КОНКУРС «ЭВРИКА!»

Мы продолжаем конкурс решения задач, предназначенный прежде всего для учащихся 5–9 классов. Победители конкурса будут награждены специальными призами. Решения задач присылайте по истечении одного месяца после получения этого номера журнала. В письме сообщите свою фамилию, имя, класс и номер школы, в которой Вы учитесь. Письма присылайте на адрес редакции: **127254, Москва, ул. Руставели, д. 10, корп. 3,** с пометкой «Эврика!» (или же присылайте решения в формате «.doc» на два электронных адреса: **mathematics@schoolpress.ru** и **evrika-a-a@yandex.ru**).

Задания второго тура

7. (5–7).

а) Представьте число 2012 в виде суммы двух палиндромов — чисел, десятичные записи которых читаются слева направо так же, как справа налево. (Сумму 2002 + 010 не предлагать!)

б) Найдите наименьшее натуральное число, не представимое в виде суммы двух палиндромов.

А. Спивак

8. (5–8).

Докажите неравенство

$$\text{ГОД}^{20} < \text{ДРАКОНА}^{12},$$

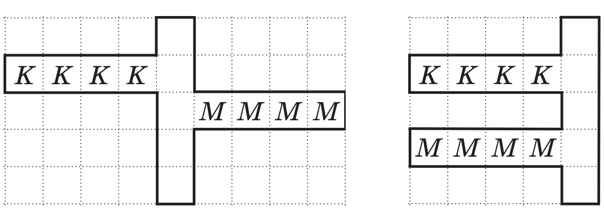
где разные буквы обозначают разные цифры, а одинаковые — одинаковые.

Е. Пронина

9. (5–8).

Четыре квадратные фишки, помеченные буквами *К*, поменяйте местами с четырьмя фишками, помеченными буквами *М*, если нельзя выходить за указанные границы.

Е. Пронина



а) **Рис. 1** *б*)

10. (5–10).

Стороны *AB* и *DE* шестиугольника *ABCDEF* равны и параллельны; стороны *BC* и *EF* тоже равны и параллельны. Обязательно ли стороны *CD* и *FA* равны и параллельны?

И. Акулич

11. (6–9).

Скорость пешехода равна 5 км/ч, скорость мотоцикла (с пассажиром или без пассажира) — 50 км/ч. *а*) Могут ли три человека, имея один двухместный мотоцикл, преодолеть 60 км за 3 часа? *б*) За какое наименьшее время они могут это сделать?

Классика

12. (7–9).

Из квадратов *ABGH*, *BCFG* и *CDEF* составили прямоугольник *ADEH*. Найдите сумму величин углов *AFH* и *AEH*.

Классика

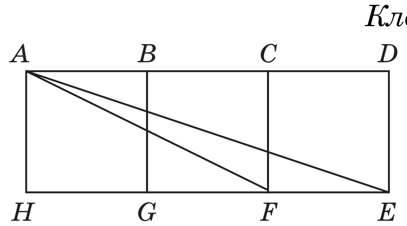


Рис. 2

13. (5–11).

а) Какое наибольшее число клеток шахматной доски можно пометить, если мы сначала помечаем некоторую одну клетку, а каждая следующая помечаемая клетка должна иметь с предыдущей отмеченной клеткой общую сторону или вершину, но не может иметь ни одной общей точки ни с какой другой помеченной клеткой?

*б**) А если запретить иметь общую сторону, потребовав, чтобы каждая очередная помечаемая клетка имела одну общую вершину с предыдущей помеченной клеткой и только с ней?

И. Акулич

14. (7–11).

Рассмотрим несколько чисел, ни одно из которых не равно другому. Например, числа 1, 3, 5 и 8. Для каждого из них вычислим произведение, множители которого получены вычитаниями из этого числа остальных рассматриваемых чисел. В нашем примере это

$$(1-3)(1-5)(1-8) = -56,$$
$$(3-1)(3-5)(3-8) = 20,$$
$$(5-1)(5-3)(5-8) = -24$$
$$\text{и} \quad (8-1)(8-3)(8-5) = 105.$$

а) Вычислите суммы

$$\frac{1}{-56}+\frac{1}{20}+\frac{1}{-24}+\frac{1}{105},$$
$$\frac{1}{-56}+\frac{3}{20}+\frac{5}{-24}+\frac{8}{105},$$
$$\frac{1}{-56}+\frac{9}{20}+\frac{25}{-24}+\frac{64}{105},$$
$$\frac{1}{-56}+\frac{27}{20}+\frac{125}{-24}+\frac{512}{105}$$

и

$$\frac{1}{-24}+\frac{81}{20}+\frac{625}{-24}+\frac{4096}{105}.$$

б) Упростите выражения

$$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-a}, \quad \frac{a}{a-b}+\frac{b}{b-a}, \quad \frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-a}$$
$$\text{и} \quad \frac{a^3}{a-b}+\frac{b^3}{b-a}.$$

в) Выпишите аналогичные суммы дробей для случая трех чисел и упростите их.

г) Рассмотрим треугольник Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Проверьте следующие равенства:

$1 - 5 + 10 - 10 + 5 - 1 = 0,$

$1 \cdot 0 - 5 \cdot 1 + 10 \cdot 2 - 10 \cdot 3 + 5 \cdot 4 - 1 \cdot 5 = 0,$

$1 \cdot 0 - 5 \cdot 1 + 10 \cdot 4 - 10 \cdot 9 + 5 \cdot 16 - 1 \cdot 25 = 0,$

$1 \cdot 0 - 5 \cdot 1 + 10 \cdot 8 - 10 \cdot 27 + 5 \cdot 64 - 1 \cdot 125 = 0.$

Продолжите этот ряд равенств; выпишите аналогичные равенства для какой-нибудь другой строки треугольника Паскаля и выясните, как это связано с предыдущими пунктами задачи.

Л. Эйлер

15. (8–11).

Стопку из n тетрадей, пронумерованных числами от 1 до n, перемешали неизвестным нам образом. Разрешено вынуть любую пару соседних тетрадей и положить ее, не переворачивая, на самый верх стопки. Всегда ли можно с помощью нескольких таких операций расположить тетради по порядку при

а) $n = 3$; б) $n = 4$; в*) $n > 4$?

И. Акулич

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЧЕТВЕРТОГО ТУРА 2011 ГОДА

Условия задач см. в журнале № 4, 2011 г.

1. Ответ: может.

Например, распределение ростов может быть таким: 10 см, 10 см, 10 см, 20 см (у Незнайки), 50 см. Этот пример легко обобщается на случай большего количества коротышек.

2. Представим себе *призраки* картошек, которые могут беспрепятственно проникать друг в друга. Если один такой *призрак* слегка пересечь с другим, то на границе их общей части получится требуемая кривая.

3. Ответ:

$$(0 + 1)(2 + 3)(4 + 5)(6 + 7)(8 + 9).$$

Обоснуем минимальность этого выражения.

Цифры 0 и 1 должны стоять в одной скобке. В противном случае мы получим

$$(0 + a)(1 + b) = a + ab > a + b = (0 + 1)(a + b), \quad \text{где} \quad a, b > 1.$$

Точно так же последовательно показывается, что каждая из пар цифр: 2 и 3, 4 и 5, 6 и 7, 8 и 9 должна стоять в одной скобке.

4. Ответ: остаток равен 44.

Пусть остаток равен x, и делитель в y раз больше остатка, а неполное частное — в y раз меньше, то есть они соответственно равны xy и $\frac{x}{y}$. Так как делимое (то есть номер года) есть произведение делителя на неполное частное плюс остаток, то номер года равен

$$(xy)\cdot\left(\frac{x}{y}\right) + x = x^2 + x.$$

Осталось найти такое x, при котором найденное выражение может равняться году рождения учителя математики. Он заведомо принадлежит XX веку. Это возможно только при $x = 44$; тогда $x^2 + x = 1980$ (в самом деле, $43^2 + 43 = 1892$, а $45^2 + 45 = 2070$). Значит, остаток равен 44, а год рождения учителя — 1980-й.

А вот точно назвать делитель и неполное частное невозможно (например, делитель равен 88, а частное — 22 или делитель равен 176, а частное — 11 и т.д.).

5. Поскольку ближайшим к квадрату целого числа a^2 является квадрат целого числа $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$ и $a^2 + 2b + 1$ — тоже квадрат, то $b \geq a$.

Точно так же, поскольку ближайшим к квадрату целого числа b^2 является квадрат целого числа $(b + 1)^2 = b^2 + 2b + 1$ и $b^2 + 2a + 1$ — тоже квадрат, то $a \geq b$. Отсюда $a = b$.

6. Из вершины C, как из центра, опишем дугу AK радиуса AC. Из вершины A, как из центра, опишем дугу радиуса, равного стороне правильного шестиугольника AB. Пусть эти две дуги пересекаются в точке K. Из точки K, как из центра, опишем дугу AD радиуса $AK = AB$.

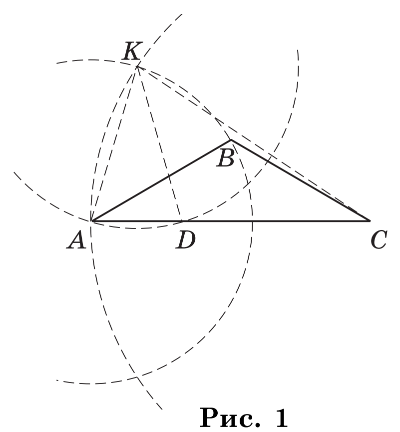


Рис. 1

Принадлежащая диагонали AC точка D отсекает от нее отрезок AD, равный трети отрезка AC. Докажем это.

Для удобства примем длину стороны правильного шестиугольника за единицу: $AB = BC = AK = 1$, тогда $AC = AC = \sqrt{3}$. Равнобедренные треугольники KAD и CAK подобны по двум углам. Значит, $\frac{AD}{AK} = \frac{AK}{AC}$. Отсюда $AD = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}AC$. Зная AD, несложно с помощью циркуля на отрезке AC отложить еще одну третью его часть.

7. Ответ:

$$1! + 1! + 1! + 1! + 1! + 1! = 3!$$

или

$$5! + 5! + 5! + 5! + 5! + 5! = 6!$$

или

$$2! + 2! + 2! + 3! + 3! + 3! = 4!$$

Очевидно, $x! \geq 6$, поэтому $x \geq 3$. Если $x = 3$, то уравнение решается однозначно:

$$1! + 1! + 1! + 1! + 1! + 1! = 3!$$

Если $x = 6$, то уравнение также решается однозначно:

$$5! + 5! + 5! + 5! + 5! + 5! = 6 \cdot 5! = 6!$$

Докажем, что непременно $x \leq 6$. При $x > 6$ наибольшее значение левой части уравнения равно $(x - 1)! \cdot 6 < (x - 1)!\, x = x!$

Осталось разобрать два случая: $x = 4$ и $x = 5$. Несложный перебор в первом случае дает

$$2! + 2! + 2! + 3! + 3! + 3! = 4!$$

В случае $x = 5$ получаем уравнение $e! + v! + r! + i! + k! + a! = 120$. Не ограничивая общности, полагаем $e \leq v \leq r \leq \leq i \leq k \leq a \leq 4$. Предположим, что $a = 3$. Тогда левая часть не превосходит $3! \cdot 5 = 30$. Значит, $k = 4$. Отсюда $e! + v! + r! + i! = 72$. Рассуждая дальше, получаем сначала $i = 4$, затем $r = 4$, и уравнение сводится к $e! + v! = 24$, которое, как легко проверить, решений не имеет.

8. Примем длину стороны квадратного лоскутка за 1, тогда исходное одеяло в виде шахматной доски имеет размеры 8×8. Такие же размеры имеет и новое одеяло.

Сначала сделаем «раскройку» для черных квадратиков. Предварительно из 32 черных лоскутков сошьем прямоугольник 32×1 (для удобства чтения чертежа на рисунке 2 эти квадратики не закрашены).

Рис. 2

Покажем, как перекроить этот прямоугольник в черный квадрат в центре нового одеяла, который имеет размеры $4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}$ (его площадь равна половине площади одеяла, то есть 32).

Сделаем из прямоугольника на рисунке 2 параллелограмм с длинами сторон 32 и $4\sqrt{2}$. Для этого отрежем слева прямоугольный треугольник с гипотенузой $4\sqrt{2}$ и приставим его справа от полоски (рис. 3).

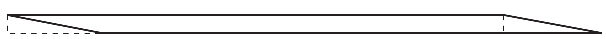


Рис. 3

Из полученной полоски отрежем 8 параллелограммов с длинами сторон $4\sqrt{2}$ и 4 (рис. 4).

Рис. 4

Каждый из 8 параллелограммов превращаем в прямоугольник $4\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, отрезая по высоте к большей стороне параллелограмма прямоугольный треугольник с одной стороны и приставляя его с другой (рис. 5).

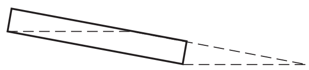


Рис. 5

Осталось 8 прямоугольников сшить вместе — получим требуемый квадрат (рис. 6).

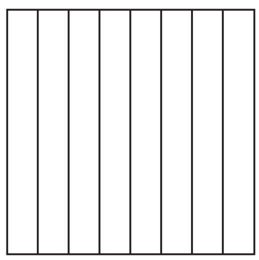


Рис. 6

Аналогичный прием применим для выкройки белого поля нового одеяла.

Заметим, что ширина этого поля равна $4-2\sqrt{2}$, так что нам надо будет сначала заготовить белую полоску — прямоугольник с размерами $h\times\dfrac{32}{h}$, где $h=4-2\sqrt{2}$. Приступим к изготовлению этого прямоугольника, действуя точно так же, как и ранее.

Предварительно из 32 белых лоскутков сошьем прямоугольник 32×1 (рис. 2). Далее сделаем из этого прямоугольника параллелограмм с длинами сторон 32 и h. Для этого отрежем слева прямоугольный треугольник с гипотенузой h и приставим его справа полоски (рис. 3). Из полученной полоски теперь уже отрежем 16 параллелограммов с длинами сторон h и 2 — рисунок получится похожим на рисунок 4, но с удвоенным количеством параллелограммов. Удвоить это количество нам пришлось из-за того, что высота, опущенная из тупого угла, попала на сторону параллелограмма, а не на ее продолжение. Каждый из 16 параллелограммов превращаем в прямоугольник $h\times\dfrac{2}{h}$ (рис. 5). Полученные 16 прямоугольников сшиваем вместе для изготовления требуемой прямоугольной полоски размера $h\times\dfrac{32}{h}$ (вместо квадрата, как показано на рисунке 6, получится вытянутый прямоугольник). Эту полоску перекраиваем в параллелограмм с острым углом 45°, который затем разрезаем на четыре трапеции с основаниями 8 и $4\sqrt{2}$ (рис. 7).

Рис. 7

Эти трапеции, приставленные по бокам к черному квадрату, дадут требуемое изображение.

Любопытно происхождение данной задачи.

Мы ее узнали от московского художника Александра Федоровича Панкина. Исследуя известное произведение Казимира Малевича «Черный квадрат», Александр Федорович обнаружил, что площади черного квадрата в центре и белого поля на этой картине равны, а черный квадрат оказался вписанным в окружность, которая, в свою очередь, вписана в квадрат белого холста (рис. 8). Об этом открытии Александра Федоровича разузнал композитор Владимир Иванович Мартынов, который задался следующим естественным вопросом. Известно, что черных и белых клеточек на шахматной доске тоже поровну, значит, теоретически, из шахматной доски можно создать точно такую же экспозицию, как и на картине Казимира Малевича. Но как это сделать? Так и родилась наша задача.

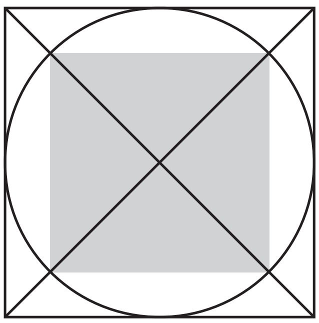


Рис. 8

Можно было решить задачу и другим способом: сложить не полоску 32×1, а прямоугольник 8×4, и воспользоваться рисунком 9.

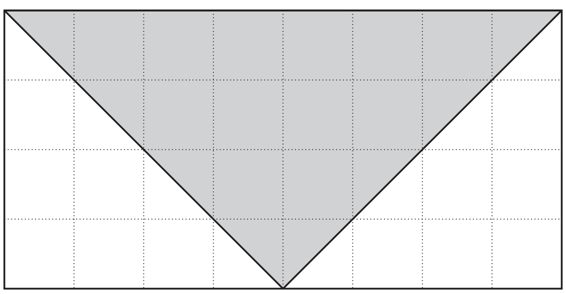


Рис. 9

Вообще, если площади прямоугольников $ABCD$ и $AXYZ$ равны (рис. 10), а отношение их наибольших сторон не меньше $\frac{1}{2}$ и не больше 2, то отрезки DX, BC и YZ делят прямоугольник $ABCD$ на пятиугольник $ABUVZ$ и треугольники CDU и DZV, а прямоугольник $AXYZ$ — на пятиугольник $ABUVZ$ и треугольники YVX и UBX.

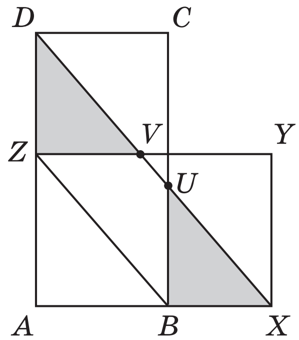


Рис. 10

Суть в том, что прямые DX и ZB параллельны (и поэтому $DZ = UB$, $ZV = BX$). Параллельность следует из равенства отношений $AZ : AB = AD : AX$, которое равносильно равенству произведений $AZ \cdot AX = AD \cdot AB$, то есть равенству площадей прямоугольников $AXYZ$ и $ABCD$.

Прием, который мы использовали для перекраивания одних фигур в другие, лежит в основе доказательства теоремы Бойяи–Гервина: «Каждый из двух имеющих одинаковую площадь многоугольников можно разрезать на части, из которых можно составить второй многоугольник» (см. также заметку А.В. Жукова «От задачи к проблеме» на с. 51).

9. Сумма чисел нового набора равна сумме чисел исходного набора. Наибольшее и наименьшее из чисел нового набора симметричны, соответственно, наименьшему и наибольшему из чисел старого набора относительно среднего арифметического всех чисел набора.

РАЗБОР ПОЛЕТОВ

Обзор решений задач конкурса «Эврика!» (IV тур, 2011 год)

Задача 22 требовала не ответа, которым, к сожалению, ограничились многие школьники, конкретного примера. Придумать его легко: пишем любые несколько маленьких чисел, например 1, 2, 3, 4, 5, берем любое большее число, например 6 на роль среднего роста, то есть на роль роста Незнайки, и к этой компании добавляем одного гиганта роста x. Как найти x? Составим уравнение $\frac{1+2+3+4+5+6+x}{7}=6$ и решим его: $21 + x = 42$, то есть $x = 21$.

Задача 22 учит нас, что когда мы говорим о среднем значении, то среднее арифметическое не обязательно разделяет множество примерно пополам. Например, в России по официальной статистике сейчас более 400 миллиардеров. Их деньги при делении на численность населения России дают более чем по 3000 рублей. Таким образом, если через год доходы миллионеров удвоятся, то статистика представит это как рост среднего дохода более чем на 3000 рублей.

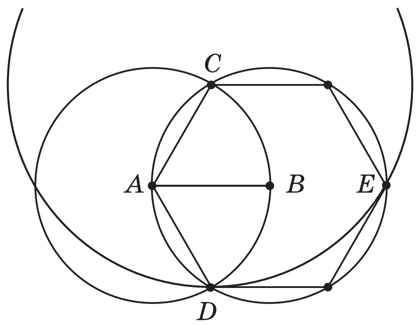
Задача 23, строго говоря, не математическая: при решении не требовалось знать точное определение поверхности. То, что пересечение является кривой, считалось очевидным. На самом деле вовсе не любые две поверхности пересекаются по замкнутой кривой (да и что такое замкнутая кривая, нуждается в особом серьезном разговоре!). Но не будем слишком строги! Придет время, и в университете многие из вас познакомятся с математическим анализом и топологией.

Задача 24, как и **28**, требовала не только ответа, но и доказательства.

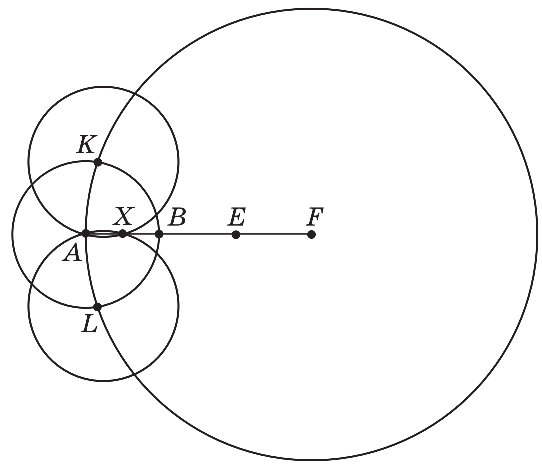
Задача 25 решена почти всеми участниками конкурса; требовалось всего лишь помнить, что такое остаток, а что — неполное частное.

Идея решения **задачи 26** позволяет разобраться и в некоторых других интересных задачах. Например, можете доказать, что если числа x и y натуральные, то хотя бы одно из чисел $x^2 + y$ и $y^2 + x$ не является квадратом натурального числа. Можете выяснить, при каких целых x сумма $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ является квадратом целого числа, и решите в целых числах уравнение $x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$.

Задача 27 — намек на то, что линейка вообще не нужна! А именно, любое построение, выполнимое циркулем и линейкой, можно выполнить одним только циркулем. (Разумеется, прямую нарисовать циркулем нельзя, но можно договориться задавать прямую двумя ее точками.) Обычно доказательство этой теоремы Мора-Маскерони рассматривают, когда изучают инверсию. Не будем здесь доказывать ее, укажем лишь, как можно разделить любой отрезок AB на три равные части. Сначала рисуем окружности радиусом AB с центрами в точках A и B. Они пересекаются в двух точках C и D. Окружность с центром C радиусом CD пересекает уже нарисованную нами окружность с центром B в точке E, симметричной точке A относительно точки B. (Докажите это, нарисовав вписанный правильный шестиугольник.)



Умея удваивать любой отрезок, мы можем и утроить его — построить такую точку F, что точки B и E делят отрезок AF на три равные части. Далее — обещанная инверсия. Строим окружность с центром F радиусом AF. Она пересекает уже построенную окружность с центром A в некоторых точках K и L. Окружности с центрами K и L,



проходящие через точку A, пересекаются, помимо точки A, в некоторой точке X. Точка X нам и нужна: $AB : AX = 3$. Суть в том, что треугольники AKF и AXK равнобедренные; более того, они подобны с коэффициентом 3.

А.В. Жуков

ОТ ЗАДАЧИ — К ПРОБЛЕМЕ

Кое-что о теореме Бойяи–Гервина

В четвертом туре конкурса «Эврика!» за 2011 год («Математика для школьников», № 4–2011) предлагалась задача о «перекройке» черно-белой шахматной доски. Требовалось разрезать ее на такие составные части, из которых можно было бы собрать черную и белую фигуры в композиции картины Казимира Малевича «Черный квадрат» (рис. 1). В решении этой задачи (см. с. 47–49) указан способ разрезания, аналогичный способу, который используется в доказательстве теоремы Бойяи–Гервина: каждый из двух равновеликих (то есть имеющих одинаковую площадь) многоугольников всегда можно разрезать на части, из которых составляется второй многоугольник.

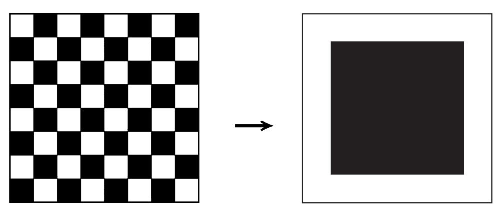


Рис. 1

Существование такого общего способа разрезания независимо друг от друга доказали венгерский математик Фаркаш Бойяи (1832) и немецкий офицер и любитель математики Гервин (1833).