математический вкус и стиль с тем, чтобы, во-первых, разумно выбирать проблемы для исследования и их мотивировки. (Математик, понимающий, что теория Галуа мотивируется более важными проблемами, чем построимость правильных многоугольников и разрешимость алгебраических уравнений в радикалах, вряд ли станет мотивировать созданную им теорию приложениями, которые можно получить и без его теории.)

Во-вторых, это позволит ясно излагать собственные открытия, не скрывая ошибки или известности полученного результата за чрезмерным формализмом. (К сожалению, такое — обычно бессознательное — сокрытие ошибки часто происходит с молодыми математиками, воспитанными на чрезмерно формальных курсах. Происходило это и с автором этих строк; к счастью, все мои серьезные ошибки исправлялись *перед* публикациями.)

Мода на искусственно формализованное изложение [8] привела к следующему парадоксу. По данному *известному понятию* высшей математики зачастую непросто (и это требует высокой научной квалификации) выбрать *конкретный красивый результат*, для которого это понятие действительно необходимо (и при получении которого это понятие обычно и возникло).

---

[7] «Впрочем, это не вполне верно. Так, изучение геометрии Лобачевского вовсе не обязательно начинать с попыток доказать пятый постулат Евклида. Геометрия Лобачевского для нас сейчас важна, в первую очередь, ее приложениями в ТФКП, теории чисел, топологии, теории групп, алгебраической геометрии, космологии и т. д., а вовсе не тем, что она демонстрирует независимость пятого постулата от остальных аксиом Евклида. С этой точки зрения более плодотворно ее построение не на основе аксиом Евклида—Гильберта, а на основе понятия группы преобразований (Клейн) или римановой метрики (Риман). Аналогично изучение теории Галуа вовсе не обязательно начинать с задачи о решении алгебраического уравнения в радикалах или квадратных радикалах. С современной точки зрения теория Галуа есть теория алгебраических расширений полей, составляющая неотъемлемую часть алгебры и имеющая приложения и аналоги в других разделах математики (алгебраическая геометрия, теория накрытий, теория инвариантов), а решение алгебраических уравнений в радикалах — это маргинальная задача» (*Э. Б. Винберг*).

[8] Видимо, общепринятый термин «бурбакизация» не очень удачен ввиду *«масштаба и влияния деятельности Бурбаки, независимо от оценки пользы и вреда разных ее аспектов»* (*А. Шень*).

Доказательство с использованием некоторого нового термина имеет свои преимущества: оно подготавливает читателя к доказательству тех теорем, которые уже трудно или невозможно доказать без этого термина [9]. Однако такие доказательства, как правило, не должны быть *первыми* доказательствами данного результата (легко себе представить результат *первого* знакомства с теоремой Пифагора на основе понятий векторного пространства и скалярного умножения). Кроме того, при приведении «терминологического» доказательства полезно четко оговорить его мотивированность не доказываемым результатом, а обучением полезному новому методу.

Приведенная выше точка зрения разделяется многими математиками (а некоторыми — нет); я унаследовал ее от Ю. П. Соловьева.

Например, приводимые порой в качестве *основных* приложений теории Галуа доказательство теоремы Гаусса о правильных многоугольниках и другие результаты о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах неубедительны для мотивировки этой теории (как и приложение к решению квадратных уравнений неубедительно для мотивировки общей теории разрешимости уравнений произвольной степени в радикалах) [10]. Действительно, теорема Гаусса имеет элементарное доказательство, не использующее групп Галуа [3]. Теорема Руффини—Абеля о неразрешимости в радикалах *общего* алгебраического уравнения степени 5 и выше (как и достаточность условия Кронекера неразрешимости в радикалах *конкретного* уравнения простой степени) также имеет алгебраическое доказательство, не использующее групп Галуа [2], [4] (и *топологическое* доказательство [1]). В терминах теории Галуа формулируется общий критерий разрешимости *конкретного* алгебраического уравнения в радикалах, но этот критерий не дает настоящего решения проблемы разрешимости, а лишь сводит ее к трудной задаче вычисления группы Галуа уравнения. (То, что никакая *другая теория* не дает легкого для применения ответа, не позволяет утверждать, что *теория Галуа* дает такой ответ.) Но, конечно, формулировка общего критерия в адекватных проблеме терминах может иметь важное философское значение.

[9] «Например, векторное доказательство теоремы Пифагора уже является достаточным основанием для введения понятий векторного пространства и скалярного умножения, хотя эти понятия и не являются необходимыми для доказательства упомянутой теоремы» (*Э. Б. Винберг*).

[10] Возможно, *именно поэтому* работы Галуа были забыты на 20 лет после их выхода — пока не появились важные задачи, в первую очередь о разрешимости дифференциальных уравнений в квадратурах, при решении которых уже трудно обойтись без теории Галуа — ведь математика XIX века была гораздо ближе к естествознанию, чем современная. Конечно, приведенная гипотеза нуждается в серьезной проверке.

Популяризации теории Галуа послужит дальнейшая публикация интересных теорем, формулируемых без ее понятий, но при попытках доказать которые она естественно возникает. Примеры таких теорем мне сообщили А. Я. Канель-Белов, С. М. Львовский и Г. Р. Челноков (к сожалению, в доступной мне учебной литературе по теории Галуа мне не удалось найти такие теоремы, формулировка которых не была бы скрыта под толщей обозначений и терминов).

[1] *Алексеев В. Б.* Теорема Абеля в вопросах и задачах. М.: Наука, 1976.

[2] *Колосов В. А.* Теоремы и задачи алгебры, теории чисел и комбинаторики. М.: Гелиос, 2001.

[3] *Козлов П. В.*, *Скопенков А. Б.* В поисках утраченной алгебры: в направлении Гаусса (подборка задач) // Мат. просвещение. 2008. № 12. С. 127–143. `http://arxiv.org/abs/0804.4357`

[4] *Прасолов В. В.* Многочлены. М.: МЦНМО, 1999, 2001, 2003.

[5] Задачи по математике / Под ред. А. Шеня. М.: МЦНМО, 2000.

Напутствие

А. Я. Канель-Белов

Для успешного решения задач математических олимпиад высшего уровня необходимы в первую очередь общеукрепляющие средства: хорошая проработка алгебры (культура алгебраических преобразований), проработка школьной геометрии. Задачи этих олимпиад (кроме первых задач) практически всегда используют смешанный сценарий решения; редки задачи на применение некоторого метода или идеи в чистом виде. Решению таких «смешанных» задач должна предшествовать работа с ключевыми задачами, в которых идеи работают в чистом виде. Этому и посвящен настоящий сборник. См. также А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи «Как решают нестандартные задачи», С. Генкин, И. Итенберг, Д. Фомин «Ленинградские математические кружки».

ГЛАВА 1

МИНИКУРС ПО АЛГЕБРЕ [1)]

А. Б. Скопенков

Сегодня основная масса учащихся решает алгебраические задачи относительно плохо. Это связано с ухудшением качества школьного образования при сохранении кружкового. Для успешного решения олимпиадных задач алгебраического и теоретико-числового типа всячески рекомендуем нарабатывать культуру арифметических выкладок. (*А. Я. Канель-Белов.*)

Деление многочленов с остатком (8–9)

1. а) Вычислите значение функций

$$P(x)=2x^3-27x^2+141x-256 \ \text{ при } x=16$$

и

$$Q(x)=x^4+\frac{x^3}{4}-\frac{x^2}{2}+1 \ \text{ при } x=-\frac{3}{4}.$$

Указание:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=\\ =(\ldots((a_nx+a_{n-1})x+a_{n-2})x+\ldots+a_1)x+a_0.$$

Этот способ вычисления значения многочлена в точке называется *схемой Горнера.*

б) Сколько операций сложения и умножения нужно для вычисления значения функции $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ «напрямую»? А сколько — по схеме Горнера?

Многочленом (в алгебраическом смысле, с вещественными коэффициентами) называется бесконечный упорядоченный набор $(a_0,\ldots,a_n,\ldots)$

[1)] Отдельные разделы написаны А. Я. Канель-Беловым и И. Н. Шнурниковым. Контрольные вопросы составлены М. Б. Скопенковым. Некоторые решения написаны М. В. Прасоловым и М. Б. Скопенковым.

вещественных чисел, среди которых лишь конечное количество отличны от нуля. Поставим в соответствие многочлену (т. е. набору) $P = (a_0, \ldots, a_n, \ldots)$ функцию $\overline{P}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданную формулой $\overline{P}(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$ (эта сумма конечна). Поэтому многочлен $P = (a_0, \ldots, a_n, \ldots)$ обычно записывают в виде $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, т. е. так же, как $\overline{P}$. Однако будем различать P и $\overline{P}$ — пока не доказано, что это «одно и то же» (4 б)) или в тех обобщениях, где это не «одно и то же» (4 в)). *Корнем* многочлена $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ называется такое число x_0, что $a_0 + a_1x_0 + \ldots + a_nx_0^n = 0$.

2. Дайте определения степени, суммы и произведения многочленов.

3. Пусть P — многочлен и a — число.

а) **Теорема Безу.** Существует такой многочлен Q, что $P = (x - a)Q + P(a)$. (Иными словами, многочлен $P - P(a)$ делится на $x - a$.) Более того, можно считать, что $\deg Q < \deg P$. Здесь $\deg P$ — *степень многочлена* P, т. е. наибольшее такое число n, что коэффициент a_n ненулевой.

б) **Следствие.** Если $P(a) = 0$, то существует такой многочлен Q, что $P = (x - a)Q$.

4. а) Многочлен степени $n > 0$ имеет не более n корней.

б) Если значения двух многочленов в любой точке совпадают, то эти многочлены равны. (Иными словами, если P, P_1 — многочлены и $P(x) = P_1(x)$ для любого x, то $P = P_1$).

в)* Утверждение б) неверно для *многочленов над* $\mathbb{Z}_p$ (определите сами, что это такое).

г) Если значения двух многочленов степени n совпадают в $n + 1$ различной точке, то эти многочлены равны.

д) Докажите тождество:

$$\frac{d(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{a(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b(x-d)(x-c)(x-a)}{(b-d)(b-c)(b-a)} + \frac{c(x-d)(x-b)(x-a)}{(c-d)(c-b)(c-a)} = x.$$

5. Пусть P — многочлен. Если $a_1, \ldots, a_k$ — различные числа, для которых $P(a_i) = 0$, то P делится на $(x - a_1) \ldots (x - a_k)$.

6. а) Сформулируйте и докажите теорему о делении с остатком для многочленов с вещественными коэффициентами.

б) Верна ли теорема о делении с остатком для многочленов с рациональными коэффициентами?

в) А с целыми коэффициентами?

г) Сформулируйте и докажите теорему о делении с остатком для многочленов с целыми коэффициентами, если старший коэффициент делителя равен единице.

Зачетные задачи: 1 б); 2; 3 а), б); 4 а), б), г), д); 5; 6 а)–г). Из них письменно: 3 а); 6 в).

Контрольные вопросы

I. Многочлен $f(x)$ дает остаток 1 при делении на $x-1$ и остаток -1 при делении на $x+1$. Какой остаток дает $f(x)$ при делении на x^2-1?

а) 1; б) -1; в) x; г) $-x$.

II. При каких значениях a многочлен $x^{1000}+ax+9$ делится на $x+1$?

а) Ни при каких;
б) при $a=10$;
в) при $a=-10$;
г) при $a=10$ или $a=-10$;
д) при любых.

III. Какие из следующих утверждений являются верными?

а) Степень суммы двух многочленов равна максимуму из степеней этих многочленов.

б) Степень произведения двух ненулевых многочленов равна сумме их степеней.

в) Степень остатка при делении многочлена P на многочлен Q меньше степени самого многочлена P.

г) Степень остатка при делении многочлена P на многочлен Q меньше степени многочлена Q.

Указания и решения

3. а) *Указание.* Докажите сначала для $P=x^n$. Докажите, что если утверждение верно для P и Q, то верно и для bP и $P+Q$ (для любого числа b).

4. а) Докажем это утверждение индукцией по степени n многочлена P. При $n=0$ утверждение верно: ненулевой постоянный многочлен не имеет корней. Предположим, что *любой ненулевой многочлен Q степени k меньше n имеет менее k корней.* Рассмотрим произвольный ненулевой многочлен степени n. Предположим, что он имеет хотя бы $n+1$ корень. Обозначим эти различные корни через $a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n$.

По следствию из теоремы Безу (задача 3 б)) $P=(x-a_0)Q$, где Q — некоторый многочлен *степени меньше n* (это свойство многочлена Q, иногда пропускаемое при доказательстве, существенно!). Подставляя в данное равенство $x=a_1$, получим $0=(a_1-a_0)Q(a_1)$. Значит,

$Q(a_1) = 0$, т. е. a_1 — корень многочлена Q. Аналогично все числа $a_2, a_3, \ldots, a_n$ — корни многочлена Q *степени меньше* n. Это противоречит нашему предположению. Полученное противоречие доказывает индукционный переход, а следовательно, и утверждение задачи.

Рациональные и иррациональные числа (8–10)

1. Числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ не могут быть членами одной арифметической прогрессии (ни в каком порядке; даже не подряд идущими членами).

Число называется *рациональным*, если его можно представить как отношение целых чисел, и *иррациональным* в противном случае.

2. Рациональны ли числа:

а) $\sqrt{2}$;

б) $\sqrt[7]{1+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + 2\sqrt{6}$;

г) $\sqrt[n]{k}$, где целое $k \geqslant 2$ не является n-й степенью целого числа;

д) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$;

е) $\cos 60^\circ$;

ж) $\sin 60^\circ$;

з) $\cos 20^\circ$;

и) $\sin 10^\circ$?

Указание к з). Выразите $\cos 3\alpha$ через $\cos\alpha$. Если для несократимой дроби p/q выполнено $4(p/q)^3 - 3(p/q) = -1/2$, т. е. $8p^3 - 6pq^2 + q^3 = 0$, то 1 делится на p и 8 делится на q.

3. а) **Теорема о целых корнях.** Пусть

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

с целыми $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ и $f(p) = 0$ для целого p. Тогда a_0 делится на p.

б) **Теорема о рациональных корнях.** Пусть

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

с целыми $a_n, \ldots, a_1, a_0$ и $f(p/q) = 0$ для несократимой дроби p/q. Тогда a_0 делится на p и a_n делится на q.

в) В условиях б) для любого целого k число $f(k)$ делится на $p - kq$.

4. а) На клетчатой бумаге нельзя выбрать три узла, являющиеся вершинами правильного треугольника.

б)* Какие правильные многоугольники можно нарисовать на клетчатой бумаге с вершинами в узлах?

в)* При каких целых n число $\cos n^\circ$ рационально?

Не изучавшие тригонометрических функций могут игнорировать задачи 2 е)–и) *и* 4 а)–в).

Зачетные задачи: 1; 2 б), г)–и); 3 а), б); 4 а), в). Из них письменно: 3 а), 4 а).

Контрольные вопросы

I. Какие из следующих чисел являются рациональными?

а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$;

б) $\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}}$;

в) $\sqrt{6+2\sqrt{7}}-\sqrt{3+\sqrt{2}}-\sqrt{3-\sqrt{2}}$.

II. Какие из следующих утверждений являются верными?

а) Сумма рациональных чисел всегда рациональна.

б) Сумма иррациональных чисел всегда иррациональна.

в) Корень из иррационального числа всегда иррационален.

III. Бумага «в треугольничек» получается так: на плоскости через равные промежутки проводятся прямые, параллельные двум сторонам фиксированного правильного треугольника, а затем через все точки пересечения проводят прямые, параллельные третье стороне. На листе бумаги в треугольничек можно выбрать 4 узла, являющиеся вершинами (выберите все возможные фигуры)

а) прямоугольника; б) ромба; в) квадрата.

Указания и решения

2. *Ответы*: а) нет; б) да.

а) Приведем доказательство того, что число $\sqrt{2}$ иррационально (известное еще древним грекам). Предположим обратное: пусть $\sqrt{2}=p/q$, где p/q — несократимая дробь. Возведем данное равенство в квадрат и домножим обе части на q^2. Получим: $2q^2=p^2$. Так как числа p и q целые, то из полученного равенства заключаем, что число p четное. Значит, $p=2r$, где r — некоторое целое число. Подставляя это выражение в наше равенство, получим $2q^2=(2r)^2$. Сокращая на 2, имеем $q^2=2r^2$. Так как q и r — целые числа, то число q четное. В итоге мы получили, что оба числа p и q четные. Это противоречит нашему предположению, что дробь p/q несократима. Полученное противоречие доказывает, что $\sqrt{2}$ — иррациональное число.

в) Преобразуем данное выражение:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+2\sqrt{6}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}+2\sqrt{6}=\frac{5+2\sqrt{6}}{-1}+2\sqrt{6}=-5.$$

Число -5, очевидно, рациональное.

Решение уравнений 3-й и 4-й степени (9–10)

1. а) Уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=0$ сводится к уравнению $x^3+px+q=0$.

б) Уравнение $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ сводится к уравнению $x^4+px^2+qx+r=0$.

в) Найдите координаты центра симметрии графика функции $y=-2x^3-6x^2+4$.

г) График любого кубического многочлена имеет центр симметрии.

2. Метод дель Ферро. а) Найдите хотя бы один корень уравнения $x^3-3\sqrt[3]{2}x+3=0$.

Указание. Так как $(b+c)^3=b^3+c^3+3bc(b+c)$, то число $b+c$ является корнем уравнения $x^3-3bcx-(b^3+c^3)=0$.

б) Решите уравнение $x^3-3\sqrt[3]{2}x+3=0$.

Указание. Поделите $x^3-3bcx-(b^3+c^3)$ на $x-b-c$.

3. а) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$. Иными словами, $x^3-b^3-c^3-3bcx=(x-b-c)(x^2+b^2+c^2+bx+cx-bc)$.

б) $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$. Когда достигается равенство?

в) $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$ при $a,b,c>0$.

г)* $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$.

4. а) Решите уравнение $x^3+3x-4=0$.

б) Докажите, что $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1$.

в) Напишите общую формулу для решения уравнения $x^3+px+q=0$ методом дель Ферро. При каком условии применим этот метод (если корни разрешается извлекать только из положительных чисел)?

5. Метод Феррари. а) Решите уравнение $(x^2+2)^2=18(x-1)^2$.

б) Решите уравнение $x^4+4x-1=0$.

Указание. Подберите такие α,b,c, чтобы $x^4+4x-1=(x^2+\alpha)^2-(bx+c)^2$. Для этого найдите хотя бы одно α, для которого квадратный трехчлен $(x^2+\alpha)^2-(x^4+4x-1)$ является полным квадратом.

в) Решите уравнение $x^4-10x^2-8x+5=0$.

г) Для любых p,q,r кубическое уравнение $4(2\alpha-p)(\alpha^2-r)-q^2=0$ имеет решение.

д) Найдите алгоритм решения уравнения $x^4+px^2+qx+r=0$ методом Феррари. При каком условии применим этот метод (если корни разрешается извлекать только из положительных чисел и разрешается решать любые кубические уравнения)?

6. Метод Виета. а) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ и $\sin(\alpha+\beta)=$ $=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

б) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ и $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

в) Решите уравнение $4x^3-3x=\frac{1}{2}$.

г) Решите уравнение $x^3-3x-1=0$.

д) Используя функции cos и arccos, напишите общую формулу для решения уравнения $x^3+px+q=0$ методом Виета. При каком условии уравнение $x^3+px+q=0$ решается методом Виета?

7*. Решите уравнение $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, подобрав такие α, A, B, что

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=\left(x^2+\frac{ax}{2}+\alpha\right)^2-(Ax+B)^2.$$

Зачетные задачи: 1 а), г; 3 а), б); 4 б), в); 5 а)–г); 6 б)–д).

Контрольные вопросы

I. Какое из указанных чисел является корнем уравнения x^3-6x+6?
а) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{8\sqrt{2}-6})$; б) $-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$; в) $\sin 10^\circ$.

II. Какое из указанных чисел является корнем уравнения x^4+2x^2- $-8x-4=0$?
а) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{8\sqrt{2}-6})$; б) $-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$; в) $\sin 10^\circ$.

III. Какое из указанных чисел является корнем уравнения $4x^3-$ $-3x+\frac{1}{2}=0$?
а) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{8\sqrt{2}-6})$; б) $-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$; в) $\sin 10^\circ$.

Указания и решения

1. а) *Указание*. Воспользуйтесь линейной заменой переменной.

2. а) *Ответ*: $x=-1-\sqrt[3]{2}$.
Указание. $x^3-3\sqrt[3]{2}x+3=x^3-3bcx+(b^3+c^3)$, где $b=1$, $c=\sqrt[3]{2}$.
б) *Ответ*: $x=-1-\sqrt[3]{2}$.

В силу задачи 3а уравнение $x^3-3\sqrt[3]{2}x+3=0$ равносильно уравнению $(x+b+c)(x^2+b^2+c^2-bc-bx-cx)=0$ с вышеуказанными b и c. По задаче 3 б) второй сомножитель в левой части положителен при любом x (поскольку $b\neq c$). Значит, исходное уравнение имеет единственное решение $x=-b-c=-1-\sqrt[3]{2}$.

5. *Ответы*:

а) $(-3\sqrt{2}\pm\sqrt{10+12\sqrt{2}})/2$;

б) $(-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2})/2$;

в) $-1\pm\sqrt{2}$, $-1\pm\sqrt{6}$.

6. г) *Указание*. Сведите к предыдущему заменой $y=kx$.

Ответы: в) $\cos\frac{\pi}{9}$, $\cos\frac{7\pi}{9}$, $\cos\frac{13\pi}{9}=\cos\frac{5\pi}{9}$;

г) $2\cos\frac{\pi}{9}$, $2\cos\frac{7\pi}{9}$, $2\cos\frac{13\pi}{9}=2\cos\frac{5\pi}{9}$.

Применения комплексных чисел (10–11)

Комплексным числом называется пара (a,b) вещественных чисел. Она записывается в виде $a+bi$. Сумма комплексных чисел определяется формулой $(a+bi)+(a'+b'i)=(a+a')+(b+b')i$, а произведение — формулой $(a+bi)(a'+b'i)=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$.

Другие начальные сведения о комплексных числах можно найти, например, в учебнике Н. Я. Виленкина и др. «Алгебра и математический анализ», 11 класс.

1. а) Для любого комплексного числа z существуют такие вещественные $r\geqslant 0$ и φ, что $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Единственны ли r и φ?

б) $(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\psi+i\sin\psi)=\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)$.

в) Для каждого целого $n>0$ решите уравнение $z^n=1$ в комплексных числах z.

2. Разложите на квадратные трехчлены и линейные двучлены с *вещественными* коэффициентами:

а) x^4+4; б) $x^4+x^3+x^2+x+1$; в) x^n-1.

3. Определение многочлена см. выше в теме «Деление многочленов с остатком».

а)* Основная теорема алгебры. Непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами всегда имеет комплексный корень. Примечание: эту задачу можно, не доказывая, использовать в других.

б) Многочлен с комплексными коэффициентами степени n (т. е. такой, что $a_n\neq 0$) имеет ровно n корней с учетом кратности. (Корень z_0 многочлена P *имеет кратность* k, если P делится на $(z-z_0)^k$ и не делится на $(z-z_0)^{k+1}$.)

в) Если $z_1,\ldots,z_n$ — корни многочлена P со старшим коэффициентом a_n, причем каждый корень выписан столько раз, какова его кратность, то $P(z)=a_n(z-z_1)\ldots(z-z_n)$.

4. Обозначим $\overline{a+bi}:=a-bi$.

а) Для любого многочлена P с вещественными коэффициентами выполнено $P(\overline{z})=\overline{P(z)}$.

б) Любой многочлен с вещественными коэффициентами разлагается в произведение многочленов первой и второй степени с вещественными коэффициентами.

в) Если для многочлена P с вещественными коэффициентами $P(x)>0$ при любом $x\in\mathbb{R}$, то $P=Q^2+R^2$ для некоторых многочленов Q,R с вещественными коэффициентами.

5*. Найдите все многочлены с вещественными коэффициентами, удовлетворяющие тождеству $P(x^2+x+1)\equiv P(x)P(x+1)$.

6. а) Выразите $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

б) Докажите, что $\cos n\varphi$ и $\dfrac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$ — многочлены от $\cos\varphi$.

7. Найдите: а) $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos k\varphi$; б) $\sum\limits_{k=0}^{n}2^k\sin k\varphi$; в) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos k\varphi}{3^k}$.

Указание. Обозначим $\mathrm{Re}(a+bi):=a$ для вещественных a и b. Используйте тот факт, что $\cos k\varphi=\mathrm{Re}(\cos\varphi+i\sin\varphi)^k$.

8. а) $\operatorname{ctg}^2 x<\dfrac{1}{x^2}<\operatorname{ctg}^2 x+1$.

Указание: используйте $\sin x<x<\operatorname{tg} x$.

б) $\sum\limits_{j=0}^{n}(-1)^j C_{2n+1}^{2j+1}\operatorname{ctg}^{2n-2j}\dfrac{\pi k}{2n+1}=0$ для любого $k=1,\ldots,n$.

в) $\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{ctg}^2\dfrac{\pi k}{2n+1}=\dfrac{n(2n-1)}{3}$.

г) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

д)* Найдите $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^4}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^6}$, …

9. а) Каким геометрическим преобразованием плоскости $\mathbb{C}$ получается число iz из числа z?

б) Обозначим $e^{i\varphi}:=\cos\varphi+i\sin\varphi$. Каков геометрический смысл умножения на $e^{i\varphi}$? на $re^{i\varphi}$?

в) Выразите число w, полученное из числа z поворотом на угол φ против часовой стрелки относительно центра z_0 (через z, z_0 и φ).

г) Композиция поворотов плоскости (с различными центрами) — поворот или параллельный перенос.

11. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, если $x_{n+1}=x_n\sqrt{\dfrac{x_n+x_{n-1}}{2x_{n-1}}}$ и

а) $x_0=1$, $x_1=1/2$; б) $x_0=1$, $x_1=2$.

12. Найдите $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, если $\begin{cases} x_{n+1}=3x_n-4y_n, \\ y_{n+1}=3y_n+4x_n \end{cases}$ и

а) $x_0=1$, $y_0=0$; б) $x_0=1$, $y_0=2$.

Зачетные задачи. 10 класс: 1 в); 2 б), в); 3 б), в); 4 б), в); 6 а); 7 а), б); 8 б), в). Из них письменно: 3 б); 4 б).

11 класс: 8 а), г); 9 б)–г); 10 а), б); 11 а), б); 12 а), б). Из них письменно: 9 в); 12 а).

Контрольные вопросы

I. Какое преобразование плоскости задается формулой $z\mapsto 2z+2$?

а) Параллельный перенос на вектор длины 2.

б) Гомотетия с коэффициентом 2.

в) Сжатие к прямой с коэффициентом 2.

II. Четверка комплексных чисел z_1, z_2, z_3, z_4 удовлетворяет равенству $\dfrac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}=2$. Что можно сказать о четверке точек плоскости, соответствующих числам z_1, z_2, z_3, z_4?

а) Они являются вершинами параллелограмма.

б) Они лежат на одной прямой или на одной окружности.

в) Площадь треугольника $0z_1z_2$ равна площади треугольника $0z_3z_4$ (точка 0 — начало координат).

III. Чему равна сумма $\sum\limits_{k=1}^{6}\cos\dfrac{2\pi k}{7}$?

а) 0; б) 1; в) -1; г) 6; г) 7;

д) ни один из перечисленных ответов не является верным.

Указания и решения

7. *Ответы.* а) $\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi\cos\frac{n}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$.

б) $\dfrac{2^{n+2}\sin n\varphi-2^{n+1}\sin(n+1)\varphi+2\sin\varphi}{5-4\cos\varphi}$.

в) $\dfrac{9-3\cos\varphi}{10-6\cos\varphi}$.

9. а) *Ответ*: поворотом на 90° вокруг начала координат против часовой стрелки.

Поскольку $|iz|=|z|$, то при данном преобразовании расстояние от точки z до начала координат сохраняется. Поскольку $\mathrm{Arg}\,(iz)=\mathrm{Arg}\,(z)+$ $+\pi/2$, то ориентированный угол между лучами, идущими из начала координат в точки z и iz, равен $+\pi/2$. Значит, по определению, точка iz получается из точки z указанным поворотом.

10. а) *Примечание.* На плоскости существует комплексная система координат, для которой A, B, C имеют координаты 0, 1, c соответственно.

Непостроимость правильных многоугольников (10–11)

А. Я. Канель-Белов

Теорема Гаусса. *Калькулятор (вычисляющий числа с абсолютной точностью) имеет кнопки*

$$1, \quad +, \quad -, \quad \times, \quad :, \quad \sqrt{}$$

(и неограниченную память). На этом калькуляторе можно вычислить значение $\cos\dfrac{2\pi}{n}$ *тогда и только тогда, когда* $n=2^{\alpha}p_1\cdot\ldots\cdot p_l$, *где* α *— целое неотрицательное и* $p_1,\ldots,p_l$ *— различные простые числа вида* $2^{2^s}+1$.

История этой знаменитой теоремы приводится в [1]. В [3], [2] приводится элементарное доказательство этой теоремы. Здесь мы приведем (в задачах) доказательство *невозможности.* Насколько известно автору и редакторам сборника, это доказательство не опубликовано ранее и является наиболее простым из известных доказательств. Несмотря на простоту этого доказательства и отсутствие явного использования термина «группа Галуа» (точнее, именно благодаря этому), его изучение — лучший способ понять отправные идеи теории Галуа (см. подробнее философско-методическое отступление в начале книги).

Вещественное число называется *построимым*, если его можно получить на нашем калькуляторе (т. е. получить из 1 при помощи сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня из положительного числа). Определение *комплексно построимого* комплексного числа аналогично определению построимого вещественного числа, только квадратные корни извлекаются из произвольных уже построенных чисел и комплексно построимыми считаются оба значения квадратного корня.

1. Комплексное число комплексно построимо тогда и только тогда, когда его вещественная и мнимая части (вещественно) построимы.

2. Пусть нажатие кнопок «1» и четырех арифметических действий на калькуляторе из теоремы Гаусса бесплатны, а за извлечения корня нужно платить копейку. *Число A можно получить за r копеек тогда и только тогда, когда существуют такие $a_1,\dots a_r\in\mathbb{R}$, что*

$$\mathbb{Q}=Q_0\subset Q_1\subset Q_2\subset\ldots\subset Q_{r-1}\subset Q_r\ni A,\quad \text{где}\quad a_k\in Q_k,\quad \sqrt{a}_k\notin Q_k,$$
$$Q_{k+1}=Q_k[\sqrt{a}_k]:=\{\alpha+\beta\sqrt{a}_k\mid \alpha,\beta\in Q_k\}\quad\text{для любого}\quad k=0,\ldots,r-1.$$

Такая последовательность называется *цепочкой квадратичных расширений* (это единый термин, термин «квадратичное расширение» мы не используем).

Итак, число A построимо тогда и только тогда, когда для некоторого r существует цепочка квадратичных расширений длины r, последнее множество которой содержит A.

Доказательство невозможности, основанное на рассмотрении аналогичных цепочек, называется в математической логике и программировании *индукцией по глубине формулы.*

3. а) **Лемма Гаусса.** Если многочлен с целыми коэффициентами неприводим над $\mathbb{Z}$, то он неприводим и над $\mathbb{Q}$.

б) **Признак Эйзенштейна.** Пусть p простое. Если для многочлена с целыми коэффициентами старший коэффициент не делится на p, остальные делятся на p, а свободный член не делится на p^2, то этот многочлен неприводим над $\mathbb{Z}$.

4. Положим $\Phi(x):=x^{12}+x^{11}+\ldots+x+1$.

а) Многочлен $\Phi(x)$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

б) Если $\varepsilon:=\cos\dfrac{2\pi}{13}+i\sin\dfrac{2\pi}{13}$ построимо, то существует такая цепочка $\mathbb{Q}=Q_1\subset Q_2\subset\ldots\subset Q_k\subset Q_{k+1}$ квадратичных расширений, что Φ приводим над Q_{k+1} и неприводим над Q_k.

в) В цепочке квадратичных расширений определим отображение сопряжения $\bar{\cdot}\colon Q_{k+1}\to Q_{k+1}$ (относительно Q_k) формулой $\overline{x+y\sqrt{a}_k}=x-y\sqrt{a}_k$. Если Φ делится на многочлен P с коэффициентами в Q_{k+1}, то Φ делится на сопряженный многочлен $\overline{P}$ (т.е. на многочлен с сопряженными коэффициентами).

г) Если многочлен R с коэффициентами из Q_{k+1} неприводим над Q_k, то сопряженный (относительно Q_k) многочлен $\overline{R}$ неприводим над Q_k.

д) Разложение многочлена $\Phi(x)$ над Q_{k+1} на неприводимые над Q_{k+1} множители состоит из двух сопряженных (относительно Q_k) множителей.

е) Для каждого из этих множителей существует цепочка, аналогичная б), но, возможно, с другим k.

ж) Число $\cos(2\pi/13)$ не построимо.

5. а) Минимальная степень многочлена, корнем которого является данное построимое число, является степенью двойки.

б) Число $\cos(2\pi/n)$ не построимо для n простого, $n \neq 2^m+1$.

в) Многочлен $\Phi(x)=1+x^{17}+x^{34}+x^{51}+\ldots+x^{272}$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

г) Число $\cos(2\pi/289)$ не построимо.

д) Докажите невозможность в теореме Гаусса.

е) Если все корни неприводимого многочлена нечетной степени с рациональными коэффициентами построимы, то один из них рационален.

Указания

1. Если $\sqrt{a+bi}=u+vi$, то u,v выражаются при помощи квадратных радикалов через a и b.

2. Это утверждение легко доказывается индукцией по количеству операций калькулятора, необходимых для получения числа, с применением домножения на сопряженное.

3. Предположите противное и воспользуйтесь методом неопределенных коэффициентов. Детали см. в [4].

4. а) Примените признак Эйзенштейна к многочлену $((x+1)^{13}-1)/x$ и лемму Гаусса.

б) Рассмотрим цепочку квадратичных расширений $\mathbb{Q}=Q_1\subset Q_2\subset\ldots\subset Q_{r-1}\subset Q_r\ni\varepsilon$. Заметим, что многочлен Φ приводим над Q_r (поскольку имеет корень ε). Поэтому существует l, для которого многочлен Φ приводим над Q_{l+1}. Обозначим через k наименьшее такое l. Из пункта а) следует, что $k\geqslant 1$. Теперь легко видеть, что цепочка $\mathbb{Q}=Q_1\subset Q_2\subset\ldots\subset Q_k\subset Q_{k+1}$ искомая.

в) Сопрягите относительно Q_k равенство $\Phi(x)=P(x)R(x)$.

г) Достаточно доказать, что если многочлен P с коэффициентами в Q_{k+1} делит Φ, то P и $\overline{P}$ взаимно просты. Для этого покажите, что НОД$(P,\overline{P})$ имеет коэффициенты из Q_k и воспользуйтесь неприводимостью многочлена Φ в Q_k.

д) Аналогично б).

е) Докажите, что указанное в пункте г) разложение многочлена $\Phi(x)$ состоит ровно из двух множителей (воспользуйтесь тем, что если коэффициенты многочлена P лежат в Q_{k+1}, то коэффициенты многочлена $P\overline{P}$ лежат в Q_k). То же самое будет верно и для разложения получившихся множителей и т. д. Исходя из этого получите, что степень многочлена $\Phi(x)$ должна быть степенью двойки.

5. а), б) Аналогично задаче 4.

в) Примените признак Эйзенштейна к многочлену $\Phi(x+1)$ и лемму Гаусса.

г) Аналогично решению задачи 4 докажите, что если число $\cos(2\pi/289)$ построимо, то степень многочлена $\Phi(x)$ должна быть степенью двойки. А это неверно.

д) Аналогично решению задач C1cdef в [3].

Литература

[1] *Гиндикин С. Г.* Дебют Гаусса // Квант. 1972. № 1.

[2] *Канель-Белов А. Я.* О построениях, готовится к печати.

[3] *Козлов П. А.*, *Скопенков А. Б.* В поисках утраченной алгебры: в направлении Гаусса (подборка задач) // Матем. просвещение. 2008. № 12. С. 127–143; `http://arxiv.org/abs/0804.4357`.

[4] *Прасолов В. В.* Многочлены. М: МЦНМО, 1999, 2001, 2003.

Диагонали правильных многоугольников (10–11)

И. Н. Шнурников

Наша цель — определить, какие и сколько диагоналей правильного n-угольника могут пересекаться в одной точке. Задачи 3, 5, 7 описывают возможные точки пересечения, а задачи 9 и 10 нужны для доказательства невозможности иных точек пересечения (которое завершается перебором случаев на компьютере).

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC угол при вершине A равен $80°$. Внутри треугольника взята точка M так, что $\angle MBC = 30°$ и $\angle MCB = 10°$. Докажите, что $\angle AMC = 70°$.

2. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка P так, что треугольник ABP равносторонний. Докажите, что $\angle PCD = 15°$.

3. Докажите, что диагонали A_1A_{n+2}, $A_{2n-1}A_3$ и $A_{2n}A_5$ правильного $2n$-угольника пересекаются в одной точке.

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол при вершине B равен $20°$. На сторонах BC и AB взяты точки D и E соответственно так, что $\angle DAC = 60°$ и $\angle ECA = 50°$. Докажите, что $\angle ADE = 30°$.

5. Докажите, что диагонали A_1A_7, A_3A_{11} и A_5A_{21} правильного 24-угольника пересекаются в точке, лежащей на диаметре A_4A_{16}.

6. Дан треугольник ABC с углами $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 70°$. На сторонах BA и BC взяты точки D и E соответственно так, что $\angle DCA = 50°$ и $\angle EAC = 40°$. Докажите, что $\angle AED = 30°$.

7. Докажите, что в правильном 30-угольнике семь диагоналей

$$A_1A_{13},\ A_2A_{17},\ A_3A_{21},\ A_4A_{24},\ A_5A_{26},\ A_8A_{29},\ A_{10}A_{30}$$

пересекаются в одной точке.

8*. Дан треугольник ABC с углами $\angle A = 14^\circ$, $\angle B = 62^\circ$, $\angle C = 104^\circ$. На сторонах AC и AB взяты точки D и E соответственно так, что $\angle DBC = 50^\circ$ и $\angle ECB = 94^\circ$. Докажите, что $\angle CED = 34^\circ$.

9. Докажите, что при простом p в правильном p-угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной точке внутри p-угольника.

Указание: если не получается, то смотрите дальше.

Теорема. *Максимальное количество диагоналей правильного n-угольника, пересекающихся в одной точке, отличной от центра, равно*:

2, *если n нечетно*;
3, *если n четно и не делится на* 6;
5, *если n делится на* 6 *и не делится на* 30;
7, *если n делится на* 30.

10*. а) Докажите, что если для простого числа p многочлен $S(x)$ с целыми коэффициентами степени не более $2p-1$ имеет корень $e^{\frac{i\pi}{p}}$, то

$$S(x) = a(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2p-2}) + \sum_{j=0}^{p-1} a_j(x^j + x^{p+j})$$

для некоторых $a, a_0, a_1, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{Z}$.

б) Отличный от тождественного нуля многочлен $S(x) = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j x^j$ с неотрицательными целыми коэффициентами называется k-*минимальным*, если $S(e^{\frac{2\pi i}{k}}) = 0$ и не существует таких целых $0 \leqslant b_j \leqslant a_j$, что многочлен $\sum\limits_{j=1}^{k} b_j x^j$ тоже имеет корень $e^{\frac{2\pi i}{k}}$, причем не все b_j равны нулю и не все b_j равны a_j.

Докажите, что для каждого k-минимального многочлена $S(x)$ существуют различные простые числа $p_1 < p_2 < \ldots < p_s \leqslant k$, целые числа m, l и $p_1p_2\ldots p_s$-минимальный многочлен $S_1(x)$ такие, что $S(x) = x^l \cdot S_1(x^m)$.

в) Для k-минимального многочлена $S(x)$ выберем $p_1p_2\ldots p_s$-минимальный многочлен $S_1(x)$ с минимальным p_s при условии $p_1 < p_2 < \ldots < p_s \leqslant k$ и $S(x) = x^l \cdot S_1(x^m)$.

Пусть для выбранного $S_1(x)$ оказалось $p_1 = 2$ и $S(1) < 2p_s$. Тогда найдутся целые числа $l, r < p_s$ и $p_1p_2\ldots p_{s-1}$-минимальные многочлены

$T_1, T_2, \ldots T_r$ такие, что

$$S(x) = x^l \cdot \sum_{j=1}^{r} T_j^j(x) \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{r} T_j(1) = 2r + S(1) - p_s.$$

г) Докажите, что существует ровно 107 k-минимальных многочленов (со всеми возможными k), значения которых в 1 не превосходят 12.

Указания

1, 2, 4. Можно свести задачу к пересечению диагоналей в правильном n-угольнике, но проще решить дополнительным построением.

3, 5, 7. Решаются теоремой Чевы в синусах.

6. Сводится изогональным сопряжением к предыдущим.

9. Перепишите теорему Чевы в синусах для точки пересечения трех различных диагоналей правильного n-угольника в виде соотношения $\sum_{j=1}^{6} e^{i\pi x_j} + \sum_{j=1}^{6} e^{-i\pi x_j} = 0$, в котором шесть чисел $x_j, j = 1, 2, \ldots, 6$, определяются формулой (ее надо найти) и удовлетворяют равенству $\sum_{j=1}^{6} x_j = 1$.

МОСКОВСКИЕ ВЫЕЗДНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ШКОЛЫ

А. Б. Скопенков

Es ist unmöglich
sagt die Erfahrung
Es ist was es ist
sagt die Liebe.
Erich Fried. Was es ist

Весной 2004 года возобновлена замечательная традиция проведения выездных Школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду (хотя формального решения о регулярном проведении Школ не принято). Школы проводятся Московским институтом открытого образования и Московским центром непрерывного математического образования. Эти школы продолжают замечательные традиции московских, ленинградско-петербургских, кировских, костромских, краснодарско-южнороссийских и других летних школ.

Школы проводятся в начале ноября, начале апреля и в июле. Весенняя и осенняя школы проводятся для 9–11 классов, а летняя — для перешедших в 9–10 классы.

Основная цель Школ — обучение математике высшего уровня. Обучение проходит в основном в форме решения и обсуждения интересных задач. Формулировки этих задач либо ясны школьникам, либо предваряются кратким теоретическим введением. Однако эти задачи подобраны так, что в процессе их решения и обсуждения ученики знакомятся с важными математическими идеями и теориями. Такое обучение одновременно готовит ученика и к математической науке, и к математическим олимпиадам, а также полезно для его развития в целом [1].

Полную версию статьи см. на сайте `www.mccme.ru/circles/oim/vyshkola.pdf`. О ближайшей школе см. по адресу `www.mccme.ru/circles/oim/SHKOLA.pdf`. Обновляемая версия информации о школах и материалов занятий находится на сайте `www.mccme.ru/circles/ oim/mat.htm`.

[1] Подробнее см. заметки А. Б. Скопенкова «Олимпиады и математика» и «Философско-методическое отступление» в начале данного сборника.

Кроме указанных тематических занятий, проводится «сдача задач»: школьники, находясь в аудитории, могут записывать решения задач, решать устные задачи по уже пройденным темам и сдавать их присутствующему на занятии преподавателю.

Чтобы разнообразить стиль занятий и заодно потренировать школьников к олимпиадам, раз в несколько дней проводятся тренировочные олимпиады. На них каждый школьник решает варианты, близкие к вариантам московских или всероссийских олимпиад или сборов (в зависимости от ближайшей олимпиады, в которой этому школьнику предстоит участвовать).

Чтобы научиться ясно записывать (в частности, проверять и уточнять) свои мысли, мы учим школьников записывать решения задач (примерно по одной в день) настолько ясно, чтобы текст было не стыдно опубликовать.

Всего имеется ориентировочно 3–4,5 часов аудиторных занятий и 0–2 часа самостоятельных занятий в день (расписания прошлых школ см. в приложении). Участники каждой школы делятся на группы в соответствии с уровнем подготовленности и возрастом. На каждом занятии школьникам предлагается подборка задач по некоторой теме. Как правило, ключевые задачи самостоятельно решаются некоторыми школьниками и после этого разбираются, а остальные сдаются школьниками как на занятии, так и после него. Впрочем, стиль проведения занятий зависит от конкретного преподавателя. Преподаватели Школы — и замечательные математики, и классные преподаватели, и члены жюри олимпиад высшего уровня; как студенты, так и профессиональные математики, и учителя. Многие из них являются авторами настоящего сборника.

Настоящий результат такого обучения виден не сразу. Однако достигнуть высокой «долгосрочной» цели трудно, если не поставить конкретную доступную «промежуточную» цель. Участники школы получают зачет по итогам своей работы, и сдача зачета необходима для приглашения в следующие школы (см. зачетные требования в приложении). *Одинаковые* минимальные требования ко всем (без исключения) школьникам являются необходимым условием результативности Школы. Однако помощь школьнику как в выполнении этих минимальных требований, так и в самостоятельном формировании и добровольном выполнении требований более высоких (но по-прежнему реалистичных и не мешающих гармоничному общему развитию) оказывается в основном при *индивидуальной* работе преподавателя с ним. Важная составляющая и одновременно результат школ — уважительное отношение к труду и атмосфера сотрудничества между учениками и преподавателями.

Успешное участие в Школе НЕ может учитываться при приглашении на Всероссийскую олимпиаду (и другие соревнования, в правилах отбора на которые не оговорен учет участия в Школе); однако оно поможет успешно выступить на любой олимпиаде.

В жизни Школ важны также общение и (физ)культурное развитие. Школы проводятся в комфортных пансионатах ближайшего Подмосковья. На Школах превосходно организован быт и досуг школьников, есть много возможностей для занятий спортом (футбол, настольный теннис, бег и плавание) и других видов отдыха. Ориентировочное расписание дня и правила для участников Школ приведены в приложении.

Московские школьники приглашаются на Школу по итогам участия в прошлых Школах и других общемосковских программ элитарного обучения математике, по итогам выступления на Всероссийской олимпиаде, Московской олимпиаде и на Турнире городов, а также по рекомендациям учителей. Обучение и проживание на Школах для них *бесплатное.* Мы с удовольствием приглашаем также кандидатов в команду России на Международную олимпиаду по математике, *проживающих вне Москвы* (см. раздел «Рекомендации» в приложении) [2)].

Приложение: кружок «Олимпиады и Математика»

В Московском центре непрерывного математического образования (МЦНМО) под моим руководством проходит кружок [3)] «Олимпиады и математика», см. www.mccme.ru/circles/oim. Моими соруководителями и ассистентами в разное время были и являются А. Акопян, А. Есин, А. Ефимов, А. Засорин, Д. Пермяков, С. Сафин, С. Спиридонов, А. Трепалин и И. Шнурников. Это студенты механико-математического факультета Московского государственного университета (а некоторые — и Независимого московского университета), в прошлом победители Международных и Всероссийских олимпиад школьников,

[2)] Конкретные сроки, критерии приглашения и списки приглашенных, а также крайние сроки *подтверждения участия* рассылаются приглашенным по электронной почте и вывешиваются на www.mccme.ru/circles/oim/SHKOLA.pdf до 15 мая для летней школы, до 15 сентября для осенней школы и до 1 февраля для весенней школы. Приглашенные на весеннюю школу по результатам мартовского отбора обзваниваются в день публикации его результатов. За неделю до последнего срока подтверждения участия в летней и осенней школах неподтвердившие обзваниваются по телефону.

[3)] Аналогичный кружок «Математический семинар» я веду в физико-математической школе-интернате им. А. Н. Колмогорова с 1994 года (до 2001 года совместно с В. Н. Дубровским). Этот кружок продолжает традицию «Физико-математического семинара» и «Научного общества учащихся», которые вели В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, Е. Л. Сурков и А. П. Веселов. См. www.mccme.ru/circles/oim/matsem.pdf.

большинство из них — отличники, некоторые уже являются авторами научных работ.

Участвовать в кружке «Олимпиады и математика» имеет право любой желающий. Однако уровень занятий довольно высок; большинство участников нашего кружка — ученики 8–11 классов, которые имеют шанс пройти на Всероссийскую олимпиаду школьников.

Стиль занятий кружка близок к стилю выездных школ (см. выше). В начале каждой темы решаются и разбираются в основном задачи, предлагавшиеся ранее на олимпиадах (или аналогичные таковым). А в конце дело часто доходит до *задач для исследования*[4)]. Мы уделяем много времени *индивидуальным* занятиям, разбирая лично с каждым школьником его решения и давая ему подсказки и/или дополнительные задачи, а также занимаемся со школьниками, которые решают исследовательские задачи (и выступают со своими результатами на конференциях школьников).

Занятия кружка объединяются в циклы из 1–3 занятий, связанных общей темой или идеей. Разные циклы почти независимы друг от друга, а темы циклов объявляются заранее (поэтому можно изучать только те циклы, которые школьнику наиболее интересны).

Многие материалы кружка опубликованы в настоящем сборнике, а также в журналах и на `www/mccme.ru/circles/oim`. Активное участие в кружке требует затрат времени и сил, поэтому его желательно согласовать с родителями и учителями. В хорошую погоду занятия кружка часто проходят с выездом на природу.

Успешное участие в кружке (зачет) учитывается при приглашении учеников в выездные школы. Подчеркну, что успешное участие в кружке не учитывается при формировании команды Москвы на Всероссийскую Олимпиаду. Но, конечно, оно поможет успешно выступить на любой олимпиаде.

Приложение: преподаватели Школ[5)]

Скопенков Аркадий Борисович, научный руководитель Школ, руководитель кружка «Олимпиады и математика», доктор физ.-мат. наук, профессор механико-математического факультета МГУ, Независимого московского университета и Московского института открытого образования, лауреат премий Московского математического общества, Российской академии наук, Европейской академии наук и Стипендии Пьера Делиня. `http://dfgm.math.msu.su/people/skopenkov/papersc.ps`.

[4)] См. *Скопенков А.* Размышления об исследовательских задачах для школьников // Матем. просвещение. 2008. №12. С. 23–32; `www.mccme.ru/circles/issl.pdf`.

[5)] Участвовавшие более одного раза или авторы материалов сборника. Редакторы просят извинения за возможные неточности.

Арнольд Виталий Дмитриевич, педагогический руководитель весенних и осенних Школ, учитель школы 1543, зам. директора Московского центра непрерывного математического образования.

Блинков Александр Давидович, педагогический руководитель летних школ, учитель математики школы 218, Заслуженный учитель РФ и Соросовский учитель (многократно).

Пермяков Дмитрий Алексеевич, зам. руководителя Школы, студент-отличник механико-математического факультета МГУ, автор научной работы, победитель Международной олимпиады школьников, генеральный куратор системы дистанционного обучения при МИОО.

Трепалин Андрей Сергеевич, педагогический руководитель осенней школы — 2008, соруководитель кружка «Олимпиады и математика», студент-отличник механико-математического факультета МГУ и Независимого московского университета, победитель всероссийских олимпиад школьников.

Абрамов Ярослав Владимирович, студент-отличник механико-математического факультета МГУ и Независимого московского университета, победитель московских олимпиад школьников.

Акопян Арсений Владимирович, аспирант Института системного анализа, соавтор книги по геометрии.

Аржанцев Иван Владимирович, кандидат физ.-мат. наук, доцент механико-математического факультета МГУ.

Арутюнов Владимир Владимирович, студент-отличник механико-математического факультета МГУ, студент Независимого московского университета, победитель всероссийских олимпиад школьников, победитель международной студенческой олимпиады.

Астахов Василий Вадимович, студент-отличник механико-математического факультета МГУ, победитель международных олимпиад школьников и студентов.

Канель-Белов Алексей Яковлевич, доктор физ.-мат. наук, профессор Международного университета в Бремене и Московского института открытого образования.

Берштейн Михаил Александрович, студент-отличник механико-математического факультета МГУ и Независимого московского университета, победитель международной олимпиады школьников.

Буфетов Александр Игоревич, кандидат физ.-мат. наук, преподаватель Независимого московского университета и университета Райса.

Богданов Илья Игоревич, учитель математики школы 5 г. Долгопрудного, кандидат физ.-мат. наук, преподаватель Московского физико-технического института.

Бурман Юрий Михайлович, кандидат физ.-мат. наук, постоянный преподаватель Независимого московского университета.

Вялый Михаил Николаевич, кандидат физ.-мат. наук, постоянный преподаватель Независимого московского университета, ответственный секретарь редколлегии журнала «Математическое просвещение».

Гаврилюк Андрей Александрович, учитель математики школы 5 г. Долгопрудного, студент-отличник механико-математического факультета МГУ, победитель международной олимпиады школьников.

Гарбер Алексей Игоревич, учитель математики школы 5 г. Долгопрудного, аспирант Математического института РАН.

Галочкин Александр Иванович, учитель математики школы 1134, кандидат физ.-мат. наук, доцент механико-математического факультета МГУ.

Глазырин Алексей Александрович, учитель математики школы 5 г. Долгопрудного, аспирант мехмата МГУ.

Девятов Ростислав Иванович, студент-отличник механико-математического факультета МГУ и Независимого московского университета, победитель международной олимпиады школьников.

Дориченко Сергей Александрович, учитель математики школ 57 и 179, председатель жюри и оргкомитета Международного математического турнира городов.

Ефимов Александр Иванович, студент-отличник мехмата МГУ и Независимого московского университета, победитель международных студенческих олимпиад, автор научных работ.

Заславский Алексей Александрович, учитель математики школы 1543, кандидат техн. наук, ст. научный сотрудник ЦЭМИ РАН.

Кожевников Павел Александрович, учитель математики школы 5 г. Долгопрудного, кандидат физ.-мат. наук, преподаватель Московского физико-технического института.

Конягин Сергей Владимирович, доктор физ.-мат. наук, профессор механико-математического факультета МГУ.

Кудряшов Юрий Георгиевич, учитель математики школы 57, аспирант механико-математического факультета МГУ.

Куюмжиян Каринэ Георгиевна, студентка механико-математического факультета МГУ и Независимого московского университета, победительница всероссийских олимпиад школьников.

Нетай Игорь Витальевич, студент механико-математического факультета МГУ и Независимого московского университета, победитель всероссийских олимпиад школьников.

Пономарева Елизавета Валентиновна, студентка-отличница механико-математического факультета МГУ и Независимого московского университета, победительница всероссийских олимпиад школьников.

Прасолов Виктор Васильевич, преподаватель Независимого московского университета, автор замечательных книг по математике.

Прасолов Максим Вячеславович, учитель математики школы 57, студент-отличник механико-математического факультета МГУ.

Протасов Владимир Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор механико-математического факультета МГУ.

Райгородский Андрей Михайлович, учитель математики школы 179, доктор физ.-мат. наук, доцент механико-математического факультета МГУ, профессор, руководитель исследовательской лаборатории компании «Яндес», лауреат премии Российской академии наук.

Сафин Станислав Рафикович, студент-отличник механико-математического факультета МГУ, победитель всероссийских олимпиад школьников.

Сендеров Валерий Анатольевич, член редакционной коллегии журнала «Квант».

Скопенков Михаил Борисович, кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник ИППИ, лауреат премий им. Мёбиуса и Российской Академии наук, координатор системы дистанционного обучения при МИОО.

Спивак Александр Васильевич, учитель математики школ 1543, 1018, 1101 (и т. д.), преподаватель Малого мехмата, член редколлегии журнала «Квант».

Спиридонов Сергей Викторович, аспирант механико-математического факультета МГУ.

Фёдоров Роман Михайлович, кандидат физ.-мат. наук, соавтор книги «Московские математические олимпиады».

Шабат Георгий Борисович, доктор физ.-мат. наук, профессор Независимого московского университета.

Шаповалов Александр Васильевич, ведущий преподаватель Кировской ЛМШ, кандидат физ.-мат. наук, сотрудник Математического института Стокгольмского университета, автор многих красивых задач.

Шень Александр, учитель математики школы 57, кандидат физ.-мат. наук, профессор Независимого московского университета.

Шнурников Игорь Николаевич, студент-отличник механико-математического факультета МГУ, автор научной работы, победитель международной олимпиады школьников.

Ященко Иван Валериевич, учитель математики школы 57, кандидат физ.-мат. наук, директор Московского центра непрерывного математического образования, зав. кафедрой математики Московского института открытого образования.

Приложение: зачетные требования

На свободу — с чистой совестью!

Для получения Зачета нужно не позже окончания Школы сдать

1) $[3M/2]$ письменных задач (из выдаваемых на каждом занятии);

2) еще две устные задачи по каждому занятию, кроме сдачи задач и олимпиад;

3) еще $3M$ устных задач.

Здесь M — количество учебных дней Школы (не обязательно полных), на которых присутствовал школьник.

Устные задачи сдаются на занятии до разбора (после занятия можно сдавать неразобранные задачи). Письменные задачи записываются на «Сдаче задач» или после пар; задача, решенная *на олимпиаде на* «+» *или* «+.», засчитывается за письменную, а остальные решенные задачи с олимпиад засчитываются как устные [6]. Хотя школьники имеют право сдавать устные и письменные задачи в любой момент до отбоя любому преподавателю, который согласится их принимать, НЕ рекомендуется уделять решению задач много времени вне занятий.

Примерно к середине школы (конкретная дата объявляется в начале Школы) нужно сдать *промежуточный зачет*, т. е. сдать

1) $[4M_1/3]$ письменных задач (из выдаваемых на каждом занятии);

2) еще две устные задачи по каждому занятию, кроме сдачи задач (СЗ) и олимпиад (О);

3) еще $[5M_1/2]$ устных задач.

Здесь M_1 — количество учебных дней Школы (не обязательно полных), на которых присутствовал школьник до времени сдачи промежуточного зачета.

Это необходимо для продолжения обучения на второй половине Школы для всех, кроме 8-классников, впервые приехавших в Школу [7].

Успехи в Школе учитываются при приглашении в следующие Школы (а также на некоторые другие мероприятия). В частности, школьник, сдавший зачет с отличием, автоматически приглашается в одну следующую Школу и рекомендуется к другим поощрениям [8], а школь-

[6] Письменные решения нужно записывать настолько ясно, чтобы текст было не стыдно опубликовать. ОФОРМЛЕНИЕ ПИСЬМЕННЫХ ЗАДАЧ: каждую письменную задачу надо записывать на отдельном листке; подписывая листок, нужно указать фамилию, название группы, тему занятия (см. расписание) число и номер пары, когда задана задача, номер задачи.

[7] Мы уверены, что это требование не приведет к отправлению школьников домой после первой половины Школы (хотя мы с огромным сожалением готовы это сделать), а облегчит им своевременную сдачу зачета за всю Школу.

[8] Независимо от его успехов на олимпиадах; если приглашение в следующую Школу им отклонено, то в дальнейшие Школы он приглашается по обычному конкурсу.

ник, не сдавший зачета, не может быть приглашен в одну следующую Школу[9] и (до досдачи зачета) получить другое поощрение. Поэтому зачетные требования составлены так, чтобы каждому участнику Школы было нетрудно их своевременно выполнить. А значит, чтобы получить полный эффект от выездной школы, полезно сдавать задач побольше и посложнее (чем нужно на зачет), а также решать и сдавать задачи из материалов Школы после ее окончания.

Приложение: правила для участников Школ

— Любое распоряжение руководителей Школы должно выполняться неукоснительно. Людей (в т. ч. взрослых), дающих вам противоположные распоряжения, нужно вежливо направлять к руководителям Школы.

— Купание участников Школы (в реке или бассейне) разрешается ТОЛЬКО в сопровождении руководителей Школы.

— Выход участников Школы за пределы территории происходит ТОЛЬКО с разрешения руководителей Школы до четко определенного времени в четко определенное место.

— Участникам Школы запрещено употребление спиртных напитков (в том числе пива).

— В случае возникновения любых медицинских проблем участникам Школы нужно немедленно сообщить о них руководителям Школы. Это нужно сделать даже после самостоятельного обращения в медпункт.

— Соблюдайте тишину во время самостоятельного решения задач на занятиях. Если вам нужно обсудить задачи с одногруппником, то с разрешения преподавателя можно сделать это в коридоре.

Приложение: ориентировочное расписание дня Школ

8.40–9.00	Зарядка (для желающих)
9.00–9.20	Завтрак
9.30–11.20	1-я пара (с перерывом)
11.40–13.30	2-я пара (с перерывом)
13.30–14.00	Обед
14.30–16.00	Футбол, волейбол на улице
16.00–17.00	Купание в бассейне (для желающих)
17.10–19.00	3-я пара (с перерывом); не всегда — см. расписание
19.00–19.20	Ужин

20.00 Кино; не всегда — см. по настроению.

[9] Ни в качестве ученика, ни в качестве преподавателя; независимо от его успехов на олимпиадах; если он все-таки сдаст зачет позже, то в дальнейшие Школы он приглашается по обычному конкурсу.

14.00–22.40 (кроме 3-й пары) свободное время, запись задач, спорт, чай, музыка, кино...

22.40 Тихое время. К этому моменту все собрания должны заканчиваться, а после этого момента все желающие спать должны иметь такую возможность. Участникам Школы не разрешается перемещение между комнатами, слышимый извне шум в комнатах, песнопения или игры в холлах.

23.00 Отбой (выключается свет в комнатах).

Приложение: подтверждение участия школьниками

Сразу после получения приглашения в Школу школьник должен подтвердить это получение (и сообщить координаты для срочной и надежной связи с ним).

Не позже чем 1 октября для осенней школы, 1/30 марта для весенней школы (для приглашенных в январе/марте) **и 28 мая для летней школы** (а желательно и раньше) школьник должен лично сообщить о своем желании или нежелании участвовать в Школе (даже если он НЕ собирается участвовать). И то, и другое нужно сделать либо **на кружке «Олимпиады и математика»** (`www.mccme.ru/circles/oim`), либо **по адресу** `skopenko@mccme.ru`, либо **запиской для А. Б. Скопенкова по телефону (499)241-12-37**. Если ответ школьника не будет получен в указанное время указанным способом, то его приглашение аннулируется. Личное подтверждение школьником участия в Школе необходимо, поскольку подразумевает *добровольность* участия и *обязательство* соблюдать правила Школы — в частности, сдать по ней зачет в указанный срок. Школьник может приехать только на часть Школы (о чем нужно заранее договориться с А. Б. Скопенковым).

Приложение: рекомендации учителей математики

Учитель математики или руководитель кружка может, внимательно ознакомившись с информацией о Школах, рекомендовать к участию в Школе своего ученика.

Мы с удовольствием приглашаем также кандидатов в команду России на Международную олимпиаду по математике, проживающих вне Москвы и рекомендованных своими учителями. При этом финансовые вопросы решаются учителем с И. В. Ященко (`ivan@mccme.ru`). Рекомендация предполагает моральную ответственность рекомендателя за соблюдение учеником правил Школы и своевременную сдачу им зачета в указанный срок. Поэтому мы просим рекомендателей внимательно прочитать весь этот текст, порешать со своим учеником несколько задач из материалов прошлых школ (`www.mccme.ru/circles/oim/mat.htm`; эти задачи ученик может также посдавать на кружке «Олимпиады и математика»), а также посмотреть критерии приглашения учеников без рекомендаций (`www.mccme.ru/circles/oim/mat.htm`). Если вы рекомендуете *нескольких* школьников, то, пожалуйста, расставьте ваши приоритеты (кого в первую очередь, кого — во вторую, и т. д.).

Мы серьезно относимся ко всем рекомендациям, но не можем пригласить всех рекомендованных ввиду ограниченности числа мест: в одну Школу приглашается по рекомендации не более четырех школьников со всей Москвы. Мы сообщаем рекомендателю и ученику наше решение о приглашении или отказе не позже чем за неделю до Школы (а по возможности и раньше). Каждый школьник может быть приглашен *по рекомендации* не более одного раза (при этом тот же школьник может быть приглашен *по конкурсу* сколько угодно раз).

Рекомендации вместе с электронными адресами и телефонами рекомендуемых нужно сообщить **не позже чем 1 октября для осенней школы, 15 марта для весенней школы и 28 мая для летней школы** (а желательно и раньше) либо **по адресу** `skopenko@mccme.ru`, либо **запиской для А. Б. Скопенкова по телефону (499)241-12-37**. К сожалению, мы не можем гарантировать рассмотрение рекомендации, полученной позже или другим способом. Рекомендованный школьник должен подтвердить свое желание участвовать в Школе **в те же сроки и тем же способом**, что и приглашаемые без рекомендаций школьники (см. выше). Если ответ школьника не будет получен в указанное время указанным способом, то он не будет приглашен.

Приложение: расписание Школ

В левой колонке отмечены день и номер пары. СЗ:=Сдача задач. О:=Отдых. П:=Пермяков. С:=А. Скопенков. Т:=А. Трепалин.

Фамилии школьников, получивших зачет с отличием, начиная с осени 2005 г., выделены курсивом.

ШКОЛА 7-11.04.04

	9 класс	**10 класс**	**11 класс**
7-2	Спиридонов (инверсия)	Мазин (графы)	Шень (комби-вероят.)
7-3	Мазин (графы)	Шень (коды)	С (компл.числа)
8-1	Дориченко (многочл.)	Мощевитин (геом.чисел)	Кудряшов (асимптотики)
8-2	Мощевитин (геом.чисел)	С (комплекс.)	Дориченко (многочлены)
8-3	СЗ	СЗ	Мощевитин (геом.чисел)
9-1	Галочкин (числа)	Ященко (разное)	Кожевников (класс.геом.)
9-2	Кожевников (клгеом.)	Галочкин (числа)	Спивак (числа Каталана)
9-3	Спивак	СЗ	СЗ
10-1	С (нерав.)	Спиридонов (инверсия)	М. Скопенков (комстере)
10-2	Кудряшов (комгеом)	М. Скопенков (комстере)	Спиридонов (проектив)
10-3	СЗ	СЗ	СЗ
11-1	С (геоминтер)	Олимпиада	Спивак (линейность)
11-2	Спивак (конич.сеч.)	по геометрии	С (геоминтер)

ШКОЛА 16–21.10.04

	группа X	**группа Y**
16-2	Прасолов (Фибоначчи)	Вялый (графы)
16-3	Вялый (графы)	Прасолов (Фибоначчи)
17-1	Богданов (комби)	Скопенков (т.чисел)
17-2	Берштейн (неравенства)	Богданов (произв.ф.)
17-3	СЗ Кудряшов, Карпенков	СЗ Акопян, Берштейн, Гарбер
18-1	Олимпиада	Заславский (проектив)
18-2	Заславский (геом)	Акопян (эллипсы)
18-3	СЗ Кудряшов, Челноков	СЗ Акопян, Заславский
19-1	Челноков (комби)	Олимпиада
19-2	С (рисование)	Челноков (линейность)
19-3	СЗ Челноков	СЗ Куюмжиян, С
20-1	Конягин (числа)	Семенов (рекуррентности)
20-2	Семенов (выпуклость)	Конягин (простота)
20-3	О	СЗ Куюмжиян
21-1	Куюмжиян (комбинаторика)	С (рисование)
21-2	Глазырин (геометрия)	Гарбер (комгеом)
21-3	СЗ Глазырин	СЗ Гарбер Кудряшов

Группа X: Гайдук Роман, Ерпылев Алексей, Козлов Иван, Колчин Илья, Корнаков Илья, Котов Андрей.

Группа Y: Гусаков Алексей, Девятов Ростислав, Ефимов Александр, Зыков Анатолий, Кондакова Анна, Мироненко-Маренков Антон, Москва Владимир, Осиненко Антон, Петров Андрей, Стрелкова Наталья, Тестов Владимир.

ШКОЛА 4–10.04.05

	группа X (202)	**группа Y (701)**	**группа Z (204)**
4-2	Глазырин (диофур)	Дориченко (многочл)	Кожевников (ком геом)
4-3	Кожевников (ком геом)	Глазырин (геом1)	Дориченко (многочл)
5-1	С (графы)	Райгородский (комби1)	Колосов (диофур)
5-2	Горский (числа)	Колосов (уравнения)	Райгородский (вероят)
5-3	СЗ (С)	СЗ (Горский)	СЗ (Горский)
6-1	Пермяков (комби счет)	Шнурников (комби2)	СЗ (С)
6-2	Иванова (ф-ла Пика)	Пермяков (таблицы)	Шнурников (оценки)
6-3	СЗ (Иванова)	СЗ (Федоров)	Ол.геом. (С)
7-1	Куюмжиян (геом1)	Шень (логика)	Ященко (множества)
7-2	Федоров (алгебра)	Куюмжиян (геом2)	Шень (логика)
7-3	О	СЗ (Федоров)	СЗ (Шень)
8-1	С (комби)	Спиридонов (нер-ва)	М.Скопенков (цел.реш.)
8-2	Спиридонов (нер-ва)	М. Скопенков (многочл)	Федоров (линейно)
8-3	СЗ (Спиридонов,С)	СЗ (Федоров)	СЗ (Вялый,М.Скоп.)
9-1	С (построения)	Заславский (геом3)	Вялый (симногочл)
9-2	Заславский (геом2)	Вялый (симногочл)	Федоров (группы)
9-3	СЗ (Спиридонов)	СЗ (Федоров,М.Скоп.)	СЗ (Заславский)
10-1,2	Олимпиада	мехмата МГУ	Спивак (геом)
10-3	О	О	СЗ (С)

Группа X: Арутюнов, Чмутин, Лаут, Пахомов, Рогожников, Махлин, Янушевич, Ерпылев, Лысов (куратор Скопенков).

Группа Y: Захаров, Климовский, Козлов, Печенкин, Пономарева, Устиновский, Киселев, Илюхина (куратор Федоров).

Группа Z: Абрамов, Девятов, Ефимов, Мироненко-Маренков, Трепалин, Родионов, Баранов, Корнаков, Оганесян.

ШКОЛА 19–26.07.05

Знак равенства означает, что в разных группах проходили занятия по одной теме.

	группа X	группа Y
19-3	С (комби-1)	=Кудряшов (комби-1)
20-1	Блинков (геом-1)	Бурман (гиперкуб)
20-2	Блинков (геом-2)	Кудряшов (числа-1)
20-3	Кудряшов (числа-1)	Акопян (ось)
21-1	Акопян (хелли)	Акопян (хелли)
21-2	Протасов (геом.)	=Блинков (геом.)
21-3	О	Доценко (пр. числа)
22-1	С (комби-2)	=Кудряшов (комби-2)
22-2	Акопян (инверсия)	Блинков (геом-1)
22-3	Акопян (комгеом)	Городенцев (коники)
23-1	Акопян (изогон)	Блинков (геом-2)
23-2	Кудряшов (нер-ва)	Акопян (комб.геом.)
24-1	С (комби-3)	=Кудряшов (комби-3)
24-2	Кудряшов (числа-2)	Блинков (геом-3)
24-3	Акопян (не геом.)	Бугаенко (прогресс)
25-1,2	Письменная	олимпиада
26-1	Акопян (разб, не геом.)	Шень (не геом.)
26-2	Блинков (не геом)	Кудряшов (не геом.)

Группа X: Андреев, Воинов, Окунев, Савин, Стаценко, Трегубова, Шанин, Щепин, Шишонкова.

Группа Y: Арутюнов, Боярченкова, Янушевич, Чмутин, Осипов, Селегей, Ткачев.

ШКОЛА 27.10–5.11.05

	гр. Весны 501	**гр. Лета 701**	**гр. Зимы 702**
27-3	П (подсчет)	С (построения)	С (построения)
28-1	С (нер-ва)	Храбров (нер-ва1)	П (орграфы)
28-2	П (рамсей)	Куликов (индграфы)	Храбров (нер-ва1)
28-3	Куликов (Холла)	Храбров (нер-ва2)	П (орграфы)
29-1	С (нер-ва)	Куликов (Холла)	Храбров (нер-ва2)
29-2	СЗ (Куликов)	СЗ (Ефимов)	Заславский (коники1)
29-3	Куюмжиян (цмасс)	Заславский (проект)	СЗ (Ефимов)
30-1	Куюмжиян (цмасс)	Заславский (коники1)	Храбров (нер-ва3)
30-2	СЗ (Куюмжиян)	Храбров (нер-ва3)	СЗ (Ефимов)
30-3	Блинков (постр)	СЗ (Ефимов)	Заславский (коники2)
31-1	Олимпиада	Олимпиада	Блинков (тетраэдр)
31-2	Олимпиада	Олимпиада	Кожевников (клгео)
31-3	О	О	СЗ (Кожевников)
1-1	Блинков (площади)	Кожевников (клгеом)	Олимпиада
1-2	Разбор, СЗ (Блинков)	Кожевников (клгеом)	Олимпиада
1-3	С (уравнения)	Разбор, СЗ (П)	О
2-1	Ященко (непрер)	Т (впис4-к)	Олимпиада
2-2	Астахов (гомот)	СЗ (Т)	Олимпиада
2-3	СЗ (С), О	Гаврилюк (вписокр)	О
3-1	С (уравнения)	Олимпиада	Гаврилюк (двойные)
3-2	Гаврилюк (Карно)	Олимпиада	Пастор (блоки)
3-3	СЗ (Гаврилюк)	О	СЗ (Пастор, П)
4-1	Олимпиада	Богданов (многочл)	Пастор (клетки)
4-2	Олимпиада	Пастор (блоки)	Богданов (гауссовы)
4-3	О	СЗ (Богданов)	СЗ (Пастор, П)
5-1	С (квадр.вычеты)	Пастор (клетки)	М. Скопенков (решетки)
5-2	М. Скопенков (игры)	С (перв.корни)	Богданов (алгебра)
5-3	СЗ (П)	СЗ (Пастор)	СЗ (М. Скопенков)

Группа Весны. (куратор А. Скопенков) *Андреев Михаил, Воинов Андрей,* Ерпылев Алексей, Котельский Артем, Пантелеев Никита, Савин Арсений, Стаценко Максим.

Группа Лета. Арутюнов Владимир, Богатый Иван, Колчин Илья, *Котов Андрей, Лаут Илья, Осипов Илья, Пантелеев Дмитрий,* Пахомов Федор, *Чмутин Георгий*, Янушевич Леонид.

Группа Зимы. (куратор Д. Пермяков) Баранов Дмитрий, Девятов Ростислав, Киселев Александр, Лысов Михаил, *Илюхина Мария,* Пономарева Елизавета.

ШКОЛА 6–16.04.06

	гр. Жести 701	гр. Бронзы 702	гр. Стали 703
6-2	Кудряшов (лин.алг.)	Протасов (треуг.)	Райгородский (ком.геом.)
6-3	Протасов (треуг.)	Кудряшов (лин.ал.)	Райгородский (ком.геом.)
7-1	Горский (алгебра)	Протасов (треуг.)	Кудряшов (лин.комб.)
7-2	Протасов (треуг.)	Пермяков (множ.)	Кудряшов (лин.комб.)
7-3	СЗ (Горский)	СЗ (С)	СЗ (П)
8-1	Куюмжиян (графы)	П (множества)	СЗ (Ефимов)
8-2	Куюмжиян (графы)	С (комби)	Прасолов (геом.уср.)
8-3	СЗ (Куюмжиян)	СЗ (Ефимов)	Прасолов (прав.кр.)
9-1	Олимпиада	Олимпиада	Шнурников (доп.постр.)
9-2	мехмата МГУ	мехмата МГУ	Шнурников (геом.нер.)
9-3	О	О	СЗ (Шнурников)
10-1	Нетай (ком.геом)	С (комби)	Т (кл.геом.)
10-2	Нетай (ком.геом)	Ефимов (алгебра)	СЗ (Т)
10-3	СЗ (Нетай)	СЗ (Ефимов)	О
11-1	Т (движения)	Олимпиада	Олимпиада
11-2	СЗ (Ефимов)	Олимпиада	Олимпиада
11-3	О	О	Богданов (ширина)
12-1	Олимпиада	Богданов (ком.геом)	Голованов (числа)
12-2	Олимпиада	Богданов (ком.геом)	СЗ (Голованов)
12-3	Горский (алгебра)	СЗ (С)	О
13-1	Шнурников (констр.)	Голованов (числа)	Райгородский (комби)
13-2	Шнурников (инвар.)	СЗ (Голованов)	Райгородский (комби)
13-3	О	О	СЗ (Райгородский)
14-1	Олимпиада	С (лин.ал.)	Голованов (числа)
14-2	Олимпиада	СЗ (Горский)	Голованов (числа)
14-3	СЗ (Горский)	Голованов (числа)	О
15-1	Ефимов, С (числа)	Олимпиада	СЗ (Голованов)
15-2	СЗ (Ефимов)	Олимпиада	Голованов (многочл)
15-3	О	О	Голованов (многочл)
16-1	Астахов (кл.геом)	Гаврилюк (кл.геом)	Олимпиада
16-2	СЗ (Астахов)	Гаврилюк (кл.геом)	Олимпиада
16-3	О	СЗ (Ефимов)	СЗ (Гаврилюк)

Группа Жести. *Андреев Михаил, Воинов Андрей,* Ерпылев Алексей, *Котельский Артем, Окунев Алексей, Чекалкин Серафим,* Царьков Олег, Янушевич Леонид.

Группа Бронзы. *Арутюнов Владимир,* Казначеев Андрей, *Колосов Андрей, Осипов Илья,* Пантелеев Дмитрий, Рогожников Алексей, Чмутин Георгий.

Группа Стали. Буфетов Алексей, Девятов Ростислав, *Илюхина Мария, Корнаков Илья, Махлин Игорь,* Печенкин Николай, Пономарева Елизавета, Стеблюк Дмитрий.

ШКОЛА 57 ШКОЛЫ И КОМАНДЫ МОСКВЫ, 20–26.07.06

	Δ	Е
20-3	Гаврилюк, С (комби)	Кустарев (то же)
21-1	С, Гаврилюк (Ферма)	то же
21-2	Ландо, Гаврилюк (графы)	то же
21-3	Блинков, Кустарев (движения)	то же
22-1	Блинков, Кустарев (подобия)	то же
22-2	СЗ (Гаврилюк, С)	то же (Кустарев)
22-3	Буфетов, Гаврилюк (вероятность)	то же
23-1	Канель-Белов (перв. корни)	Анисов (политика)
23-2	С (квадр. вычеты)	СЗ
23-3	О	Федоров (Пифагор)
24-1	Блинков, Кустарев (треугольник)	то же
24-2	Скопенков (перв. корни)	Анисов (неравенства)
24-3	СЗ (Гаврилюк, С)	Канель-Белов
25	Олимпиада	то же
26-1	Канель-Белов (вырождение)	Анисов, Гавр., Куст. (графы)
26-2	Лифшиц (криптография)	С (квадр. вычеты)

Группа Δ. *Андреев Михаил, Воинов Андрей,* Головко Александр, Демехин Михаил, Ерпылев Алексей, *Котельский Артем,* Окунев Алексей, Пуртов Дмитрий, Ромаскевич Елена, Удимов Даниил, Янушевич Леонид.

Группа Е. Блинов Андрей, Палазник Николай, Панов Глеб, Савин Арсений, Стаценко Максим, Токмаков Петр, Цветков Максим, Шанин Иван, Щепин Константин.

ШКОЛА 4–12.11.06

	гр. Бури У203	**гр. Урагана У206**	**гр. Тайфуна У215**
4-2	Девятов (нерав)	Гарбер (графы)	Кожевников комгеом
4-3	П (графы)	Гарбер (графы)	Кожевников комгеом
5-1	Блинков (площади)	Кожевников циклич	Заславский (геом)
5-2	Блинков (экстргеом)	Кожевников констр	Заславский (геом)
5-3	П (СЗ)	Кожевников (СЗ)	Заславский (СЗ)
6-1	Олимпиада	Блинков экстргеом	М.Скопенков неевкл
6-2	М04-10	Блинков площади	М.Скопенков неевкл
6-3	М.Скопенков разбор	Блинков (СЗ)	С (СЗ)
7-1	М.Скопенков игры	Олимпиада	Олимпиада
7-2	М.Скопенков инвар	М04-10	М04-11, СБ00-I1
7-3	С (СЗ)	Колюцкий разбор	Скопенковы разбор
8-1	Колюцкий (ц.дроби)	Конягин (простота)	Олимпиада
8-2	Колюцкий (ц.дроби)	Конягин (простота)	М89-10, СБ00-I2
8-3	Колюцкий (СЗ)	Перепечко (СЗ)	Конягин (комгеом)
9-1	Олимпиада	Т пргеом	Шень (логика)
9-2	М03-10	Т клгеом	Шень (логика)
9-3	Ефимов, Т разбор	Перепечко (СЗ)	Перепечко, П разбор
10-1	Гаврилюк массы	Олимпиада	Ефимов кр.многоч
10-2	Гаврилюк вписан	М02-10	Ефимов непостр
10-3	Гаврилюк (СЗ)	Ефим.Треп. разбор	Терешин (стерео)
11-1	С (нерав)	Акопян (комгеом)	Шнурников прмног
11-2	П (графы)	Акопян (СЗ), О	Шнурников прмног
11-3	О	Козлов (числа)	Шнурников (СЗ)
12-1	С (рисование)	Берштейн многочл	П (орграфы)
12-2	Абрамов (бином)	Берштейн нерав	Козлов (числа)
12-3	Абрамов (СЗ)	Берштейн (СЗ)	С (СЗ)

Группа Бури. *Асавкин Дмитрий,* Берсенев Никита, Демехин Михаил, Марченко Евгений, *Ромаскевич Елена,* Удимов Даниил.

Группа Урагана. *Андреев Михаил, Воинов Андрей, Ерпылев Алексей,* Котельский Артем, *Окунев Алексей,* Янушевич Леонид, Сысоева Люба.

Группа Тайфуна. Антонов Артем, Арутюнов Владимир, *Колосов Андрей, Митрофанов Иван, Осипов Илья,* Чмутин Георгий.

ШКОЛА 31.3–12.4.07

	гр. Орла 701	гр. Тельца 702	гр. Льва 703
31-1	П графы	Сендеров числа	Райгородский кгеом1
31-2	П суммирование	Райгородский кгеом1	Сендеров анализ
1	Олимп. по геом.	школа 444	начало в 10.30
2-1	Куюмжиян углы	С графы	Богданов комби1
2-2	Куюмжиян комби	Пономарева числа	Богданов комби2
2-3	П СЗ	Пономарева СЗ	С СЗ
3-1	Пономарева числа	Канель-Белов линейность	Райгородский кгеом2
3-2	Пономарева СЗ	Райгородский кгеом2	П СЗ
3-3	О	П СЗ	Алексей числа
4-1	С геом пре1	Девятов числа	Яковлевич числа
4-2	Баранов клетки	Девятов СЗ	Т СЗ
4-3	Баранов СЗ	О	О
5-1	Кудряшов квычеты	Олимпиада	Канель-Белов
5-2	Кудряшов нер-ва	Всер-2003-1	Т СЗ
5-3	П СЗ	Ефимов разбор	Гаврилюк клгеом
6-1	Олимпиада	Гаврилюк клгеом	Олимпиада
6-2	Всер-2002-1	Гаврилюк клгеом	Всер-2002-2
6-3	П разбор	Гаврилюк СЗ	Ефимов разбор СЗ
7-1	Олимпиада	Шнурников комби	Ефимов анализ
7-2	Всер-2002-2	Шнурников комби	Канель-Белов максим
7-3	П разбор	Шнурников СЗ	Ефимов СЗ
8-1	Шнурников СЗ	Ефимов анализ	С прос.движения
8-2	С геом пре2	Шнурников СЗ	Канель-Белов
8-3	С геом пре3	A. Ya. Belov графы	Ефимов СЗ

9-12 апреля, 1 и 2 пары. Самостоятельное решение задач.

9-12 апреля, 13.30-17.30, ауд. 206 МЦНМО. СЗ.

Группа Орла. *Аристова Анастасия,* Блинов Андрей (3-7.04), Мельничук Павел, Савчик Алексей, *Царьков Олег, Кондакова Елизавета, Ивлев Федор,* Василенко Артем, Наумов Владислав, Рухович Филипп.

Группа Тельца. Ромаскевич Елена, *Воинов Андрей,* Ерпылев Алексей (7-8.4), *Окунев Алексей,* Янушевич Леонид, Токмаков Петр, Каниськин Сергей, Авилов Артем, Тихонов Юлий, *Погудин Глеб* (31.3, 3-4.4), *Омельяненко Виктор.*

Группа Льва. *Андреев Михаил,* Ерпылев Алексей (31.3-6.4), *Арутюнов Владимир, Илюхина Мария,* Колосов Андрей, Лысов Михаил, Митрофанов Иван, Осипов Илья, *Погудин Глеб* (1,2, 5-8.4), Чмутин Георгий.

ШКОЛА 10–19.07.07

	гр. Неба	**гр. Земли**
10-2	Б окружн1	С Ферма1
10-3	П комби1	Шнурников комби
11-1	Б окружн2	П игры
11-2	П СЗ	Б площади
11-3	Рубанов движения	Шнурников СЗ
12-1	С лин ур	Б построения
12-2	П СЗ	С Ферма2
12-3	О	Шнурников СЗ
13-1	П игры	Олимпиада
13-2	С ферма1	Олимпиада
13-3	П СЗ	О
14-1	Олимпиада	Б движения
14-2	Олимпиада	С квадр выч1
14-3	О	Шнурников СЗ
15-1	Б постр1	Шнурников комби3
15-2	Б постр2	Шнурников СЗ
15-3	П СЗ	О
16-1	П плоск графы	Б геом экстрим1
16-2	С ферма2	Б геом экстрим2
16-3	О	Шнурников СЗ
17-1	П графы	Олимпиада
17-2	С кв вычеты	Олимпиада
17-3	П СЗ	О
18-1	Олимпиада	Шабат Каталан1
18-2	Олимпиада	С квадр выч2
18-3	О	С, Шнурников СЗ
19-1	Аржанцев комгеом	Шабат Каталан2
19-2	П, Осипов СЗ	С, Шнурников СЗ

Группа Неба. Артемьева Галина, Воеводский Григорий, Козачинский Александр, Капицын Максим, *Никита Левин, Николай Лысенко,* Матушко Мария, *Николаев Семен, Покровский Федор,* Шишонков Сергей.

Группа Земли. Аристова Анастасия, Наумов Владислав, Рухович Филипп, Савчик Алексей, *Царьков Олег, Кондакова Елизавета,* Блинов Андрей, *Медведь Никита.*

ШКОЛА 28.10–5.11.07

Вэнь играл на лютне, мастер Куан отбивал такт тростью,
а Хуэй-цзы [пел или читал нараспев и] опирался о платан.

Чжуан-цзы

	гр. Лютни У701	гр. Трости У703	гр. Платана У703
29-1	П (множества)	С (алгебра-1)	М.Скопенков (реш.)
29-2	П (графы)	М.Скопенков (реш.)	Абрамов (числа)
29-3	П (СЗ)	М.Скопенков (СЗ)	Абрамов (СЗ)
30-1	П (алкомби)	Кожевников (пр.крайн.)	М.Скопенков (реш.)
30-2	Кожевников (гомот.)	М.Скопенков (реш.)	С (алгебра)
30-3	О	Т (СЗ)	П (СЗ)
31-1	П (вкл.-искл.)	Кожевников (пов.гом.)	Шнурников (комби-1)
31-2	Кожевников (пов.гом.)	Т (алгебра-2)	Шнурников (комби-2)
31-3	П (СЗ)	О	Шнурников (СЗ)
1-1	Олимпиада	Олимпиада	Олимпиада
1-2	М-98 (8–11)	В-98 (9–11)	Сб-03-1
1-3	П, С (разбор, СЗ)	Т (разбор, СЗ)	Шнурников (разбор, СЗ)
2-1	С (рисование)	Акопян (комгеом)	Олимпиада
2-2	П (рекурренты)	Акопян (комгеом)	В-98 (10–11) Сб03-3
2-3	П (СЗ)	Акопян (СЗ)	Шнурников (разбор)
3-1	Олимпиада	С (Descartes)	Протасов (комгеом)
3-2	М-02 (8–9)	Протасов (геом.тре.)	Заславский (Poncelet)
3-3	Т (разбор)	$(T/2 + O/2)$	Заславский (СЗ)
4-1	Гаврилюк (СЗ)	Олимпиада	Заславский (Poncelet)
4-2	Ященко (трехчлен)	В-98-II (9) М-02 (10)	Шнурников (комби-3)
4-3	О	Гаврилюк (разбор)	О
5-1	Астахов (клгеом)	Гаврилюк (клгеом)	Шнурников (комби-4)
5-2	Гаврилюк (клгеом)	С (неравенства)	Астахов (клгеом)
5-3	Астахов, П (СЗ)	Гаврилюк, С (СЗ)	Шнурников (СЗ)

Группа лютни (8–9 классы, куратор и ответственный за отбой Д. Пермяков). *Макаров Даниил,* Поволоцкий Михаил, Устинов Даниил, *Миронов Михаил,* Ерофеев Владислав, Тельпуховский Иван, *Козачинский Александр,* Воеводский Григорий, Артемьева Галина.

Группа трости (9–10 классы; куратор и ответственный за отбой А. Трепалин). Блинов Андрей, *Медведь Никита. Ивлев Федор,* Таранникова Катерина, Рухович Филипп, Николаев Семен, Матушко Мария, *Суханов Лев. Радонец Алексей.*

Группа платана (10–11 классы; куратор и ответственный за отбой И. Шнурников). Царьков Олег, Кондакова Елизавета. *Омельяненко Виктор, Андреев Михаил, Воинов Андрей, Окунев Алексей, Ромаскевич Елена.*

ШКОЛА 5-12.04.08

	гр вереска 602	**гр ивы 701**	**гр полыни 212**
5-1 **5-2** **5-3**	Пономарева Эйлер П комби-1 СЗ П, М.Скопенков	С числа Т пргеом СЗ Т	Буфетов симногочл Буфетов диаЮнга СЗ Пономарева
6-1 **6-2** **6-3**	П комби-2 Буфетов симногочл О	Буфетов симногочл Т неравенства СЗ Т, М.Скопенков	Девятов, С гауссовы Девятов Ферма СЗ Пон., Сафин
7-1 **7-2** **7-3**	П комби-3 Пономарева Китай СЗ П	М.Скопенков Берлов геом-1 О/2+СЗ/2 С	Берлов геом-1 С суммирование СЗ Пономарева
8-1 **8-2** **8-3**	С инверсия Берлов геом О (СЗ П, Арутюнов)	Олимпиада Олимпиада О (СЗ Т)	Берлов геом-2 Канель-Белов комби-1 О (СЗ Пономарева)
9-1 **9-2** **9-3**	Олимпиада Олимпиада СЗ П, Чмутин	Райгородский комге Берлов геом-2 СЗ Т	Берлов геом-3 Райгородский комге Райгородский комге
10-1 **10-2** **10-3**	С уравнения Блинков геом О	Блинков геом Берлов графы-1 О	Берлов графы Канель-Белов комби-2 О
11-1 **11-2** **11-3**	П комби-4 Абрамов Диофант СЗ П, Чмутин	Берлов графы-2 Берлов геом-3 СЗ Т	Олимпиада Олимпиада СЗ Абрамов
12-1 **12-2** **12-3**	Куюмжиян оруглы СЗ П О (СЗ П, Чмутин)	Канель-Белов комби СЗ Куюмжиян О (СЗ Куюмжиян)	СЗ Абрамов Канель-Белов геом О (СЗ С, Абрамов)

12-3. Доклад А. Окунева «Число частей в разбиении плоскости прямыми» для всех желающих среди сдавших зачет. Руководитель семинара А. Канель-Белов.

Занятия А. Канеля-Белова с частью группы полыни: 8-1, 9-1, 11-1, 11-2.

Группа вереска (куратор и ответственный за отбой Д. Пермяков). *Бурова Ольга*, Ерофеев Владислав, Тельпуховский Иван, Алымов Георгий, Макаров Даниил, Миронов Михаил, *Калиниченко Иван*, *Козачинский Александр*, Тужилин Михаил, Николай Лысенко, *Калашник Анна*, *Тренин Кирилл*,

Группа ивы (куратор и ответственный за отбой А. Трепалин). Блинов Андрей, *Медведь Никита*, Ивлев Федор, Николаев Семен, Радонец Алексей, Рухович Филипп, Суханов Лев, Гусев Алексей, *Ярославцев Иван*, *Немиро Владислав*.

Группа полыни (куратор и ответственный за отбой А. Скопенков). *Брагин Владимир*, *Воробьев Илья*, Царьков Олег, *Кондакова Елизавета*, Андреев Михаил, Воинов Андрей, Котельский Артем, Нилов Федор, Пуртов Дмитрий, Окунев Алексей, Ромаскевич Елена, Чекалкин Серафим, Янушевич Леонид.

ШКОЛА 21-29.04.08

	Группа парчи	**Группа шелка**
21-1	П (графы)	Т (многочлены)
21-2	С (диофур)	П (логика)
21-3	П (СЗ)	Т (СЗ)
22-1	П (игры)	С (компл суммы)
22-2	С (диофур)	Т (инверсия-1)
22-3	О	О
23-1	П (инварианты)	Ю.Блинков (окружности)
23-2	Ю.Блинков (окружности)	С (компл геом)
23-3	С (СЗ)	Т (СЗ)
24-1	Ю.Блинков (вневписанная-1)	П (логика)
24-2	С (целые точки)	Ю.Блинков (вневписанная)
24-3	О	О
25-1	С (Fermat)	Ю.Блинков (произволовщина)
25-2	Ю.Блинков (вневписанная-2)	Абрамов (линейность-1)
25-3	С, П (СЗ)	Т, Абрамов (СЗ)
26-1	Олимпиада М03-9	С (компл разлож)
26-2	Олимпиада М04-10	П (выборы)
26-3	П (СЗ)	Т (СЗ)
27-1	Т (вписанные-1)	П (графы)
27-2	С (Fermat)	Абрамов (линейность-2)
27-3	О	О
28-1	П (графы-2)	Олимпиада М04-10
28-2	Т (вписанные-2)	Олимпиада В04-10
28-3	О	П (Эрроу) / Т (СЗ)
29-1	П (подсчеты)	Т (инверсия-2)
29-2	П, С (СЗ)	Т, Абрамов (СЗ)

Группа шелка (куратор и ответственный за отбой А. Трепалин): *Калиниченко Иван*, Козачинский Александр, Левин Никита, Лысенко Николай, *Медведь Никита*, Николаев Семен, *Покровский Федор*.

Группа парчи (куратор и ответственный за отбой Д. Пермяков): *Бурова Ольга*, Гришина Юля, Гурьянов Алексей, *Домбровский Андрей*, Корецкая Вера, Поволоцкий Михаил, *Рухович Алексей*, *Рухович Данила*, Яфракова Ольга.

ШКОЛА 10-19.11.08

	группа рыбы 701	**группа птицы 502**	**группа зверя 601**
10-1	С уравнения	Т (многочл-1)	Арутюнов (разбиен)
10-2	Арутюнов (комби)	С (квычеты)	Т (многочл-1)
11-1	С уравнения	Т (многочл-2)	Арутюнов (разбиен)
11-2	Арутюнов (комби)	С (квычеты)	Т (многочл-2)
11-3	СЗ(Арутюнов)	СЗ (С)	СЗ (Т)
12-1	Олимпиада	Олимпиада	Олимпиада
12-2	ВМО05-1	ММО05	Сборы04-1
12-3	О	О	О
13-1	М.Скопенков (разре)	Горинов (графы)	Ол ВМО05-11-2
13-2	Сафин (комби)	М.Скопенков (разре)	Сб04-2,ММО04-11
13-3	СЗ (Сафин)	СЗ (Есин)	СЗ (Т)
14-1	С компл-1	Ол ВМО05-10-2	М.Скопенков (разре)
14-2	М.Скопенков (разре)	ММО04-11	Нетай (графы)
14-3	О	О	СЗ (Т)
15-1	Ол ВМО05-10-2	М.Скопенков (комб)	Заславский (компл)
15-2	ММО01-9,10	Заславский (геом)	М.Скопенков (многог)
15-3	О	СЗ (Есин)	О
16-1	Гаврилюк (клгеом)	М.Скопенков (комб)	Заславский (компл)
16-2	Нилов (гармони4)	Заславский (геом)	Гаврилюк (коники)
16-3	О	О	СЗ (Т, Нетай)
17-1	Есин (клгеом)	Нилов (гармони4)	Токарев (числа)
17-2	Нилов (гармони4)	Токарев (монеты)	Т (клгеом)
17-3	СЗ (Нетай)	СЗ (Есин, Нилов)	СЗ (Т)
18-1	С компл-2	Токарев (монеты)	Нетай (графы)
18-2	СЗ (Нетай)	СЗ (Есин)	Токарев (числа)
18-3	О/зачет (Нетай)	О/зачет (Есин)	О/зачет (Сафин)

Группа рыбы: *Бурова Ольга*, Дедовик Юлия, Домбровский Андрей, Максимова Марина, Поволоцкий Михаил, Рухович Алексей, Рухович Данила, *Тужилин Михаил*, *Цой Валерия*.

Группа птицы: Беляков Сергей, *Бершадский Ефим*, Горбань Степан, Гусев Алексей, *Ивлев Федор*, *Калиниченко Иван*, Козачинский Александр, *Мокин Василий*, *Тренин Кирилл*.

Группа зверя: Калашник Анна, Кондакова Елизавета, *Матдинов Марсель*, Медведь Никита, *Немиро Владислав*, *Омельяненко Виктор*, Радонец Алексей, Царьков Олег, Ярославцев Иван.

МАТЕМАТИКА В ЗАДАЧАХ

Сборник материалов выездных школ команды Москвы
на Всероссийскую математическую олимпиаду

Под редакцией А. А. Заславского, Д. А. Пермякова,
А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова

Подписано в печать 22.12.2008 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 30,5. Тираж 2000 экз. Заказ №   .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–74–83

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.