

Длина, площадь, объем

Задача 1. а) Сколько нужно кубиков со стороной 1 см, чтобы сложить куб со стороной 3 см? *Указание.* Удобно считать по слоям (при этом возникает плоский аналог задачи).

б) Грузчик на складе может поднять упаковку $3 \times 3 \times 3$ литровых пакетов молока. Смогут ли три грузчика поднять упаковку $9 \times 9 \times 9$ пакетов?

Вопрос. А сколько грузчиков смогут? (Ср. с пред. пунктом.)

Задача 2. После 7 стирок длина, ширина и высота куска мыла уменьшились вдвое. На сколько еще стирок хватит оставшегося куска? (На каждую стирку уходит одно и то же количество мыла.)

Указание. Сколько нужно маленьких кусков, чтобы сложить исходный (ср. с 1а)?

Комментарий. Мораль: когда размеры меняются в k раз, объемы меняются не в k (а в k^3) раз.

Задача 3. а) Кубарик сложен из нескольких деревянных кубиков. Как изменится его масса, если каждый кубик уменьшить в 2 раза?

Указание. Какой ответ, если кубик один? А если их три?

Комментарий. Отметим, что ответ никак не зависит от формы Кубарика.

б) Как изменится масса слона, если уменьшить его (по всем размерам) в 2 раза?



Ответ. Уменьшится в 8 раз. (А если уменьшать в k раз — то в k^3 раз.)

Задача 4. а) Пусть объем шара радиуса 1 равен s . Найдите объем шара радиуса r . *Ответ.* sr^3 . *Комментарий.* На самом деле, $s = \frac{4}{3}\pi$.

б) Что лучше: съесть два (круглых) апельсина диаметрами 4 см и 6 см или один апельсин диаметром 10 см?

Указание. Можно посчитать (пользуясь пунктом а). А можно вложить два маленьких в большой.

Задача 5. а) Какую долю площади квадрата 20×20 составляют граничные клетки? б) Какую долю объема куба $20 \times 20 \times 20$ составляют граничные кубики?

Указание. Чтобы не увязнуть в формуле включения—исключения, можно посчитать, наоборот, внутренние кубики. *Ответ.* а) 19%; б) 27,1%.

Комментарий. Видно, что с ростом размерности вклад границы становится больше.

в) Толщина кожуры круглого арбуза — 10% от радиуса всего арбуза. Какую долю объема всего арбуза составляет кожура? *Ответ.* 27,1%.

Задача 6. Длина экватора глобуса равна 1 м. Какой у него масштаб? Какую площадь на нем имеет Россия? (Длина земного экватора равна 40 000 км; площадь России — примерно 17 000 000 км².)



Задача 7. Земной шар стянули обручем по экватору. Затем обруч удлинили на 1 м (так, что образовавшийся зазор везде одинаков). Пролезет ли под обручем кошка? *Комментарий.* По определению числа π , длина окружности радиуса r равна $2\pi r$.

Указание. Как изменился радиус обруча? *Ответ.* Вполне (получается зазор примерно в 15 см).

Длина, площадь, объем. Дополнительные задачи.

Задача 8. Можно ли внутри квадрата со стороной 10 см нарисовать несколько непересекающихся кругов с суммой диаметров больше 10 см?

Указание. Какой получится суммарный диаметр кругов, если разделить каждую сторону квадрата на N частей и вписать по кругу в каждую клетку? (Начните с $N = 1, 2$.)

Задача 9. На левую чашу весов положили две круглых монеты, а на правую — еще одну, так что весы оказались в равновесии. А какая из чаш перевесит, если каждую из монет заменить шаром того же радиуса?

Комментарий. Это задача с Турнира Ломоносова этого года.

